

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 11 Νοεμβρίου 2022

Άσκηση 1. Έστω ότι \mathbb{K} είναι ένα σώμα και $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι μια τριάδα αποτελούμενη από ένα σύνολο \mathcal{E} , μια εσωτερική πράξη «πρόσθεσης» $+$: $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, και μια εξωτερική πράξη «βαθμωτού πολλαπλασιασμού» \cdot : $\mathbb{K} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα (1), (5), (6), (7), (8), στον ορισμό διανυσματικού χώρου και επιπρόσθετα τα αξιώματα:

$$(3)' \exists \vec{0} \in \mathcal{E}, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}: \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}.$$

$$(4)' \forall \vec{x} \in \mathcal{E}, \exists \vec{x}' \in \mathcal{E}: \vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}.$$

Να δείχθεί ότι ικανοποιούνται και τα αξιώματα (2), (3) και (4) και η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} .

Άσκηση 2. Στο σύνολο \mathbb{R}^2 ορίζουμε πράξεις

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda \odot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Ποια αξιώματα διανυσματικού χώρου ισχύουν για την τριάδα $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ και ποια όχι;

Άσκηση 3. Να δείξετε ότι με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού πινάκων το σύνολο

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{R} .

Άσκηση 4. Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^n είναι υπόχωροι:

$$(1) \mathcal{V}_1 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n \}$$

$$(2) \mathcal{V}_2 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq n \}$$

$$(3) \mathcal{V}_3 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \}$$

$$(4) \mathcal{V}_4 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \}$$

$$(5) \mathcal{V}_5 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n \}$$

$$(6) \mathcal{V}_6 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{2k} = 0, 1 \leq 2k \leq n \}$$

$$(7) \mathcal{V}_6 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{2k} = x_{2l}, 1 \leq 2k, 2l \leq n \}$$

$$(8) \mathcal{V}_6 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{2k+1} = 0, 1 \leq 2k+1 \leq n \}$$

$$(9) \mathcal{V}_6 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{2k+1} = x_{2l+1}, 1 \leq 2k+1, 2l+1 \leq n \}$$

Άσκηση 5. Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του διανυσματικού χώρου \mathcal{E} είναι υπόχωροι :

- (1) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και $\mathcal{V}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$
- (2) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και $\mathcal{V}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y = 2x + 1\}$
- (3) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και $\mathcal{V}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y = 2x\}$
- (4) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και $\mathcal{V}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, x \in \mathbb{R}\}$
- (5) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{V}_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}, z = 1\}$
- (6) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{V}_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \in \mathbb{R}\}$
- (7) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{V}_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y, x, y \in \mathbb{R}\}$
- (8) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{V}_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- (9) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ και $\mathcal{V}_9 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 x_3 = x_2 x_4, x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 4\}$
- (10) $\mathcal{E} = M_n(\mathbb{R})$ και $\mathcal{V}_{10} = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid a_{11} = 0\}$

Άσκηση 6. Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα \mathcal{V} είναι υπόχωροι των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων \mathcal{E} :

- (1) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n\}$.
- (2) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq n\}$.
- (3) $\mathcal{E} = \mathbb{R}_n$ και $\mathcal{V} = \{X \in \mathbb{R}_n \mid AX = B\}$, όπου $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $B \in \mathbb{R}_m$ είναι δοσμένοι πίνακες.
- (4) $\mathcal{E} = A(\mathbb{R})$ και $\mathcal{V} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A(\mathbb{R}) \mid \text{η ακολουθία } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ είναι φραγμένη}\}$.
- (5) $\mathcal{E} = A(\mathbb{R})$ και $\mathcal{V} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A(\mathbb{R}) \mid \text{η ακολουθία } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ είναι συγκλίνουσα}\}$.
- (6) $\mathcal{E} = A(\mathbb{R})$ και $\mathcal{V} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A(\mathbb{R}) \mid \text{η ακολουθία } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ συγκλίνει στο } a \in \mathbb{R}\}$, όπου a είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.
- (7) $\mathcal{E} = A(\mathbb{R})$ και $\mathcal{V} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A(\mathbb{R}) \mid \text{η ακολουθία } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ είναι μηδενική}\}$.
- (8) $\mathcal{E} = \mathbb{K}[t]$ και $\mathcal{V} = \{P(t) \in \mathbb{K}[t] \mid \text{ο βαθμός του } P(t) \text{ είναι άρτιος}\}$.
- (9) $\mathcal{E} = \mathbb{K}[t]$ και $\mathcal{V} = \{P(t) \in \mathbb{K}[t] \mid \text{το πολυώνυμο } P(t) \text{ δεν περιέχει άρτιες δυνάμεις του } t\}$.

Άσκηση 7. Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα \mathcal{V} διανυσματικού χώρου $M_n(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , είναι υπόχωροι του $M_n(\mathbb{K})$.

- (1) $\mathcal{V} = M_n(\mathbb{K})$.
- (2) $\mathcal{V} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^t A = A\}$.
- (3) $\mathcal{V} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^t A = -A\}$.
- (4) $\mathcal{V} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid |A| \neq 0\}$.
- (5) $\mathcal{V} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid |A| = 0\}$.
- (6) $\mathcal{V} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(A) = 0\}$.
- (7) $\mathcal{V} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid AX = XA, \forall X \in \mathcal{X}\}$, όπου $\mathcal{X} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ είναι ένα σταθερό σύνολο $n \times n$ πινάκων.
- (8) $\mathcal{V} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid AX + XA = O, \forall X \in \mathcal{X}\}$, όπου $\mathcal{X} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ είναι ένα σταθερό σύνολο $n \times n$ πινάκων.

Άσκηση 8. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $A(\mathbb{R})$ των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα $\mathcal{V} \subseteq A(\mathbb{R})$ είναι υπόχωροι:

- (1) \mathcal{V} είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών των οποίων όλοι οι όροι είναι μηδέν εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών.
- (2) \mathcal{V} είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών των οποίων όλοι οι όροι είναι μη-μηδενικοί εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών.
- (3) \mathcal{V} είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών των οποίων όλοι οι όροι είναι διάφοροι του 1.

Άσκηση 9. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $A(\mathbb{R})$ των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα $\mathcal{V} \subseteq A(\mathbb{R})$ είναι υπόχωροι:

- (1) \mathcal{V} είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών Cauchy.
- (2) $\mathcal{V} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A(\mathbb{R}) \mid \exists k, C \in \mathbb{N} : |x_n| \leq Cn^k\}$, όπου οι φυσικοί αριθμοί C και k εξαρτώνται από την ακολουθία.
- (3) $\mathcal{V} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A(\mathbb{R}) \mid \exists C \in \mathbb{R}^+ : |x_n| \leq Ce^n\}$, όπου ο θετικός πραγματικός αριθμός C εξαρτάται από την ακολουθία.

Άσκηση 10. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_n[t]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές με βαθμό το πολύ n . Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}_n[t]$ είναι υπόχωροι:

- (1) $\mathcal{V} = \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid P(\rho) = 0\}$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$ είναι ένα σταθερός πραγματικός αριθμός.
- (2) $\mathcal{V} = \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid P(\rho_1) = P(\rho_2) = \dots = P(\rho_k) = 0\}$, όπου $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k \in \mathbb{R}$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.
- (3) $\mathcal{V} = \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid P(\rho) = 0\}$, όπου $\rho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ είναι ένας σταθερός καθαρά μιγαδικός αριθμός.
- (4) $\mathcal{V} = \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid \text{ο αριθμός } \rho \text{ είναι απλή ρίζα του } P(t)\}$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$ είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 11. Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Θεωρούμε τον \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο¹ $\mathcal{F}(S, \mathcal{E})$ όλων των συναρτήσεων $f: S \rightarrow \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι το υποσύνολο

$$\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{F}(S, \mathcal{E}) \mid f(s) = \vec{0}, \text{ για κάθε στοιχείο } s \in S \text{ εκτός από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του } S\}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(S, \mathcal{E})$.

Αν $S = \mathbb{N}$ και $\mathcal{E} = \mathbb{K}$, τότε ποιάς \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος είναι ο \mathcal{V} ;

Άσκηση 12. Έστω $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο και \mathbb{K} ένα σώμα. Θεωρούμε τον \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(S, \mathbb{K})$.

Για κάθε $a \in S$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_a: S \rightarrow \mathbb{K}, \quad f_a(s) = \begin{cases} 1, & \text{αν } s = a \\ 0, & \text{αν } s \neq a \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{K})$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\{f_a\}_{a \in S}$. Δηλαδή, για κάθε $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{K})$, υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$, έτσι ώστε:

$$f = \lambda_1 f_{s_1} + \lambda_2 f_{s_2} + \dots + \lambda_n f_{s_n}$$

Άσκηση 13. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ όλων των συναρτήσεων $f: S \rightarrow \mathbb{R}$. Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ είναι υπόχωροι:

- (1) $\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \mid \exists s \in S : P(s) = a\}$, όπου $s \in S$ είναι ένα στοιχείο του συνόλου S .
- (2) $\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \mid \exists s \in S : P(s) = 0\}$.
- (3) $\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \mid P(s) = a, \forall s \in T\}$, όπου $T \subseteq S$ είναι ένα σταθερό υποσύνολο του συνόλου S .
- (4) Αν $S = \mathbb{R}$:
 - (α) $\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f : \text{είναι συνεχής}\}$.
 - (β) $\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f : \text{είναι φραγμένη}\}$.
 - (γ) $\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f : \text{είναι μονότονη}\}$.
 - (δ)

$$\mathcal{V} = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \right\}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

¹Κάποιες φορές ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(S, \mathcal{E})$ συμβολίζεται και με $\text{Map}(S, \mathcal{E})$.

Άσκηση 14. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, και το υποσύνολό του:

$$\mathcal{Z} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \text{υπάρχει } \kappa(f) \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq \kappa(f) |x|, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Να εξετασθεί αν το υποσύνολο \mathcal{Z} είναι υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Άσκηση 15. Να εξετασθεί αν το υποσύνολο

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \mid a = -2c, f = 2e + d \right\}$$

είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ πάνω από το \mathbb{R} .

Άσκηση 16. Έστω $AT_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων, και $KT_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των κάτω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων.

- (1) Είναι το υποσύνολο $AT_n(\mathbb{R})$ υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $M_n(\mathbb{R})$;
- (2) Είναι το υποσύνολο $KT_n(\mathbb{R})$ υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $M_n(\mathbb{R})$;
- (3) Αν η απάντηση στα ερωτήματα (1) και (2) είναι θετική, να βρεθεί η τομή $AT_n(\mathbb{R}) \cap KT_n(\mathbb{R})$ και το άθροισμα $AT_n(\mathbb{R}) + KT_n(\mathbb{R})$ των υπόχωρων $AT_n(\mathbb{R}), KT_n(\mathbb{R})$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν \mathcal{U} και \mathcal{V} είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , όπου \mathbb{K} είναι ένα σώμα, τότε το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ καλείται **ευθύ** αν $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$, και τότε το άθροισμα υπόχωρων συμβολίζεται με $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, τότε κάθε διάνυσμα \vec{x} του \mathcal{E} γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$$\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \text{όπου } \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V}$$

Το διάνυσμα \vec{u} καλείται η **προβολή του διανύσματος \vec{x} στον υπόχωρο \mathcal{U}** και το διάνυσμα \vec{v} καλείται η **προβολή του διανύσματος \vec{x} στον υπόχωρο \mathcal{V}** .

Άσκηση 17. Έστω $M_n(\mathbb{K})$ ο \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Έστω $S_n(\mathbb{K})$ ο υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους συμμετρικούς πίνακες, και $AT_n(\mathbb{K})$ ο υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους άνω τριγωνικούς πίνακες.

- (1) Ναδειχθεί ότι:

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus AT_n(\mathbb{K})$$

- (2) Να βρεθεί η προβολή του τυχόντος $A \in M_n(\mathbb{K})$ στον υπόχωρο $S_n(\mathbb{K})$ και $AT_n(\mathbb{K})$.

Άσκηση 18. Έστω $M_n(\mathbb{K})$ ο \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Έστω $A_n(\mathbb{K})$ ο υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους αντισυμμετρικούς πίνακες, και $AT_n(\mathbb{K})$ ο υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους άνω τριγωνικούς πίνακες.

- (1) Ναδειχθεί ότι:

$$M_n(\mathbb{K}) = A_n(\mathbb{K}) \oplus AT_n(\mathbb{K})$$

- (2) Να βρεθεί η προβολή του τυχόντος πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ στον υπόχωρο $A_n(\mathbb{K})$ και $AT_n(\mathbb{K})$.

Άσκηση 19. Έστω \mathcal{V} το υποσύνολο του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $M_n(\mathbb{R})$ το οποίο αποτελείται από όλους τους πίνακες της ακόλουθης μορφής:

$$A(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b & b & \cdots & b & b & b \\ b & a & b & b & \cdots & b & b & b \\ b & b & a & b & \cdots & b & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \cdots & b & b & b \\ b & b & b & b & \cdots & a & b & b \\ b & b & b & b & \cdots & b & a & b \\ b & b & b & b & \cdots & b & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Να εξετασθεί αν το υποσύνολο \mathcal{V} είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{R})$.

Άσκηση 20. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και X, Y δύο υποσύνολα διανυσμάτων του \mathcal{E} .

- (1) Ναδειχθεί ότι $X = \langle X \rangle$ αν και μόνον αν το υποσύνολο X είναι υπόχωρος του \mathcal{E} .
- (2) Ναδειχθεί ότι αν $X \subseteq Y$, τότε $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$. Ισχύει το αντίστροφο;

Άσκηση 21. Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χλῶρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω \mathcal{U}, \mathcal{V} , και \mathcal{W} τρεις υπόχωροι του \mathcal{E} τέτοιοι ώστε:

- (1) $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.
- (2) $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$.
- (3) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$.

Ναδειχθεί ότι $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.

Άσκηση 22. Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χλῶρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω \mathcal{U}, \mathcal{V} δύο υπόχωροι του \mathcal{E} τέτοιοι ώστε: $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Ναδειχθεί ότι, για κάθε υπόχωρο \mathcal{W} του \mathcal{E} τέτοιον ώστε $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$, ισχύει ότι:

$$\mathcal{W} = (\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \oplus (\mathcal{W} \cap \mathcal{V})$$

Άσκηση 23. Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χλῶρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{X}$, και \mathcal{Y} είναι υπόχωροι του \mathcal{E} τέτοιοι ώστε: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Ναδειχθεί ότι:

$$(\mathcal{U} + (\mathcal{V} \cap \mathcal{X})) \cap (\mathcal{U} + (\mathcal{V} \cap \mathcal{Y})) = \mathcal{U}$$

Άσκηση 24. (1) Στον \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_2[x]$ των πολυωνύμων υπεράνω του \mathbb{K} με βαθμό ≤ 2 , να προσδιοριστεί ο υπόχωρος

$$\langle 1 + x, 1 + 2x, 1 + x^2, 1 + 2x^2 \rangle$$

(2) Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Να βρεθούν κατάλληλα διανύσματα X_1, X_2, \dots, X_n του διανυσματικού χώρου $\Lambda(\Sigma)$ των λύσεων του (Σ) έτσι ώστε:

$$\Lambda(\Sigma) = \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$$

Άσκηση 25. (1) Στον διανυσματικό χώρο \mathbb{K}^4 υπεράνω του \mathbb{K} , να εξετασθεί αν το διάνυσμα $\vec{x} = (1, -1, 0, 3)$ περιέχεται στον υπόχωρο του \mathbb{K}^4 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{y} = (1, 0, 1, 7)$ και $\vec{z} = (-1, 1, 0, -3)$.

(2) Να προσδιορισθεί ο υπόχωρος του \mathbb{K}^3 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x} = (1, 0, -1)$ και $\vec{y} = (-1, 1, 1)$. Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού a ισχύει ότι:

$$\langle (1, 0, -1), (-1, 1, 1), (a, -1, 1) \rangle = \mathbb{K}^3;$$

Άσκηση 26. Στον διανυσματικό χώρο \mathbb{K}^3 θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα:

$$\mathcal{V} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{K}^3 \mid y = -2x\}, \quad \mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x + y, 3x, x) \in \mathbb{K}^3 \mid x, y \in \mathbb{K}\}$$

(1) Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα \mathcal{V} , \mathcal{W} , και \mathcal{U} είναι υπόχωροι του \mathbb{K}^3 .

(2) Να προσδιορισθούν οι υπόχωροι $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$, και $\mathcal{W} \cap \mathcal{U}$.

(3) Να προσδιορισθούν οι υπόχωροι $\mathcal{V} + \mathcal{W}$, $\mathcal{V} + \mathcal{U}$, και $\mathcal{W} + \mathcal{U}$.

(4) Να εξετασθεί αν ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathbb{K}^3, \quad \mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathbb{K}^3, \quad \mathcal{W} + \mathcal{U} = \mathbb{K}^3$$

Άσκηση 27. Στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^4 θεωρούμε τον υπόχωρο

$$\mathcal{U} = \langle (1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1) \rangle$$

ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $(1, 1, 1, 1)$ και $(-1, -2, 0, 1)$, και τον υπόχωρο

$$\mathcal{V} = \langle (-1, -1, 1, -11), (2, 2, 0, 1) \rangle$$

ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $(-1, -1, 1, -1)$ και $(2, 2, 0, 1)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

και να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $(4, 2, 4, 4)$ στον υπόχωρο \mathcal{U} .

Ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} καλείται **μαγικός** αν, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \sum_{k=1}^n a_{k, n-k+1},$$

δηλαδή αν το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής, κάθε στήλης και το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου και της δευτερεύουσας διαγωνίων του είναι είναι ίδιο. Ο σταθερός αυτός αριθμός καλείται ο **μαγικός αριθμός** του A . Για παράδειγμα ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

είναι μαγικός: το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής, κάθε στήλης και το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του είναι ίσο με τον μαγικό αριθμό 15.

Άσκηση 28. (1) Να δειχθεί ότι το σύνολο $MS_n(\mathbb{K})$ των μαγικών $n \times n$ πινάκων υπεράνω του \mathbb{K} είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $M_n(\mathbb{K})$.

(2) Να δειχθεί ότι το σύνολο ${}_0MS_n(\mathbb{K})$ των μαγικών $n \times n$ πινάκων υπεράνω του \mathbb{K} με μαγικό αριθμό ίσο με 0, είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $M_n(\mathbb{K})$.

(3) Να δειχθεί ότι το σύνολο ${}_kMS_n(\mathbb{K})$ των μαγικών $n \times n$ πινάκων υπεράνω του \mathbb{K} με μαγικό αριθμό ίσο με $k \neq 0$, δεν είναι υπόχωρος του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $M_n(\mathbb{K})$.

Άσκηση 29. Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

Ναδειχθεί ότι το υποσύνολο \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{R}^n και να βρεθεί ένα σύνολο διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ του \mathbb{R}^n , για κατάλληλο θετικό ακέραιο m , έτσι ώστε:

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \rangle$$

Άσκηση 30. Έστω ότι $\mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ είναι υπόχωροι του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} . Να εξετασθεί ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιές δεν είναι αληθείς:

- (1) $\mathcal{V}_1 + (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) = (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) + \mathcal{V}_3$.
- (2) $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_1$.
- (3) Υπάρχει υπόχωρος \mathcal{W} του \mathcal{E} έτσι ώστε, για κάθε υπόχωρο \mathcal{V} του \mathcal{E} : $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{V}$. Είναι ο υπόχωρος \mathcal{W} μοναδικός;
- (4) Αν η απάντηση στο (3) είναι καταφατική, τότε είναι αληθές ότι για κάθε υπόχωρο \mathcal{V} του \mathcal{E} , υπάρχει υπόχωρος \mathcal{V}' του \mathcal{E} έτσι ώστε $\mathcal{V} + \mathcal{V}' = \mathcal{W} = \mathcal{V}' + \mathcal{V}$;
- (5) $\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3) = (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_3$.
- (6) $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_1$.
- (7) Υπάρχει υπόχωρος \mathcal{Z} του \mathcal{E} έτσι ώστε, για κάθε υπόχωρο \mathcal{V} του \mathcal{E} : $\mathcal{V} \cap \mathcal{Z} = \mathcal{V} = \mathcal{Z} \cap \mathcal{V}$. Είναι ο υπόχωρος \mathcal{Z} μοναδικός;
- (8) Αν η απάντηση στο (7) είναι καταφατική, τότε είναι αληθές ότι για κάθε υπόχωρο \mathcal{V} του \mathcal{E} , υπάρχει υπόχωρος \mathcal{V}' του \mathcal{E} έτσι ώστε $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \mathcal{Z} = \mathcal{V}' \cap \mathcal{V}$;

Άσκηση 31. Έστω $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων ορισμένων επί του κλειστού διαστήματος $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ με τιμές πραγματικούς αριθμούς, και έστω το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$:

$$\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f: \text{συνεχής}\}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.
- (2) Να εξετασθεί ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ είναι υπόχωρος:
 - (α) $\mathcal{V}_1 = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(\frac{1}{n}) = 0, n \in \mathbb{N}\}$
 - (β) $\mathcal{V}_2 = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f'(x) = 0, \forall x \in [0, 1]\}$.
 - (γ) $\mathcal{V}_3 = \left\{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\right\}$.
 - (δ) $\mathcal{V}_4 = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0, \forall x \in [0, 1]\}$, όπου a, b, c είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Άσκηση 32. Έστω το κλειστό διάστημα $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ και θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{E} = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid f: \text{συνάρτηση}\}$$

όπου $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Ορίζουμε πράξεις επί του \mathcal{E} ως εξής:

$$\oplus: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad f \oplus g = f \cdot g, \quad \text{όπου } (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad r \odot f = f^r, \quad \text{όπου } f^r(x) = f(x)^r$$

Ναδειχθεί ότι η τριάδα $(\mathcal{E}, \oplus, \odot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R} .

Άσκηση 33. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_n[x]$ των πολυωνύμων υπεράνω του \mathbb{K} με βαθμό $\leq n$. Έστω \mathcal{V} ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}_n[x]$ και υποθέτουμε ότι ο \mathcal{V} περιέχει ένα πολυώνυμο βαθμού k για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots, m$, και δεν περιέχει πολυώνυμο βαθμού $> m$. Ναδειχθεί ότι $\mathcal{V} = \mathbb{K}_m[x]$.

Άσκηση 34. Έστω ότι η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R} και θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} = \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}\}$$

(1) Στο σύνολο $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ ορίζουμε πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\oplus : (\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \times (\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad (\vec{x}_1, \vec{y}_1) \oplus (\vec{x}_2, \vec{y}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2)$$

$$\odot : \mathbb{R} \times (\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad r \odot (\vec{x}, \vec{y}) = (r \cdot \vec{x}, r \cdot \vec{y})$$

Ναδειχθεί ότι η τριάδα $(\mathcal{E} \times \mathcal{E}, \oplus, \odot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R} .

(2) Στο σύνολο $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ ορίζουμε πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\oplus : (\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \times (\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad (\vec{x}_1, \vec{y}_1) \oplus (\vec{x}_2, \vec{y}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2)$$

$$\otimes : \mathbb{C} \times (\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad (a + bi) \otimes (\vec{x}, \vec{y}) = (a \cdot \vec{x} - b \cdot \vec{y}, a \cdot \vec{y} + b \cdot \vec{x})$$

Ναδειχθεί ότι η τριάδα $(\mathcal{E} \times \mathcal{E}, \oplus, \otimes)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{C} .

Άσκηση 35. Έστω X ένα μη-κενό σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X . Έστω \mathbb{Z}_2 το σώμα των κλάσεων υπολοίπων mod 2. Ορίζουμε πράξεις

$$\Delta : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad (A, B) \longmapsto A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

$$\odot : \mathbb{Z}_2 \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad \begin{cases} [0]_2 \odot A = \emptyset \\ [1]_2 \odot A = A \end{cases}$$

Ναδειχθεί ότι η τριάδα $(\mathcal{P}(X), \Delta, \odot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{Z}_2 .

Άσκηση 36. Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , και έστω $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ τρεις υπόχωροι του \mathcal{E} . Ναδειχθεί ότι:

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \subseteq (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap (\mathcal{V} + \mathcal{W}) \cap (\mathcal{W} + \mathcal{U})$$

Άσκηση 37. Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} το οποίο έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, π.χ. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι του \mathcal{E} . Αν

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \dots \cup \mathcal{V}_n$$

ναδειχθεί ότι υπάρχει $k = 1, 2, \dots, n$ έτσι ώστε: $\mathcal{V}_k = \mathcal{E}$.

Άσκηση 38. Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , και έστω \mathcal{R} μια σχέση ισοδυναμίας ορισμένη επί του συνόλου \mathcal{E} . Συμβολίζουμε με \mathcal{E}/\mathcal{R} το σύνολο πηλίκο του συνόλου \mathcal{E} ως προς τη σχέση ισοδυναμίας \mathcal{R} :

$$\mathcal{E}/\mathcal{R} = \{[\vec{x}]_{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{E} \mid \vec{x} \in \mathcal{E}\} \quad \text{όπου} \quad [\vec{x}]_{\mathcal{R}} = \{\vec{y} \in \mathcal{E} \mid \vec{x} \sim_{\mathcal{R}} \vec{y}\}$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισοδυναμίας \mathcal{R} είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του \mathcal{E} , δηλαδή, $\forall k \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \in \mathcal{E}$:

$$\vec{x} \sim_{\mathcal{R}} \vec{z} \quad \& \quad \vec{y} \sim_{\mathcal{R}} \vec{w} \quad \implies \quad \vec{x} + \vec{y} \sim_{\mathcal{R}} \vec{z} + \vec{w}$$

$$\vec{x} \sim_{\mathcal{R}} \vec{y} \quad \implies \quad k \cdot \vec{x} \sim_{\mathcal{R}} k \cdot \vec{y}$$

Ναδειχθεί ότι ορίζοντας

$$\oplus : \mathcal{E}/\mathcal{R} \times \mathcal{E}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{R}, \quad [\vec{x}]_{\mathcal{R}} \oplus [\vec{y}]_{\mathcal{R}} = [\vec{x} + \vec{y}]_{\mathcal{R}}$$

$$\odot : \mathbb{K} \times \mathcal{E}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{R}, \quad k \odot [\vec{x}]_{\mathcal{R}} = [k \cdot \vec{x}]_{\mathcal{R}}$$

αποκτούμε καλά ορισμένες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού επί του συνόλου πηλίκο \mathcal{E}/\mathcal{R} έτσι ώστε η τριάδα $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, \oplus, \odot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} ,

Άσκηση 39. Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , και έστω \mathcal{V} ένας υπόχωρος του \mathcal{E} . Ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}(\mathcal{V})$ επί του συνόλου \mathcal{E} ως εξής:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E} : \quad \vec{x} \sim_{\mathcal{R}(\mathcal{V})} \vec{y} \iff \vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$$

- (1) Να δειχθεί ότι η σχέση $\mathcal{R}(\mathcal{V})$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου \mathcal{E} και η κλάση ισοδυναμίας του τυχόντος διανύσματος $\vec{x} \in \mathcal{E}$ είναι το σύνολο

$$[\vec{x}]_{\mathcal{R}} = \vec{x} + \mathcal{V} = \{ \vec{x} + \vec{v} \in \mathcal{E} \mid \vec{v} \in \mathcal{V} \}$$

- (2) Να δειχθεί ότι η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}(\mathcal{V})$ είναι συμβατή με τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού του \mathcal{E} .

Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , και έστω \mathcal{V} ένας υπόχωρος του \mathcal{E} . Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}/\mathcal{R}(\mathcal{V})$ συμβολίζεται με

$$\mathcal{E}/\mathcal{V} = \mathcal{E}/\mathcal{R}(\mathcal{V}) = \{ \vec{x} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{E} \mid \vec{x} \in \mathcal{E} \}$$

όπου

$$\vec{x} + \mathcal{V} = \{ \vec{x} + \vec{v} \in \mathcal{E} \mid \vec{v} \in \mathcal{V} \} \quad \text{και} \quad \vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V} \iff \vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$$

και καλείται ο **διανυσματικός χώρος πηλίκο του \mathcal{E} ως προς τον \mathcal{V}** . Από την παραπάνω Άσκηση οι πράξεις με τους οποίες το σύνολο \mathcal{E}/\mathcal{V} είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} είναι οι εξής:

$$(\vec{x} + \mathcal{V}) \oplus (\vec{y} + \mathcal{V}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \mathcal{V} \quad \text{και} \quad k \odot (\vec{x} + \mathcal{V}) = k \cdot \vec{x} + \mathcal{V}$$

Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ του \mathcal{E}/\mathcal{V} είναι η κλάση ισοδυναμίας του μηδενικού διανύσματος $\vec{0}$ του \mathcal{E} , δηλαδή

$$\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}} = \vec{0} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$$

και το αντίθετο του διανύσματος $\vec{x} + \mathcal{V} \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι το διάνυσμα $(-\vec{x}) + \mathcal{V}$.

Άσκηση 40. Έστω $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Να περιγραφούν οι διανυσματικοί χώροι πηλίκου $\mathcal{E}/\{\vec{0}\}$ και \mathcal{E}/\mathcal{E} . Επιπλέον:

- (1) Αν $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και $\mathcal{V} = \{ k\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{R} \}$, όπου \vec{x} είναι ένα σταθερό διάνυσμα του \mathbb{R}^2 , να περιγραφεί ο χώρος πηλίκο \mathbb{R}^2/\mathcal{V} .
- (2) Αν $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{V} = \{ k\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \mathbb{R} \}$, όπου \vec{x} είναι ένα σταθερό διάνυσμα του \mathbb{R}^3 , να περιγραφεί ο χώρος πηλίκο \mathbb{R}^3/\mathcal{V} .
- (3) Αν $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{V} = \{ k\vec{x} + \lambda\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid k, \lambda \in \mathbb{R} \}$, όπου \vec{x}, \vec{y} είναι δύο σταθερά διανύσματα του \mathbb{R}^3 , να περιγραφεί ο χώρος πηλίκο \mathbb{R}^3/\mathcal{V} .