

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 18 Νοεμβρίου 2022

Άσκηση 1. Ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos 4x$$

θεωρούμενες ως διανύσματα του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Άσκηση 2. Για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις

$$\cos x + (2a - 1) \cos 4x, \quad (1 - a) \cos x + \cos 4x$$

θεωρούμενες ως διανύσματα του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, είναι γραμμικά εξαρτημένες;

Άσκηση 3. Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ οι συναρτήσεις

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ως στοιχεία του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Παρόμοια ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ως στοιχεία του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Να συμπεράνετε ότι η \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ έχει άπειρη διάσταση.

Άσκηση 4. Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, όπου οι αριθμοί είναι ανά δύο διαφορετικοί, οι συναρτήσεις

$$x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ως στοιχεία του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Παρόμοια ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ως στοιχεία του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Να συμπεράνετε ότι η \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ έχει άπειρη διάσταση.

Άσκηση 5. Θεωρούμε συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a_1, a_2, \dots, a_n έτσι ώστε

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Άσκηση 6. Για κάθε $n \geq 1$, έστω m_1, m_2, \dots, m_n ανά δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι οι οποίοι είναι ελεύθεροι τετραγώνου (δηλαδή δεν διαρούνται από τετράγωνο πρώτου αριθμού). Να δειχθεί ότι οι πραγματικοί αριθμοί

$$\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_n}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R} .

Να συμπεράνετε ότι η \mathbb{Q} -διανυσματικός χώρος \mathbb{R} έχει άπειρη διάσταση.

Άσκηση 7. Για κάθε $n \geq 1$, έστω r_1, r_2, \dots, r_n ανά δύο διαφορετικοί ρητοί αριθμοί οι οποίοι ανήκουν στο διάστημα $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι οι πραγματικοί αριθμοί

$$2^{r_1}, 2^{r_2}, \dots, 2^{r_n}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R} .

Να συμπεράνετε ότι η \mathbb{Q} -διανυσματικός χώρος \mathbb{R} έχει άπειρη διάσταση.

Άσκηση 8. Έστω ότι το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n + \vec{e}_1\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν ο αριθμός n είναι περιττός.

Άσκηση 9. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

του $M_2(\mathbb{R})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 10. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα διανύσματα

$$\left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$$

να αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 .

Άσκηση 11. Να προσδιοριστεί μια βάση και η διάσταση του \mathbb{R} -υπόχωρου

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c+d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

του $M_2(\mathbb{R})$.

Άσκηση 12. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Να δείξετε ότι το σύνολο

$$R(A) = \{Y \in \mathbb{K}_m \mid \text{υπάρχει } X \in \mathbb{K}_n \text{ έτσι ώστε } Y = AX\}$$

είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathbb{K}_m .

Άσκηση 13. Ναδειχθεί ότι το υποσύνολο $\{(1, 1, -2), (0, -3, 3)\}$ του \mathbb{R}^3 αποτελεί βάση του \mathbb{R} -υπόχωρου

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση του \mathbb{R}^3 .

Άσκηση 14. Να δείξετε ότι το ακόλουθο υποσύνολο

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0\}$$

είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^3 και να βρείτε μια βάση του \mathcal{C} . Ακολουθώντας να βρείτε μια βάση \mathcal{B} του \mathbb{R}^3 η οποία περιέχει την \mathcal{C} .

Άσκηση 15. Να εξεταστεί ποια από τα επόμενα σύνολα διανυσμάτων αποτελούν βάσεις του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $M_2(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Άσκηση 16. Να προσδιορισθούν όλοι οι υπόχωροι των \mathbb{R} -διανυσματικών χώρων: $(\alpha) \mathbb{R}^3$, και $(\beta) M_2(\mathbb{R})$.

Άσκηση 17. (1) Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} S_2(\mathbb{K})$ όπου

$$S_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ x & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid a, b, x \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι ο υπόχωρος του $M_2(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους 2×2 συμμετρικούς πίνακες.

(2) Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} A_2(\mathbb{K})$ όπου

$$A_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid c \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι ο υπόχωρος του $M_2(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους 2×2 αντισυμμετρικούς πίνακες.

Άσκηση 18. (1) Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} S_3(\mathbb{K})$ όπου

$$S_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c, x, y, z \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι ο υπόχωρος του $M_3(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους 3×3 συμμετρικούς πίνακες.

(2) Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} A_3(\mathbb{K})$ όπου

$$A_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \mid b, c, e \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι ο υπόχωρος του $M_3(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους 3×3 αντισυμμετρικούς πίνακες.

Άσκηση 19. Να βρεθούν οι διαστάσεις $\dim_{\mathbb{K}} S_n(\mathbb{K})$ και $\dim_{\mathbb{R}} A_n(\mathbb{K})$ όπου:

- (1) $S_n(\mathbb{K})$ είναι ο υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους $n \times n$ συμμετρικούς πίνακες.
- (2) $A_n(\mathbb{K})$ είναι ο υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους $n \times n$ αντισυμμετρικούς πίνακες.

Άσκηση 20. Να δείξετε ότι ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος \mathcal{V} έχει ακριβώς δυο υπόχωρους αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 1$.

Άσκηση 21. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου $\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$ όπου

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (-2, 1, \lambda, 2), \quad \vec{\varepsilon}_3 = (3, 1, 1, 2)$$

Άσκηση 22. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{R}^4 :

$$\vec{x} = (1, -1, -1, 1), \quad \vec{y} = (1, -2, -2, 1), \quad \vec{z} = (0, 1, 1, 0),$$

$$\vec{x}_1 = (1, 0, 0, 1), \quad \vec{y}_1 = (0, -1, -1, 0)$$

Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$ και να δείξετε ότι

$$\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1 \rangle$$

Άσκηση 23. Θεωρούμε τους υπόχωρους του \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4, x_2 = 2x_3\}$$

$$\mathcal{Z} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0, x_2 = 2x_4\}$$

Να βρεθούν οι βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, $\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}$, και $\mathcal{V} + \mathcal{U}$.

Άσκηση 24. Να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα διανύσματα

$$\vec{x} = (1, 2, 0, a + 2), \quad \vec{y} = (a, 3, b, 0), \quad \vec{z} = (0, 1, -1, 8)$$

παράγουν έναν υπόχωρο του \mathbb{R}^4 διάστασης 2.

Άσκηση 25. Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\langle P(t), Q(t), R(t) \rangle$ του \mathbb{R}_4 , όπου

$$P(t) = 1 + t + t^3, \quad Q(t) = 2 + 2t + 2t^2 + t^4, \quad R(t) = 1 + t + 4t^2 - 3t^3 + 2t^4$$

η οποία στη συνέχεια να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}_4[t]$.

Άσκηση 26. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα πολυώνυμα

$$P_1(t) = 3t^3 - t^2 - 4t + 6, \quad P_2(t) = t^3 + t^2 + 4t + 4, \quad P_3(t) = t^3 - 4t + \lambda$$

να είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}_3[t]$.

Άσκηση 27. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα:

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}_2 = t - 1, \quad \vec{e}_3 = t^2 - 1, \quad \vec{e}_4 = t^3 - 1\}$$

$$\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = 1 + t^3, \quad \vec{\varepsilon}_2 = t, \quad \vec{\varepsilon}_3 = t + t^3, \quad \vec{\varepsilon}_4 = t^2 + t^3\}$$

είναι βάσεις του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_3[t]$.

Άσκηση 28. Στον \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_2[x]$, θεωρούμε τους υπόχωρους

$$\mathcal{V} = \langle x^2 + x, x + 1 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{W} = \langle -x^2 + x + 2, x + 3x + 1 \rangle$$

Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\mathcal{V} + \mathcal{W}$.

Άσκηση 29. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\langle A, B, G, D \rangle$ του $M_2(\mathbb{C})$, όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3i & -2-i \\ 3i-5 & -i \end{pmatrix}$$

Άσκηση 30. Ναδειχθεί ότι το ακόλουθο σύνολο πολυωνύμων

$$\mathcal{B} = \{(1+x)^n, x(1+x)^{n-1}, \dots, x^{n-1}(1+x), x^n\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[x]$.

Άσκηση 31. Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$P(x) = x^3 - x^2 + x + 3, \quad Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 10, \quad R(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

Είναι τα πολυώνυμα $P(x), Q(x), R(x)$ γραμμικά ανεξάρτητα; Αν όχι, να βρεθεί μια σχέση γραμμικής εξάρτησης η οποία τα συνδέει, και να προσδιορισθεί μια βάση του υπόχωρου $\langle P(x), Q(x), R(x) \rangle$ του $\mathbb{K}_3[x]$ η οποία και να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{K}_3[x]$.

Άσκηση 32. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $\deg P(x) = n$. Αν η k -παράγωγος του $P(x)$ συμβολίζεται με $P^{(k)}(x)$, ναδειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{1, P^{(1)}(x), P^{(2)}(x), \dots, P^{(n)}(x)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Είναι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{P(x), P^{(1)}(x), P^{(2)}(x), \dots, P^{(n)}(x)\}$$

βάση του $\mathbb{K}_n[x]$;

Άσκηση 33. Ναδειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{1, x - 1, x^2 - 2x + 1\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_2[x]$ και ακολούθως να βρεθούν οι συνιστώσες του $2x^2 - 5x + 6$ ως προς τη βάση \mathcal{B} .

Άσκηση 34. Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \rangle$$

ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 2, 4), \quad \vec{x}_2 = (2, -1, 5, 2), \quad \vec{x}_3 = (1, -1, -4, 0), \quad \vec{x}_4 = (2, 1, 1, 5),$$

η οποία να επεκταθεί σε μια βάση του \mathbb{R}^4 .

Άσκηση 35. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \rangle$ του \mathbb{K}^5 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:

$$\vec{x} = (1, 7, 5, 3, -2)$$

$$\vec{y} = (0, 4, 2, 2, 0)$$

$$\vec{z} = (2, -2, 4, 0, 1)$$

$$\vec{w} = (3, -1, 7, 1, 3)$$

η οποία ακολούθως να συμπληρωθεί σε μια βάση \mathcal{B} του \mathbb{K}^5 . Τέλος να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $(1, 2, 3, 4, 5)$ ως προς τη βάση \mathcal{B} .

Άσκηση 36. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$ του \mathbb{C}^4 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:

$$\vec{x} = (1, -i, -i, 1)$$

$$\vec{y} = (i, 1, 1, i)$$

$$\vec{z} = (1, i, 3i, 3)$$

η οποία ακολούθως να συμπληρωθεί σε μια βάση του \mathbb{C}^4 .

Άσκηση 37. Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα 3×3 πινάκων

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

Ναδειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ είναι υπόχωροι του $M_3(\mathbb{K})$ και ακολούθως να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους

$$\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}, \mathcal{V} \cap \mathcal{W}, \mathcal{V} \cap \mathcal{Z}, \mathcal{W} \cap \mathcal{Z}, \mathcal{V} + \mathcal{W} + \mathcal{Z}$$