# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

## Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

**Παρασκευή 14 Οκτωβρίου 2022**

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας $A$ καλείται **διαγώνιος**, αν είναι τετραγωνικός και τα μόνα στοιχεία του τα οποία ενδεχομένως είναι μη-μηδενικά βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο. Ένας διαγώνιος πίνακας καλείται **βαθμωτός** αν τα διαγώνια στοιχεία του είναι όλα ίσα μεταξύ τους. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **συμμετρικός**, αν $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **αντισυμμετρικός**, αν $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **άνω τριγωνικός**, αντίστοιχα **αυστηρά άνω τριγωνικός**, αν $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$, αντίστοιχα $a_{ij} = 0$, $\forall i \geq j$. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **κάτω τριγωνικός**, αντίστοιχα **αυστηρά κάτω τριγωνικός**, αν $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$, αντίστοιχα $a_{ij} = 0$, $\forall i \leq j$. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A$ καλείται **ταυτοδύναμος**, αν $A^2 = A$. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A$ καλείται **μηδενοδύναμος**, αν υπάρχει μη-αρνητικός ακέραιος $k$ έτσι ώστε $A^k = O$.

**Άσκηση 1.** *Να δοθούν παραδείγματα: βαθμωτού, διαγώνιου, άνω τριγωνικού, κάτω τριγωνικού, συμμετρικού, αντισυμμετρικού, αντιστρέψιμου, ταυτοδύναμου, και μηδενοδύναμου* $4 \times 4$ *πίνακα.*

**Άσκηση 2.** *Για ποιές τιμές των* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ *είναι οι ακόλουθοι πίνακες* (**i**) *βαθμωτοί,* (**ii**) *διαγώνιοι,* (**iii**) *συμμετρικοί,* (**iv**) *αντισυμμετρικοί,* (**v**) *άνω τριγωνικοί,* (**vi**) *κάτω τριγωνικοί:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ -\gamma & -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Άσκηση 3.** *Να δειχθεί ότι για δύο* $m \times n$ *πίνακες* $A$ *και* $B$ *ισχύει:* $-(A + B) = (-A) + (-B)$.

**Άσκηση 4.** *Έστω* $n \in \mathbb{N}$ *με* $n \geq 2$.

(1) *Να δειχθεί ότι κάθε* $n \times n$ *πίνακας* $A$ *είναι ίσος με ένα άθροισμα πινάκων* $D + D'$*, όπου ο* $D$ *είναι άνω τριγωνικός και ο* $D'$ *κάτω τριγωνικός. Ακολούθως να εξεταστεί το κατά πόσο αυτή η παράσταση τού* $A$ *είναι μοναδική.*

(2) *Να δειχθεί ότι κάθε* $n \times n$ *πίνακας* $A$ *είναι ίσος με ένα άθροισμα πινάκων* $E + E'$*, όπου ο* $E$ *είναι αυστηρά άνω τριγωνικός και ο* $E'$ *είναι κάτω τριγωνικός. Ακολούθως να εξεταστεί το κατά πόσο αυτή η παράσταση τού* $A$ *είναι μοναδική.*

**Άσκηση 5.** *Να βρεθεί η $n$-οστή δύναμη του πίνακα*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Είναι οι πίνακες $T^n, \ \forall n \geq 1$, αντιστρέψιμοι;*

**Άσκηση 6.** *Να υπολογιστεί το γινόμενο πινάκων:*

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

*και κατόπιν να εκφραστούν ως γινόμενα πινάκων οι παρακάτω ισότητες:*

(1) $x^2 + 9xy + y^2 + 8x + 5y + 2 = 0$,
(2) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,
(3) $xy = \alpha^2$,
(4) $y^2 = 4\alpha x$.

**Άσκηση 7.** *Να βρεθούν όλοι οι πίνακες $X \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ για τους οποίους ισχύει ότι:*

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(4) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

**Άσκηση 8.** *Θεωρούμε τον πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, όπου $a_{ij} = \frac{1}{n}, \ \forall i, j = 1, \cdots, n$. Να δείξετε ότι $A^2 = A$. Είναι ο $A$ αντιστρέψιμος;*

**Άσκηση 9.** *Να βρεθούν οι πίνακες:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2,$$

*Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς, να δειχθεί ότι:*

($\alpha$) *οι πίνακες* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *και* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθεί ο αντίστροφός τους.*

($\beta$) *οι πίνακες* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *και* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *δεν είναι αντιστρέψιμοι.*

**Άσκηση 10.** *Αν* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *να δειχθεί ότι*

$$A^3 - 5A^2 - 4A + 30I_3 = 0$$

*Ακολούθως να δειχθεί ότι ο πίνακας* $A$ *είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο* $A^{-1}$.

**Άσκηση 11.** *Για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$ *και για κάθε* $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$, *θεωρούμε τους πίνακες:*

$$E_{ij} \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \qquad \text{όπου} \qquad (E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = i \;\&\; l = j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

*Με άλλα λόγια ο πίνακας* $E_{ij}$ *είναι ο* $m \times n$ *πίνακας ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με* $0$ *εκτός από το στοιχείο του στη θέση* $(i, j)$ *το οποίο είναι ίσο με* $1$. *Να δειχθεί ότι:*

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{kl} E_{il}, \qquad \text{όπου} \qquad \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \; k = l \\ 0, & \text{αν } \; k \neq l \end{cases} \qquad \text{είναι το δέλτα του } Kronecker$$

Ειδικές περιπτώσεις πινάκων $Eij$ αναφέρονται στις επόμενες δύο ασκήσεις.

**Άσκηση 12.** *Έστω* $A$ *ένας* $n \times n$ *πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Υποθέτουμε ότι:*

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n : \quad E_{i1} \cdot A = A \cdot E_{i1}$$

*Να δειχθεί ότι ο πίνακας* $A$ *είναι βαθμωτός, δηλαδή υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{K}$ *έτσι ώστε:* $A = \lambda I_n$.

**Άσκηση 13.** *Έστω* $A$ *ένας* $n \times n$ *πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Υποθέτουμε ότι:*

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n : \quad E_{ii} \cdot A = A \cdot E_{ii}$$

*Να δειχθεί ότι ο πίνακας* $A$ *είναι διαγώνιος, δηλαδή υπάρχουν* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *έτσι ώστε:*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 14.** *Έστω* $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *και* $m \geq 1$. *Αν* $AB = BA$, *να δειχθεί ότι:*

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

*όπου*

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)}$$

*είναι ο διωνυμικός συντελεστής. Να δοθεί παράδειγμα πινάκων για τους οποίους ο παραπάνω τύπος δεν ισχύει.*

Υπενθυμίζουμε ότι το **ίχνος** ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα $A = (a_{ij})$ είναι ο αριθμός

$$\mathsf{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

**Άσκηση 15.** *Έστω* $A, B$ *δύο* $n \times n$ *τετραγωνικοί πίνακες. Αν* $\lambda \in \mathbb{K}$, *να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{Tr}(A + B) = \mathsf{Tr}(A) + \mathsf{Tr}(B), \qquad \mathsf{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathsf{Tr}(A), \qquad \mathsf{Tr}(I_n) = n$$

**Άσκηση 16.** *Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν $n \times n$ πίνακες $A$ και $B$ έτσι ώστε:*

$$AB - BA = I_n$$

**Άσκηση 17.** *Έστω $A$ ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι:*

$$\forall X \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}): \quad \mathsf{Tr}(A \cdot X) = 0$$

*Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A$ είναι ο μηδενικός: $A = O$.*

**Άσκηση 18.** *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \cdot {}^tB \neq -1$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $I_n + {}^tB \cdot A$ είναι αντιστρέψιμος.*

**Άσκηση 19.** *Έστω ο πίνακας πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Να υπολογισθεί ο πίνακας $A^2$. Είναι ο $A$ αντιστρέψιμος;*

Υπενθυμίζουμε ότι ένας $n \times n$ πίνακας $A$ καλείται **μηδενοδύναμος** αν υπάρχει θετικός ακέραιος $k$ έτσι ώστε: $A^k = 0$. Για παράδειγμα ο $3 \times 3$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι μηδενοδύναμος. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι ένας (άνω ή κάτω) τριγωνικός $n \times n$ πίνακας καλείται *αυστηρά (άνω ή κάτω) τριγωνικός* αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι ίσα με μηδέν.

**Άσκηση 20.** *Να δειχθεί ότι ένας αυστηρά (άνω ή κάτω) τριγωνικός $n \times n$ πίνακας $A$, $n \geq 2$, είναι μηδενοδύναμος.*

**Άσκηση 21.** *Έστω $A$ ένας μηδενοδύναμος $2 \times 2$ πίνακας. Να δειχθεί ότι $\mathsf{Tr}(A) = 0$.*

**Άσκηση 22.** *Δίνονται οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*Να εξετασθεί αν υπάρχουν $3 \times 2$ πίνακες $X, Y$ έτσι ώστε*

$$-2X + 7Y = A \quad \text{και} \quad X - 3Y = B$$

**Άσκηση 23.** *Να δειχθεί ότι για τους πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*είναι $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, μολονότι $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.*

**Άσκηση 24.** *Να προσδιορισθούν όλοι οι $2 \times 2$ πίνακες $A$ με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ για τους οποίους ισχύει ότι*

(1) $A^2 = I_2$.
(2) $A^2 = O$.

**Άσκηση 25.** *Να βρεθεί η $m$-οστή δύναμη του $n \times n$ πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 26.** *Ας είναι $A$ ένας αυστηρά άνω τριγωνικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι $A^n = O$.*

**Άσκηση 27.** *Να εξεταστεί αν ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*είναι αντιστρέψιμος. Αν είναι αντιστρέψιμος, ποιός είναι ο αντίστροφός του;*

**Άσκηση 28.** *Να βρεθεί η $n$-οστή δύναμη του $k \times k$ πίνακα*

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

*Πότε ο πίνακας $J_k(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος; Αν είναι αντιστρέψιμος, ποιός είναι ο αντίστροφός του;*

**Άσκηση 29.** *Έστω ότι $A$ και $B$ είναι δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες.*

(1) $AB = BA$.
(2) $AB^{-1} = B^{-1}A$.
(3) $A^{-1}B = BA^{-1}$.
(4) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Υπενθυμίζουμε ότι ο **ανάστροφος** ενός $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ ορίζεται να είναι ο $n \times m$ πίνακας ${}^tA$, όπου
$$({}^tA)_{ij} = a_{ji}$$
δηλαδή οι γραμμές (στήλες) του ${}^tA$ είναι οι στήλες (γραμμές) του $A$.

**Άσκηση 30.** *Έστω $A$ και $B$ δύο $m \times n$ πίνακες. Να δειχθεί ότι:*
$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \qquad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$$
*Αν οι πίνακες είναι τετραγωνικοί, $n = m$, τότε να δειχθεί ότι:*
$${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$$
*Τέλος αν ο τετραγωνικός πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο πίνακας ${}^tA$ είναι αντιστρέψιμος και:*
$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται:

(1) **συμμετρικός**, αν: ${}^tA = A$,
(2) **αντισυμμετρικός**, αν: ${}^tA = -A$.

**Άσκηση 31.** (1) *Να δειχθεί ότι το γινόμενο δύο συμμετρικών $n \times n$ πινάκων είναι συμμετρικός πίνακας.*
(2) *Να δειχθεί ότι ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου συμμετρικού πίνακα είναι συμμετρικός πίνακας.*
(3) *Να δειχθεί ότι ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου αντισυμμετρικού πίνακα είναι αντισυμμετρικός πίνακας.*
(4) *Να δειχθεί ότι το γινόμενο δύο αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων $A$ και $B$ είναι συμμετρικός πίνακας αν και μόνον αν $AB = BA$.*
(5) *Να δειχθεί ότι το γινόμενο δύο αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων $A$ και $B$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας αν και μόνον αν $AB = -BA$.*

**Άσκηση 32.** *Να λυθεί η εξίσωση $n \times n$ πινάκων*
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 33.** *Να δειχθεί ότι, για κάθε $m \geq 1$, η $m$-οστή δύναμη ενός άνω τριγωνικού (αντίστοιχα αυστηρά άνω τριγωνικού) $n \times n$ πίνακα είναι επίσης άνω τριγωνικός (αντίστοιχα αυστηρά άνω τριγωνικός) $n \times n$ πίνακας.*

**Άσκηση 34.** *Να εξεταστεί αν ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου άνω τριγωνικού πίνακα $n \times n$ πίνακα είναι επίσης άνω τριγωνικός πίνακας.*

**Άσκηση 35.** *Να δειχθεί ότι $A$ είναι ένας μηδενοδύναμος $2 \times 2$ πίνακας, τότε $A^2 = O$.*

**Άσκηση 36.** *Να βρεθούν οι τιμές του $n$ για τις οποίες ισχύει ότι:*

(1) *Να βρεθούν οι τιμές του* $n$ *για τις οποίες ισχύει ότι: ένας πίνακας* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν* $\mathsf{Tr}(A) \neq 0$.

(2) *Αν* $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, *τότε να βρεθούν οι τιμές του* $\lambda \in \mathbb{K}$ *για τις οποίες ισχύει ότι:* $AB - BA = \lambda I_n$.