ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Τμημα $\mathbf{B'}$ (Μ-Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 28 Οκτωβρίου 2022

Άσκηση 1. *Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες έτσι ώστε $A^2 = I_n$, $B^3 = I_n$ και ο $A + B$ είναι αντιστρέψιμος. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A + B^2$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφος του.*

Άσκηση 2. *Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι $A^2 = A$ και $(A - {}^tA)^2 = 0$. Να δείξετε ότι*

$$(A \cdot {}^tA)^2 = A \cdot {}^tA$$

Άσκηση 3. *Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$-πίνακας. Αν $A^k = 0$ για κάποιο $k \geq 1$, να δείξετε ότι ο $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο $(I_n - A)^{-1}$.*

Άσκηση 4. *Αν A είναι ένας άνω τριγωνικός $n \times n$-πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ο A^{-1} είναι επίσης άνω τριγωνικός με μη-μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο.*

Άσκηση 5. *Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο A^{-1} με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών του A.*

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -8 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας PA να είναι ισχυρά γ-κλιμακωτός.

Άσκηση 7. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 & -3 \\ 6 & 10 & 7 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας PA να είναι ισχυρά γ-κλιμακωτός.

Άσκηση 8. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και ακολούθως να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} του A με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών του A.

Άσκηση 9. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφοι πίνακες των πινάκων*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών τους.

Άσκηση 10. *Με με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών του, να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 11. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Για ποιές τιμές του λ είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος; Για τις τιμές αυτές να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} του A με χρήση στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του.*
(2) *Για τις τιμές του A για τις οποίες ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, να βρεθούν αντιστρέψιμοι 3×3 πίνακες P και Q έτσι ώστε $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, όπου r είναι η βαθμίδα του A.*

Άσκηση 12. *Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα $(\lambda, \kappa \in \mathbb{K})$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \kappa \\ 1 & 1 & \lambda^2 & \kappa^2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 13. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή και η κανονική μορφή του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \kappa & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \kappa & 5 \\ 1 & \lambda & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ποιά είναι η βαθμίδα του πίνακα A;

Άσκηση 14. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή και η κανονική μορφή του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ποιά είναι η βαθμίδα του πίνακα A;

Άσκηση 15. *Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα ($\lambda \in \mathbb{K}$):*

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Άσκηση 16. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $r \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.*

(1) $\mathbf{r}(A) = r$.

(2)

$$A \sim_\gamma \left(\frac{B}{O}\right) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου B είναι ένας $r \times n$ πίνακας με βαθμίδα $\mathbf{r}(B) = r$.

(3)

$$A \sim_\sigma \left(\; C \mid O \; \right) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mr} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου C είναι ένας $m \times r$ πίνακας με βαθμίδα $\mathbf{r}(C) = r$.

(4)

$$A \sim \left(\begin{array}{c|c} D & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

όπου D είναι ένας $r \times r$ πίνακας με βαθμίδα $\mathbf{r}(A) = r$.

(5)

$$A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

Άσκηση 17. *Θεωρούμε έναν $m \times n$ πίνακα A και έναν $n \times k$ πίνακα B. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathbf{r}(AB) \;\leq\; \min\big\{\mathbf{r}(A), \mathbf{r}(B)\big\}$$

Άσκηση 18. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα $AX = O$ έχει μοναδική λύση αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 19. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Αν $m < n$, να δειχθεί ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα $AX = O$ έχει μη-μηδενικές λύσεις.*

Άσκηση 20. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{cases} x+y+2z-t=3 \\ 2x+y+3z+t=8 \\ x+4y+7z-2t=9 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}$$

Άσκηση 21. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$$

Άσκηση 22. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 3x & + & 4y & + & z & + & 2w & + & 3t & = & 0 \\ 5x & + & 7y & + & z & + & 3w & + & 4t & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 2z & + & w & + & 5t & = & 0 \\ 7x & + & 10y & + & z & + & 6w & + & 5t & = & 0 \end{array} \right.$$

Άσκηση 23. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 2x & - & y & + & z & - & 2w & + & 3t & = & 2 \\ 6x & - & 3y & + & 2z & + & 4w & + & 5t & = & 3 \\ 6x & - & 3y & + & 4z & + & 8w & + & 13t & = & 9 \\ 4x & - & 2y & + & z & + & w & + & 2t & = & 1 \end{array} \right.$$

Άσκηση 24. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 6x & + & 3y & + & 2z & + & 3w & + & 4t & = & 5 \\ 4x & + & 2y & + & z & + & 2w & + & 3t & = & 4 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & + & 2w & + & t & = & 0 \\ 2x & + & 1y & + & 7z & + & 3w & + & 2t & = & 1 \end{array} \right.$$

Άσκηση 25. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 8x & + & 6y & + & 5z & + & 2w & = & 21 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & + & w & = & 10 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & + & w & = & 8 \\ 3x & + & 5y & + & z & + & w & = & 15 \\ 7x & + & 4y & + & 5z & + & 2w & = & 18 \end{array} \right.$$

Άσκηση 26. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & + & z & + & 2w & = & 4 \\ 4x & + & 3y & + & z & + & w & = & 5 \\ 5x & + & 11y & + & 3z & + & 2w & = & 2 \\ 2x & + & 5y & + & z & + & w & = & 1 \\ x & - & 7y & - & z & + & 2w & = & 7 \end{array} \right.$$

Άσκηση 27. *Να λυθεί το σύστημα ($\lambda \in \mathbb{R}$)*

$$\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases}$$

Άσκηση 28. *Να λυθεί το σύστημα ($\lambda \in \mathbb{R}$)*

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + w = 1 \\ x + \lambda y + z + w = 1 \\ x + y + \lambda z + w = 1 \\ x + y + z + \lambda w = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 29. *Να λυθεί το σύστημα ($\lambda \in \mathbb{R}$)*

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + y + z = 1 \\ x + (1+\lambda)y + z = \lambda \\ x + y + (1+\lambda)z = \lambda^2 \end{cases}$$

Άσκηση 30. *Να λυθεί το σύστημα ($\lambda \in \mathbb{R}$)*

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + y + z = \lambda^2 + 3\lambda \\ x + (1+\lambda)y + z = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x + y + (1+\lambda)z = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{cases}$$

Άσκηση 31. *Να λυθεί το σύστημα ($\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$)*

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ \lambda x + y + z = \kappa \end{cases}$$

Άσκηση 32. *Να λυθεί το σύστημα ($\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$)*

$$\begin{cases} x - 2y + \lambda z = 3 \\ \kappa x + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 33. *Θεωρούμε τον 4×6 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -13 & 12 & -1 & -20 \\ 1 & -3 & 8 & -8 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

(1) *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A.*
(2) *Να βρεθεί η κανονική μορφή του πίνακα A.*
(3) *Να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος 6×6 πίνακας Q έτσι ώστε: ο πίνακας PAQ να είναι η κανονική μορφή του A.*
(4) *Να λυθεί το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -13 & 12 & -1 & -20 \\ 1 & -3 & 8 & -8 & 2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$