ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 8

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 9 Δεκεμβρίου 2022

Άσκηση 1. *Να εξετασθεί αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση:*

(1) $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$\operatorname{Ker}(f) = \big\langle (1,0,0,0),\ (1,1,0,0) \big\rangle = \operatorname{Im}(f)$$

(2) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$\operatorname{Ker}(f) = \big\langle (1,1,0),\ (1,1,1) \big\rangle \quad \textit{και} \quad \operatorname{Im}(f) = \big\langle (1,0,0,0),\ (2,0,1,0) \big\rangle$$

(3) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *έτσι ώστε:*

$$\operatorname{Im}(f) = \big\langle (1,-1,1) \big\rangle$$

και ο πίνακας της f ως προς κατάλληλες βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ του $\mathbb{R}^3$ να είναι ο

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \big(y+z,\ x+z,\ y+x\big)$$

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ της f, όπου*

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$$

είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(2) *Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f, όπου $\mathcal{C}$ είναι η ακόλουθη βάση του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1 = (1,1,1),\ \vec{\epsilon}_2 = (1,-1,0),\ \vec{\epsilon}_3 = (1,1,-2)\big\}$$

(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε*

$$P^{-1}AP = B$$

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

έτσι ώστε:

$$f(0,1,1) = (0,1,3), \qquad f(1,0,1) = (5,4,3), \qquad f(1,1,0) = (2,0,0)$$

Ακολούθως:

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας* $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ *της* f *ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$*, όπου*
$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$$
είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(2) *Να βρεθεί ο πίνακας* $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ *της* f *ως προς τη βάση* $\mathcal{C}$*, όπου* $\mathcal{C}$ *είναι η βάση του* $\mathbb{R}^3$*:*
$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1 = (1,1,1),\ \vec{\epsilon}_2 = (1,1,0),\ \vec{\epsilon}_3 = (1,0,0)\big\}$$

(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας* P *έτσι ώστε*
$$P^{-1}AP = B$$

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τα διανύσματα* $(1,2,0,-4)$ *και* $(2,0,-1,-3)$*. Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:* $\mathrm{Im}(f) = \big\langle (1,2,0,-4),\ (2,0,-1,-3)\big\rangle$*. Ακολούθως:*

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ *της* f *ως προς τις κανονικές βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$ *των* $\mathbb{R}^3$ *και* $\mathbb{R}^4$ *αντίστοιχα.*

(2) *Να βρεθούν βάσεις* $\mathcal{B}'$ *και* $\mathcal{C}'$ *των* $\mathbb{R}^3$ *και* $\mathbb{R}^4$ *αντίστοιχα έτσι ώστε ο πίνακας* $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$ *της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}'$ *και* $\mathcal{C}'$ *να είναι ο πίνακας:*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5. *Έστω* $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^4$ *και* $\mathfrak{B}'$ *η βάση*
$$\mathfrak{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4,\ \ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \ \vec{\varepsilon}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \ \vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\}$$
Έστω $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:*
$$f(\vec{\varepsilon}_1) = 3\vec{\varepsilon}_2, \quad f(\vec{\varepsilon}_2) = 7\vec{\varepsilon}_4, \quad f(\vec{\varepsilon}_3) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3, \quad f(\vec{\varepsilon}_4) = \vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_3$$
Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$.

Άσκηση 6. *Έστω* $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *δύο γραμμικές απεικονίσεις και έστω η βάση του* $\mathbb{R}^3$*:*
$$\mathfrak{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,1,1),\ \vec{e}_2 = (1,1,0),\ \vec{e}_3 = (1,0,0)\big\}$$
Αν
$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{και} \qquad M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
να βρεθούν οι γραμμικές απεικονίσεις $f + g$ *και* $-3f + 2g$ *και* $f \circ g$.

Άσκηση 7. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Αν* $\mathbf{r}(A) = 1$*, να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες* $B = \mathsf{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ *και* $C \in \mathsf{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:*
$$A = B \cdot C \qquad \textit{και} \qquad \mathbf{r}(A) = 1 = \mathbf{r}(C)$$

Άσκηση 8. *Έστω* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *μια γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$ *είναι ο ακόλουθος*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) *Να βρεθεί το διάνυσμα* $f(x,y,z)$*, για κάθε* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) *Να βρεθεί ο πίνακας* B *της* f *στη βάση* $\mathfrak{B} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,-2),\ \vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0),\ \vec{\varepsilon}_3 = (2,0,1)\}$.

(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας* P *έτσι ώστε* $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

(4) *Να υπολογισθεί ο πίνακας* A^n, $\forall n \geq 1$.

Άσκηση 9. *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = (2,0,0),\ \ \vec{e}_2 = (-3,-1,0),\ \ \vec{e}_3 = \left(0,2,\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{\epsilon}_1 = (1,0,0),\ \ \vec{\epsilon}_3 = (0,1,0),\ \ \vec{\epsilon}_3 = (1,0,1) \right\}$$

του $\mathbb{R}^3$ *είναι ο*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f)$ *της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{C}$ *και* $\mathcal{D}$*, όπου*

$$\mathcal{D} = \left\{ \vec{e}\,'_1 = (1,-1,0),\ \ \vec{e}\,'_2 = (1,0,1),\ \ \vec{e}\,'_3 = (0,1,-2) \right\}$$

Άσκηση 10. *Να βρεθεί η (μοναδική) γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

της οποίας ο πίνακας ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = (0,1,1),\ \vec{e}_2 = (1,0,1),\ \vec{e}_3 = (1,1,0) \right\}$$

και

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{\epsilon}_1 = (1,0),\ \vec{\epsilon}_2 = (0,1) \right\}$$

των $\mathbb{R}^3$ *και* $\mathbb{R}^2$ *αντίστοιχα, είναι ο*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως:

(1) *Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα* $\operatorname{Ker}(f)$ *της* f *η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση* $\mathcal{B}'$ *του* $\mathbb{R}^3$.
(2) *Να βρεθεί μια βάση της εικόνας* $\operatorname{Im}(f)$ *της* f *η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση* $\mathcal{C}'$ *του* $\mathbb{R}^2$.
(3) *Να βρεθεί ο πίνακας* B *της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}'$ *και* $\mathcal{C}'$.
(4) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος* 3×3 *πίνακας* Q *και αντιστρέψιμος* 2×2 *πίνακας* P *έτσι ώστε:*

$$Q^{-1}AP = B$$

Άσκηση 11. *Έστω* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *δύο διανυσματικοί χώροι διάστασης* 3 *υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{C} = \left\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3\right\}$ *μια βάση του* $\mathcal{F}$. *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$ *είναι ο*

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. *Να βρεθεί ο πίνακας* $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}(f)$ *της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}'$ *και* $\mathcal{C}$*, όπου*

$$\mathcal{B}' = \left\{ \vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \ \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_2 + (\lambda+1)\vec{e}_3,\ \ \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3 \right\}$$

Τέλος, αν $\lambda = \mu = 0$*, να βρεθεί μια βάση* $\mathcal{D}$ *του* $\mathcal{E}$ *και μια βάση* $\mathcal{D}'$ *του* $\mathcal{F}$ *έτσι ώστε*

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

όπου $r = \mathbf{r}(f)$.

Άσκηση 12. *Έστω η απεικόνιση* $f\,:\, \mathbb{R}_3[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t],\ \ f(P(t)) = P(t)' - P(t)''$.

(1) *Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.*
(2) *Να βρείτε μια βάση του* $\operatorname{Ker} f$ *και μια βάση της* $\operatorname{Im} f$.
(3) *Να βρεθεί ο πίνακας* $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(f)$, *όπου* $\mathfrak{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_3[t]$ *και* $\mathfrak{C} = \{1, t, t^2\}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_2[t]$.
(4) *Να βρεθεί ο πίνακας* $M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f)$ *όπου* $\mathfrak{B}' = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}_3[t]$ *και* $\mathfrak{C}' = \{1, 2t-1, -1-4t+3t^2\}$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}_2[t]$.
(5) *Να προσδιοριστούν αντιστρέψιμοι πίνακες* P, Q *έτσι ώστε:* $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Άσκηση 13. *Θεωρούμε τους πίνακες πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι. Αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, να βρεθούν αντιστρέψιμοι 3×3 πίνακες Q και P έτσι ώστε: $Q^{-1}AP = B$.

Άσκηση 14. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η βαθμίδα $\mathbf{r}(A) := r$ *του A και ακολούθως να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q έτσι ώστε*

$$Q^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

όπου I_r είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας.

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \;\; f(x,y,z,w) = \big(2x+y-2z+w,\ 4x+y-2z-3w,\ x-y+2z-3w,\ 2x+2y-4z-5w,\ 3x+y-2z+2w\big)$

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας* $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ *της f ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ των $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^5$ αντίστοιχα.*
(2) *Να βρεθεί μια βάση $\mathcal{B}'$ του $\mathbb{R}^4$ και μια βάση $\mathcal{C}'$ του $\mathbb{R}^5$ έτσι ώστε:*

$$B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } r = \mathbf{r}(f)$$

(3) *Να βρεθούν αντοστρέψιμος 5×5 πίνακας Q και ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P έυσοι ώστε:*

$$Q^{-1}AP = B$$