

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 25 Νοεμβρίου 2022

Άσκηση 1. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ και

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$ και μια βάση του \mathbb{R}^n η οποία περιέχει μια βάση του \mathcal{V} .

Άσκηση 2. Έστω \mathcal{U} και \mathcal{V} δύο υπόχωροι του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_6[x]$ και υποθέτουμε ότι

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 4 \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 5$$

Να προσδιορισθούν οι δυνατές τιμές για τη διάσταση:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, ποιά είναι η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$;

Άσκηση 3. Έστω ότι \mathcal{V} και \mathcal{U} είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} . Υποθέτουμε ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) + 1$$

Να δειχθεί ότι ένας εκ των υποχώρων \mathcal{V} και \mathcal{U} συμπίπτει με τον $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ και ο άλλος με τον $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{R}^3 :

$$\vec{x}_1 = (1, 2, 1), \quad \vec{x}_2 = (1, 1, -1), \quad \vec{x}_3 = (1, 3, 3)$$

$$\vec{y}_1 = (2, 3, -1), \quad \vec{y}_2 = (1, 2, 2), \quad \vec{y}_3 = (1, 1, -3)$$

Αν

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{U} = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$$

να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων \mathcal{V} , \mathcal{U} , $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

Άσκηση 5. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{R}^4 :

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \vec{x}_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \vec{x}_3 = (0, 0, 1, 1)$$

$$\vec{y}_1 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{y}_2 = (0, 2, 1, 1), \quad \vec{y}_3 = (1, 2, 1, 2)$$

Αν

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{U} = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$$

να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων \mathcal{V} , \mathcal{U} , $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

καλείται **μαγικός** αν και μόνον αν το άθροισμα:

- (1) $\forall i = 1, 2, \dots, n$, το άθροισμα των στοιχείων της i -γραμμής: $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}$
- (2) $\forall j = 1, 2, \dots, n$, το άθροισμα των στοιχείων της j -στήλης: $a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}$
- (3) των στοιχείων της κύριας διαγωνίου: $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- (4) των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου: $a_{1n} + a_{2n-1} + \cdots + a_{n1}$

είναι ίσο με τον ίδιο αριθμό $S \in \mathbb{K}$, ο οποίος καλείται ο **μαγικός αριθμός** του A .

Για παράδειγμα οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι μαγικοί με μαγικούς αριθμούς 2, 15 και 34 αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με $M\mathbb{P}(n)$ το σύνολο όλων των $n \times n$ μαγικών πινάκων.

Άσκηση 6. Ναδειχθεί ότι το σύνολο $M\mathbb{P}(n)$ είναι ένας υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$. Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων $M\mathbb{P}(2)$ και $M\mathbb{P}(3)$.

Άσκηση 7. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ και

$$(\Sigma) \quad AX = 0$$

το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους. Αν $m < n$ ναδειχθεί ότι το (Σ) έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση, και επομένως έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 8. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο k με $k \geq n^2$, υπάρχουν στοιχεία $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, όχι όλα ίσα με μηδέν, έτσι ώστε:

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_k A^k = 0$$

Άσκηση 9. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_n[x]$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n υπεράνω του \mathbb{R} , και έστω $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $1 \leq k \leq n$, θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{V}_k = \{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(\rho_1) = P(\rho_2) = \cdots = P(\rho_k) = 0\}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι το υποσύνολο \mathcal{V}_k είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}_n[x]$.
- (2) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του \mathcal{V}_k .
- (3) Να συμπληρωθεί η βάση του \mathcal{V}_k που βρέθηκε στο (2) σε μια βάση του $\mathbb{R}_n[x]$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

είναι δύο βάσεις του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , τότε γράφοντας τα διανύσματα της βάσης \mathcal{C} ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης \mathcal{B}

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{e}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n\end{aligned}$$

προκύπτει ο $n \times n$ πίνακας

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ο οποίος καλείται ο **πίνακας μετάβασης από τη βάση \mathcal{B} στη βάση \mathcal{C}** . Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

όπου ο $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση \mathcal{C} στη βάση \mathcal{B} .

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ ένα τυχόν διάνυσμα του \mathcal{E} και έστω

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \\ \vec{x} &= x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + \cdots + x'_n\vec{e}'_n\end{aligned}$$

η μοναδική γραφή του \vec{x} ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων των βάσεων \mathcal{B} και \mathcal{C} . Οι πίνακες-στήλες

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

καλούνται οι *πίνακες των συνιστωσών* του \vec{x} ως προς τις βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{C} αντίστοιχα. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$X = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot X' \quad \text{και} \quad X' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot X$$

Άσκηση 10. Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \\ \mathcal{C} &= \{\vec{e}'_1 = (1, 1, 1), \vec{e}'_2 = (1, 1, 0), \vec{e}'_3 = (1, 0, 0)\}\end{aligned}$$

- (1) Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
- (2) Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{x} = (4, -2, 3)$ ως προς τη βάση \mathcal{C} .

Άσκηση 11. Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων του \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{\vec{e}_1 = (1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 0), \vec{e}_3 = (1, 0, 0)\} \\ \mathcal{C} &= \{\vec{e}'_1 = (1, 0, -1), \vec{e}'_2 = (-1, 1, 0), \vec{e}'_3 = (1, -1, 1)\}\end{aligned}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι τα υποσύνολα \mathcal{B} και \mathcal{C} είναι βάσεις του \mathbb{R}^3 .
- (2) Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
- (3) Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{x} = (1, -2, 5)$ ως προς τις βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{C} .

Άσκηση 12. Θεωρούμε την κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

του $\mathbb{K}_n[x]$ και το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x^2, \dots, 1+x^n\}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι το υποσύνολο \mathcal{C} είναι βάση του $\mathbb{K}_n[x]$.
 (2) Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
 (3) Να βρεθούν οι συνιστώσες του πολυωνύμου $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ ως προς τις βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{C} .

Άσκηση 13. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος διάστασης n και έστω

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$$

$$\mathcal{D} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$$

τρεις βάσεις του \mathcal{E} . Αν $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση \mathcal{B} στη βάση \mathcal{C} , αν $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση \mathcal{C} στη βάση \mathcal{D} , και αν $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση \mathcal{B} στη βάση \mathcal{D} να δειχθεί ότι:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν \mathcal{U} και \mathcal{V} είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , τότε το άθροισμα υπόχωρων

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{E} \mid \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V}\}$$

καλείται **ευθύ άθροισμα** αν κάθε διάνυσμα \vec{x} του $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, δηλαδή:

$$\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2, \text{ όπου } \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} \implies \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \text{ και } \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

Αν το άθροισμα των υπόχωρων \mathcal{U} και \mathcal{V} είναι ευθύ, θα γράφουμε:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Άσκηση 14. Αν \mathcal{U} και \mathcal{V} είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ είναι ευθύ.

(2)

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}, \text{ όπου } \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V} \implies \vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$$

(3) $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$.

Άσκηση 15. Θεωρούμε τα ακόλουθους υπόχωρους του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $M_2(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{U} = \left\langle A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{V} = \left\langle C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Να βρεθούν βάσεις των \mathcal{U} και \mathcal{V} και να δειχθεί ότι:

$$M_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Άσκηση 16. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και \mathcal{U} και \mathcal{V} δύο υπόχωροι του \mathcal{E} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

(2) Ικανοποιούνται δύο από τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

(α) $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$.

(β) $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$.

(γ) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.

Άσκηση 17. Αν \mathcal{U} και \mathcal{W} είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης \mathcal{E} , τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.
- (2) Αν \mathcal{B} είναι μια βάση του \mathcal{U} και \mathcal{C} είναι μια βάση του \mathcal{W} , τότε το σύνολο $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ είναι μια βάση του \mathcal{E} .

Άσκηση 18. Έστω \mathcal{U} ένας υπόχωρος ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} πεπερασμένης διάστασης. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας υπόχωρος \mathcal{V} του \mathcal{E} έτσι ώστε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Είναι ο υπόχωρος \mathcal{V} μοναδικός;

Άσκηση 19. Θεωρούμε δύο στοιχεία a, b ενός σώματος \mathbb{K} και έστω ο ακόλουθος 2×2 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{U} = \{X \in M_2(\mathbb{K}) \mid AX = XA\}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι το σύνολο \mathcal{U} είναι ένας υπόχωρος του $M_2(\mathbb{K})$ και να βρεθεί μια βάση του.
- (2) Να βρεθεί υπόχωρος \mathcal{V} του $M_2(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$M_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Άσκηση 20. Ναδειχθεί ότι:

$$\mathbb{K}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\} \\ \mathcal{V} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\} \end{aligned}$$

Άσκηση 21. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_n[x]$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n υπεράνω του \mathbb{R} , και έστω $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $1 \leq k \leq n$, θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{V}_k = \{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(\rho_1) = P(\rho_2) = \dots = P(\rho_k) = 0\}$$

Ναδειχθεί ότι:

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{k-1}[x] \oplus \mathcal{V}_k$$

Άσκηση 22. Θεωρούμε το σύνολο

$$S_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^t A = A\}$$

των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων, και το σύνολο

$$A_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^t A = -A\}$$

των αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων.

- (1) Ναδειχθεί ότι:

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

- (2) Να βρεθούν οι διαστάσεις των υπόχωρων $S_n(\mathbb{K})$ και $A_n(\mathbb{K})$.
- (3) Αν $n = 3$, να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων $S_n(\mathbb{K})$ και $A_n(\mathbb{K})$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , τότε το άθροισμα υπόχωρων

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n = \{ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n \in \mathcal{E} \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n \}$$

καλείται **ευθύ άθροισμα** αν κάθε διάνυσμα \vec{x} του $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n$, δηλαδή:

$$\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n, \text{ όπου } \vec{v}_i, \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n \implies \vec{v}_1 = \vec{u}_1, \vec{v}_2 = \vec{u}_2, \dots, \vec{v}_n = \vec{u}_n$$

Αν το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ, θα γράφουμε:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$$

Άσκηση 23. Έστω $\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} . Να δείχθει ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Το σύνολο \mathcal{B} είναι μια βάση του \mathcal{E} .

(2)

$$\mathcal{E} = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$$

Άσκηση 24. Αν $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$$

(2)

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \vec{0}, \text{ όπου } \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n \implies \vec{v}_i = \vec{0}, 1 \leq i \leq n$$

(3)

$$\forall i = 1, 2, \dots, n : \mathcal{V}_i \cap \left(\mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n \right) = \{ \vec{0} \}$$

Αν A και B είναι υποσύνολα ενός συνόλου X , τότε γνωρίζουμε ότι:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Όπως έχουμε αποδείξει στο μάθημα, η παραπάνω σχέση γενικεύεται για υπόχωρους: αν \mathcal{U} και \mathcal{V} είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} πεπερασμένης διάστασης, τότε:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Τι συμβαίνει για τρεις υπόχωρους:

Αν A, B και C είναι υποσύνολα ενός συνόλου X , τότε¹:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Άσκηση 25. Αν $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} πεπερασμένης διάστασης, να εξετασθεί αν ισχύει ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W})$$

¹Δείξτε το σαν Άσκηση.