

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 13 Ιανουαρίου 2023

Άσκηση 1. Για κάθε $m \times n$ πίνακα A , η βαθμίδα στηλών του A είναι ίση με τη βαθμίδα γραμμών του A :

$$r(A) = \sigma(A) = \gamma(A)$$

Άσκηση 2. Έστω $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ και $h: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ τρεις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθούν τα εξής:

- (1) Αν η g είναι επιμορφισμός, τότε: $r(f \circ g) = r(f)$.
- (2) Αν η f είναι μονομορφισμός, τότε: $r(f \circ g) = r(g)$.
- (3) Αν η h είναι μονομορφισμός και η g είναι επιμορφισμός, τότε: $r(h \circ f \circ g) = r(f)$.

Άσκηση 3. Έστω A και B δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Με χρήση της Άσκησης 2 να δειχθεί ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν $r(A) = r(B)$.

Άσκηση 4. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας και $\text{adj}(A)$ ο συμπληρωματικός του A . Να δειχθούν τα εξής:

- (1) $\text{adj}(A) = O \iff r(A) < n - 1$.
- (2) $r(A) = n \implies r(\text{adj}(A)) = n$.
- (3) $r(A) < n - 1 \implies r(\text{adj}(A)) = 0$.
- (4) $r(A) = n - 1 \implies r(\text{adj}(A)) = 1$.

Άσκηση 5. Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις

$$\mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$$

μεταξύ \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Αν $f \circ g = 0$, να δειχθεί ότι ισχύουν τα εξής:

- (1) $\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$.
- (2) $r(f) + r(g) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$.
- (3) $r(f) + r(g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ αν και μόνον αν $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$.

Άσκηση 6. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, όπου $n \geq 2$, με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Να δειχθούν τα εξής:

- (1)
$$|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

(2)

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2}A$$

(3)

$$|\text{adj}(\text{adj}(A))| = |A|^{(n-1)^2}$$

Άσκηση 7. Να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8. Να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 10. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 11. Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & b+1 & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 12. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} \lambda x + (3\lambda + 4)y + 2(\lambda + 1)z = 0 \\ \lambda x + (4\lambda + 2)y + (\lambda + 4)z = 0 \\ 2x + (3\lambda + 4)y + 3\lambda z = 0 \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό, και ακολούθως να λυθεί.

Άσκηση 13. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -\lambda \end{cases}$$

Άσκηση 14. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha \\ x + \beta y + z = \beta \\ x + y + \gamma z = \gamma \end{cases}$$

Άσκηση 15. Να λυθεί το σύστημα ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$(\Sigma) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Άσκηση 16. Πότε το σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} x + 5y - 2z + 6w = \kappa \\ 4x - 3y + 7z + 12w = \lambda \\ 5x - 44y + 35z - 6w = \mu \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό; Αν το (Σ) είναι συμβιβαστό, ποιά είναι η γενική του λύση;

Άσκηση 17. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$$

Άσκηση 18. Αν $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \kappa \\ x + y + \lambda^2 z = \kappa^2 \end{cases}$$

Άσκηση 19. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + \lambda z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = \lambda \end{cases}$$

Άσκηση 20. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$