ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 2 Δεκεμβρίου 2022

Άσκηση 1. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική αν και μόνον αν, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $f(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$.*

Άσκηση 2. *Έστω $\mathbb{C}$ το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ όταν θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{C}$ και θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ όταν θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$.*

(1) *Η απεικόνιση:*
$$f\colon \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \overline{z}$$
δεν είναι γραμμική.

(2) *Η απεικόνιση:*
$$f\colon \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \quad f(z) = \overline{z}$$
είναι γραμμική.

[Παραπάνω $\overline{z}$ συμβολίζει τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$, δηλαδή $\overline{z} = a - bi$.]

Παρατήρηση. *Η παραπάνω Άσκηση δείχνει ότι η έννοια της γραμμικής απεικόνισης μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων εξαρτάται από το σώμα επί του οποίου είναι ορισμένοι οι διανυσματικοί χώροι.*

Άσκηση 3. *Να εξεταστεί ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές.*

(1) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (2x - y, x, \lambda)$, *όπου* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) $f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (d-b) - (b-c)x + ax^3$.

(3) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \text{αν } y \neq 0 \\ 0, & \text{αν } y = 0 \end{cases}$

(4) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+1, -y)$.

(5) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, $f(r) = rx + 1$.

(6) $f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \big(2a - 1, b, c + d\big)$.

(7) $f\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{C})$, $f(z,w) = \begin{pmatrix} z & \overline{w} \\ 0 & z + iw \end{pmatrix}$, *όπου οι εμπλεκόμενοι διανυσματικοί χώροι θεωρούνται υπεράνω του* $\mathbb{C}$.

(8) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (ax + by + cz)(a,b,c)$, *όπου* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(9) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (ax + by + cz)(x,y,z)$, *όπου* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(10) $f\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $f(A) = |A|$, $g\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $g(A) = \mathsf{Tr}(A)$.

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$

$$\vec{e}_1 = (0,1,1), \quad \vec{e}_2 = (1,0,1), \quad \vec{e}_3 = (1,1,0)$$

και τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$

$$\vec{y}_1 = (-2,3), \quad \vec{y}_2 = (3,-1), \quad \vec{y}_3 = (4,5)$$

Να βρεθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *έτσι ώστε:*

$$\forall i = 1,2,3: \quad f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$$

Ακολούθως να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα και μια βάση για την εικόνα της f.

Άσκηση 5. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ* $\mathbb{K}$*-διανυσματικών χώρων. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\Phi\colon \mathcal{E}\times\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}\times\mathcal{F}, \quad \Phi(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y} - f(\vec{x}))$$

είναι ισομορφισμός και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, όπου ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε οι υπόχωροι $\operatorname{Ker}(f)$ και $\operatorname{Im}(f)$ έχουν πεπερασμένη διάσταση και ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)} \tag{1}$$

Η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)$ καλείται η **βαθμίδα** της f και συμβολίζεται με:

$$\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)$$

Αν $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, τότε:

$$\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_n)\rangle$$

Προφανώς, όπως προκύπτει από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων (1):

$$\mathbf{r}(f) \le \min\{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}, \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}\}$$

Άσκηση 6. *Έστω η γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *η οποία ορίζεται από τη σχέση:*

$$f(x,y,z) = (x+2y, y-z, 2x+4y)$$

Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $\operatorname{Ker}(f)$ *και μια βάση της εικόνας* $\operatorname{Im}(f)$ *της* f*. Ποιά είναι η βαθμίδα της* f*;*

Άσκηση 7. *Να εξεταστεί αν η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 8. *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$D\colon \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x], \quad D(P(x)) = P(x)'$$

η οποία στέλνει ένα πολυώνυμο $P(x)$ *στην παράγωγό του* $P(x)'$*, δηλαδή:*

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση* D *είναι γραμμική, και επάγει μια γραμμική απεικόνιση*

$$D\colon \mathbb{K}_n[x] \longrightarrow \mathbb{K}_n[x], \quad D(P(x)) = P(x)'$$

(2) *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της* D *όταν η* D *θεωρηθεί ως γραμμική απεικόνιση*

$$D\colon \mathbb{K}_n[x] \longrightarrow \mathbb{K}_n[x], \quad D(P(x)) = P(x)'$$

Ποιά είναι τότε η βαθμίδα της D*;*

(3) *Να δειχθεί ότι* $D^{n+1} = 0$.

Άσκηση 9. *Έστω* $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_n$ *ανά δύο διαφορετικά στοιχεία ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση:*

$$f\colon \mathbb{K}_n[x] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}, \quad f(P(x)) = \big(P(\rho_0),\, P(\rho_1),\, \cdots,\, P(\rho_n)\big)$$

είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 10. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$.

(1) *Αν* $\mathcal{V}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$, *να δειχθεί ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$\operatorname{Ker}(f) = \mathcal{V}$$

(2) *Αν* $\mathcal{W}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$, *να δειχθεί ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση* $g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$\operatorname{Im}(g) = \mathcal{W}$$

Άσκηση 11. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου ο* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathcal{E}$ *έχει πεπερασμένη διάσταση.*

(1) *Να δείξετε ότι η* f *είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν η* f *στέλνει γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων σε γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων:*

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\big\} : \text{ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο } \implies$$

$$f(\mathcal{C}) = \big\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_k)\big\} : \text{ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο}$$

(2) *Να δείξετε ότι η* f *είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν η* f *στέλνει τυχούσα βάση του* $\mathcal{E}$ *σε βάση του* $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\} : \text{ βάση του } \mathcal{E} \quad \implies \quad f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_n)\} : \text{ βάση του } \mathcal{E}$$

Υπεθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, τότε το σύνολο

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \big\{f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \mid f : \text{ γραμμική}\big\}$$

είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με πράξεις, $\forall f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$f + g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}, \quad (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \qquad \text{(πρόσθεση)}$$

$$\lambda \cdot f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}, \quad (\lambda \cdot f)(\vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \qquad \text{(βαθμωτός πολλαπλασιασμός)}$$

Αν $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζονται οι γραμμικές απεικονίσεις $f^n\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $\forall n \geq 0$, όπου $f^0 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, και $f^n(\vec{x}) = (f \circ f \circ \cdots \circ f)(\vec{x})$ (σύνθεση της f με τον εαυτό της n-φορές).

Τέλος, αν $f, f_1, f_2\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ και $g, g_1, g_2\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε:

$$f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2 \quad \text{ και } \quad (f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$$

Άσκηση 12. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση. Να δειχθεί ότι:*

$$\{\vec{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f^2) \subseteq \operatorname{Ker}(f^3) \subseteq \cdots\cdots \subseteq \operatorname{Ker}(f^k) \subseteq \operatorname{Ker}(f^{k+1}) \subseteq \cdots\cdots \subseteq \mathcal{E}$$

και υπάρχει $r \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Ker}(f^r) = \operatorname{Ker}(f^{r+1}) = \operatorname{Ker}(f^{r+2}) = \cdots$$

Άσκηση 13. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E} \supseteq \operatorname{Im}(f) \supseteq \operatorname{Im}(f^2) \supseteq \operatorname{Im}(f^3) \supseteq \cdots\cdots \supseteq \operatorname{Im}(f^k) \supseteq \operatorname{Im}(f^{k+1}) \supseteq \cdots\cdots \supseteq \{\vec{0}\}$$

και υπάρχει $s \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Im}(f^s) = \operatorname{Im}(f^{s+1}) = \operatorname{Im}(f^{s+2}) = \cdots$$

Άσκηση 14. *Έστω* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, και έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$.

(1) *Υποθέτουμε ότι:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \quad \cdots, \quad f(\vec{e}_{n-1}) = \vec{e}_n, \quad f(\vec{e}_n) = \vec{e}_1$$

Να δειχθεί ότι: $f^n = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, *η* f *είναι ισομορφισμός και να βρεθεί η αντίστροφή της.*

(2) *Υποθέτουμε ότι:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \quad \cdots, \quad f(\vec{e}_{n-1}) = \vec{e}_n, \quad f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$

Να δειχθεί ότι: $f^n = 0$ *και να βρεθεί η βαθμίδα της* f.

Άσκηση 15. *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\operatorname{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\operatorname{Im}(f)$ *της γραμμικής απεικόνισης:*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 2y, y - x, x + 2z)$$

Είναι η f *ισομορφισμός· Αν η* f *είναι ισομορφισμός, να βρεθεί η* f^{-1}.

Άσκηση 16. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση:*

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z, w) = (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w)$$

(1) *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\operatorname{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\operatorname{Im}(f)$ *της* f.
(2) *Να δειχθεί ότι το διάνυσμα* $(1, 3, \kappa) \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \kappa = 5$.
(3) *Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα* $a, b \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $(1, a, 1, b) \in \operatorname{Ker}(f)$;

Άσκηση 17. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 3z,\ 3y + z,\ -x + 6y - z)$$

(1) *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\operatorname{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\operatorname{Im}(f)$ *της* f.
(2) *Να βρεθούν οι υπόχωροι* $f(\mathcal{V})$ *και* $f^{-1}(\mathcal{W})$, *όπου:*

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\} \quad \text{και} \quad \mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z = 0\}$$

Άσκηση 18. *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. *Έστω ότι* $f^n = 0$ *και* $f^{n-1} \neq 0$. *Αν* $\vec{x} \in \mathcal{E}$, *να δείξετε ότι* $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$ *αν και μόνο αν το σύνολο*

$$\{\vec{x},\ f(\vec{x}),\ \cdots,\ f^{n-1}(\vec{x})\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Άσκηση 19. *Θεωρούμε τον* 2×2 *πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f \colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA$$

Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\operatorname{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\operatorname{Im}(f)$ *της* f.

Άσκηση 20. *Θεωρούμε τη βάση*
$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1 = 1,\, \vec{e}_2 = t,\, \vec{e}_3 = t^2\}$$
του $\mathbb{R}_2[t]$ *και τα διανύσματα*
$$\vec{w}_1 = 1 + t,\;\; \vec{w}_2 = 3 - t^2,\;\; \vec{w}_3 = 4 + 2t - 3t^2$$
του $\mathbb{R}_2[t]$. *Να προσδιορισθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ *έτσι ώστε:* $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq 3$. *Ακολούθως να εξετασθεί αν η* f *είναι ισομορφισμός. Αν η* f *δεν είναι ισομορφισμός να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\operatorname{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\operatorname{Im}(f)$ *της* f.

Άσκηση 21. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *μια γραμμική απεικόνιση. Αν* $\mathbf{r}(f) = r$, *να δειχθεί ότι υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις* $f_i\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, *έτσι ώστε* $\mathbf{r}(f_i) = 1$, $1 \leq i \leq r$, *και:*
$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$$

Άσκηση 22. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ένας* $m \times n$ *πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Αν* $\mathbf{r}(A) = r$, *να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες* $A_1, A_2, \cdots, A_r \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:
$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r, \qquad \textit{όπου} \qquad \mathbf{r}(A_i) = 1, \;\; 1 \leq i \leq r$$

Άσκηση 23. *Έστω* $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου οι* $\mathbb{K}$*-διανυσματικοί χώροι* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *έχουν πεπερασμένη διάσταση, και* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Να δειχθούν τα εξής:*

(1)
$$\mathbf{r}(\lambda f) = \begin{cases} 0, & \textit{αν}\;\; \lambda = 0 \\ \mathbf{r}(f), & \textit{αν}\;\; \lambda \neq 0 \end{cases}$$

(2)
$$|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \;\leq\; \mathbf{r}(f+g) \;\leq\; \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$$

Άσκηση 24. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *και* $g\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *δύο γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι:*

(1) $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(g)$.

(2)
$$\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \big(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)\big)$$
Ιδιαίτερα: $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(f)$.

(3)
$$\mathbf{r}(g \circ f) \;\leq\; \min\big\{\mathbf{r}(f),\, \mathbf{r}(g)\big\}$$

(4) *Αν η* g *είναι μονομορφισμός, τότε:* $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g \circ f)$.

(5) *Αν η* f *είναι επιμορφισμός, τότε:* $\mathbf{r}(g) = \mathbf{r}(g \circ f)$.

Άσκηση 25. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου* $\mathcal{E}$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Υποθέτουμε ότι* $f^2 = 0$. *Να δειχθούν τα ακόλουθα:*

(1) $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.

(2) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \leq 2 \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f)$.

(3) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 2 \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f)$ *αν και μόνον αν* $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.

(4) *Αν η διάσταση του* $\mathcal{E}$ *είναι περιττός αριθμός, τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *έτσι ώστε* $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.

(5) *Δεν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας* $A \in \mathsf{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος* $(\Sigma)\,:\; AX = 0$ *να είναι το*
$$\Lambda(\Sigma) = \big\{AX \in \mathbb{K}_{2n+1} \mid X \in \mathbb{K}_{2n+1}\big\}$$

Άσκηση 26. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σωματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
(2) $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^2)$.
(3) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
(4) $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^2)$.
(5) $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
(6) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}$.

Αν ισχύει μια από τις παραπάνω ισοδύναμες συνθήκες, τότε:

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

Παρατήρηση. (1) *Τετριμμένο παράδειγμα απεικονίσεων οι οποίες ικανοποιούν τις ισοδύναμες συνθήκες της Άσκησης 26 είναι οι απεικονίσεις $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f^2 = f$. Αυτές οι απεικονίσεις καλούνται* **προβολές**. *Αν η απεικόνιση f είναι προβολή, τότε και η απεικόνιση $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f$ είναι προβολή, και ισχύει:*

$$\mathrm{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \mathrm{Im}(f) \quad \text{και} \quad \mathrm{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \mathrm{Ker}(f)$$

Αν $m \leq n$, τότε η απεικόνιση

$$f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

είναι προβολή. Τα παραπάνω να δειχθούν σαν Άσκηση.

(2) *Προσεκτική παρατήρηση της απόδειξης της παραπάνω Άσκησης δείχνει ότι αν εξαιρέσουμε τις συνθήκες (2) και (4), τότε το συμπέρασμα της Άσκησης 26 ισχύει και για διανυσματικούς χώρους άπειρης διάστασης.*

Άσκηση 27. *Έστω $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σωματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$f \circ g = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

Ισχύει το συμπέρασμα αν ο διανυσματικός χώρος έχει άπειρη διάσταση;

Το αποτέλεσμα της επόμενης άσκησης μας είναι γνωστό από τη θεωρία πινάκων και οριζουσών. Εδώ ζητείται να αποδειχθεί ο ισχυρισμός με χρήση γραμμικών απεικονίσεων.

Άσκηση 28. *Θεωρούμε δύο $n \times n$ πίνακες A και B με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί, με χρήση γραμμικών απεικονίσεων, ότι:*

$$A\,B = I_n \quad \Longrightarrow \quad B\,A = I_n$$

Άσκηση 29. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων πεπερασμενης διάστασης. Να δειχθούν τα εξής:*

(1) *Η f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$g \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

(2) *Η f είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $h\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$f \circ h = \mathsf{Id}_{\mathcal{F}}$$

Άσκηση 30. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *και θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f_A \colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_m, \quad f_A(X) = AX$$

Να δειχθεί ότι:

(1) $\mathbf{r}(A) = n$ *αν και μόνον αν η* f_A *είναι μονομορφισμός.*
(2) $\mathbf{r}(A) = m$ *αν και μόνον αν η* f_A *είναι επιμορφισμός.*
(3) $\mathbf{r}(A) = n$ *αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας* $B \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:* $BA = I_n$.
(4) $\mathbf{r}(A) = m$ *αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας* $C \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:* $AC = I_m$.

Άσκηση 31. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$.

(1) *Να δειχθεί ότι κάθε μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση* $f \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι μονομορφισμός.*
(2) *Να δειχθεί ότι κάθε μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ *είναι επιμορφισμός.*

Άσκηση 32. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης* n *υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $\phi \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ *μια μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση. Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση* $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ *του* $\mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$\forall \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \in \mathcal{E} : \quad \phi(\vec{x}) = x_1$$

Άσκηση 33. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $\varphi, \psi \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ *δύο γραμμικές απεικονίσεις. Αν* $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi)$, *να δειχθεί ότι υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{K}$ *έτσι ώστε:*

$$\varphi = \lambda\psi$$

Άσκηση 34. *Έστω* $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ *δύο μη μηδενικές γραμμικές απεικονίσεις, όπου* $\mathcal{E}$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Ορίζουμε μια νέα απεικόνιση ως εξής:*

$$h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}^2, \;\; \vec{x} \longmapsto h(\vec{x}) := \big(f(\vec{x}), g(\vec{x})\big)$$

Να δείξετε τα ακόλουθα:

(1) *Η απεικόνιση* h *είναι γραμμική.*
(2) $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.
(3) $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{K}^2$ *(δηλαδή η* h *είναι επιμορφισμός) αν και μόνον αν* $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathcal{E}$.
(4) *Η* h *είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν* $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

Άσκηση 35. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:* $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. *Αν*

$$\mathcal{E}_+ = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\big\} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_- = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\big\}$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{E}_+$ *και* $\mathcal{E}_-$ *είναι υπόχωροι του* $\mathcal{E}$ *και:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$$

Να δοθεί παράδειγμα τέτοιας γραμμικής απεικόνισης.

Άσκηση 36. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός* $\mathbb{K}$*-διανυσματικών χώρων*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{E})$$

Άσκηση 37. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων*

$$\mathcal{E} \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$$

Ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ καλείται ο **δυϊκός χώρος** του $\mathcal{E}$ και συμβολίζεται με:

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K}) \quad \text{ή} \quad \widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$$

τα δε στοιχεία του, δηλαδή οι γραμμικές απεικονίσεις $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ καλούνται **γραμμικές μορφές**.

Έτσι για κάθε $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ ορίζεται ο δυϊκός του $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}^*$. Ιδιαίτερα ορίζεται ο δυϊκός χώρος $\mathcal{E}^{**} = (\mathcal{E}^*)^*$ του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^*$, ο οποίος καλείται ο **διπλά δυϊκός χώρος** του $\mathcal{E}$. Η βάση

$$\mathcal{B}^* = \left\{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\right\}$$

του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\widehat{\mathcal{E}}$ που κατασκευάστηκε στην παραπάνω Άσκηση καλαίται η **δυϊκή βάση** της βάσης $\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right\}$ του $\mathcal{E}$.

Άσκηση 38. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση*

$$\Omega\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{**}, \quad \vec{x} \longrightarrow \Omega(\vec{x})\colon \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \Omega(\vec{x})(f) = f(\vec{x})$$

είναι ένας ισομορφισμός.