

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 4 Νοεμβρίου 2022

Άσκηση 1. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. Έστω $A = (a_{ij})$ ένας 2×2 πίνακας, και έστω ο πίνακας

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

όπου A_{ij} είναι ο συμπαραγόντας του στοιχείου a_{ij} . Να δειχθεί ότι:

$$|\text{adj}(A)| = |A| \quad \text{και} \quad \text{adj}(\text{adj}(A)) = A$$

Άσκηση 3. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4. Είναι γνωστό ότι οι αριθμοί

20604, 53227, 25755, 20927, 289

διαιρούνται από το 17. Να δειχθεί ότι η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

διαίρεται από το 17.

Άσκηση 5. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των ακόλουθων πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 6. Εάν $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 4$, να υπολογισθεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 4a_3 - 2a_2 \\ b_1 & b_2 & 4b_3 - 2b_2 \\ \frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_2 & 2c_3 - c_2 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 7. Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A ο οποίος είναι της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

όπου $B \in M_{r \times r}(\mathbb{K})$, $C \in M_{r \times (n-r)}(\mathbb{K})$, $O \in M_{(n-r) \times r}(\mathbb{K})$, $D \in M_{(n-r) \times (n-r)}(\mathbb{K})$.
Να δείξετε ότι:

$$|A| = |B| \cdot |D|$$

Άσκηση 8. Να ευρεθούν όλες οι ελάχιστες ορίζουσες δεύτερης τάξης και όλοι οι συμπαράγοντες του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9. Να βρεθεί ο ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

(Απάντηση: 1)

Άσκηση 10. Να βρεθεί ο ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = \max\{i, j\}$.

(Απάντηση: $(-1)^{n-1}n$)

Άσκηση 11. Να βρεθεί ο ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = |i - j|$.

(Απάντηση: $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$)

Άσκηση 12. Να ευρεθεί η ορίζουσα του προηγούμενου πίνακα ως ανάπτυγμα

- (1) κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής,
- (2) κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης,
- (3) κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής,
- (4) κατά τα στοιχεία της δεύτερης στήλης,
- (5) κατά τα στοιχεία της τρίτης γραμμής,
- (6) κατά τα στοιχεία της τρίτης στήλης.

Άσκηση 13. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιοριστούν οι αριθμοί Δ_{13} και A_{13} , Δ_{23} και A_{23} , Δ_{22} και A_{22} , και Δ_{21} και A_{21} .

Άσκηση 14. Να προσδιοριστεί η ορίζουσα των επόμενων πινάκων

(1) αναπτύσσοντας την ως προς τη στήλη ή τη γραμμή της επιλογής σας.

(2) με χρήση κατάλληλων πράξεων επί των γραμμών ή των στηλών.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & 7 \\ 2 & a-3 & 4 \\ 5 & a+1 & a \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 15. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός των μηδενικών στοιχείων που μπορεί να έχει ένας 4×4 πίνακας, χωρίς όμως η ορίζουσά του να είναι ίση με μηδέν;

Άσκηση 16. Να λύσει η εξίσωση, ως προς x :

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 17. Θεωρούμε δύο 2×2 πίνακες A και B με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 7 & x+3 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο αριθμός x .

Άσκηση 18. Να δείξετε ότι για τον $n \times n$ πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ισχύει:

$$|A| = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Άσκηση 19. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 20. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ \beta & \alpha + \beta & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha + \beta & \cdots & \beta & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha + \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Άσκηση 21. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Άσκηση 22. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Απάντηση: } |A| = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}.$$

Άσκηση 23. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Απάντηση: } |A| = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \\ 1, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}.$$

Άσκηση 24. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 25. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 26. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 27. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 28. Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{pmatrix}$$

Απάντηση: $a^n + b^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1}$.

Άσκηση 29. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Απάντηση: $5 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1}$.

Άσκηση 30. Αν $a_i, 0 \leq i \leq n$, είναι μη-μηδενικοί αριθμοί, να βρεθεί η ορίζουσα του $(n+1) \times (n+1)$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Απάντηση: $a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \cdots - \frac{1}{a_n} \right)$.

Άσκηση 31. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & 1 + x_1 y_3 & \cdots & 1 + x_1 y_{n-1} & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & 1 + x_2 y_3 & \cdots & 1 + x_2 y_{n-1} & 1 + x_2 y_n \\ 1 + x_3 y_1 & 1 + x_3 y_2 & 1 + x_3 y_3 & \cdots & 1 + x_3 y_{n-1} & 1 + x_3 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 + x_{n-1} y_1 & 1 + x_{n-1} y_2 & 1 + x_{n-1} y_3 & \cdots & 1 + x_{n-1} y_{n-1} & 1 + x_{n-1} y_n \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & 1 + x_n y_3 & \cdots & 1 + x_n y_{n-1} & 1 + x_n y_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 32. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 33. Έστω ότι x, y, a είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ y & a & x & \cdots & x & x \\ y & y & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & a & x \\ y & y & y & \cdots & y & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 34. Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \cdots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \cdots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^2 & x^3 & x^4 & \cdots & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 35. Έστω ότι x, y, a είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ y & a & x & \cdots & x & x \\ y & y & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & a & x \\ y & y & y & \cdots & y & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 36. Έστω ότι $x, y, a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n-1 & x \\ x & x & x & \cdots & x & x+n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 37. Ναδειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_{12} & 0 & \cdots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \cdots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \cdots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \cdots & 0 & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \cdots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Άσκηση 38. Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A , όπου, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$a_{ij} = (i, j) : \text{ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των θετικών ακεραίων } i \text{ και } j$$

Ναδειχθεί ότι:

$$|A| = \varphi(1) \varphi(2) \cdots \varphi(n)$$

όπου φ είναι η συνάρτηση του Euler.