

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 25 Νοεμβρίου 2022

Άσκηση 1. Θεωρούμε την κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = x, \vec{e}_3 = x^2, \vec{e}_4 = x^3\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_3[x]$. Ναδειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων

$$\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1 = 1 + x^3, \vec{e}'_2 = x, \vec{e}'_3 = x + x^3, \vec{e}'_4 = x^2 + x^3\}$$

είναι βάση του $\mathbb{R}_3[x]$, και στη συνέχεια να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης P από την βάση \mathcal{B} στην βάση \mathcal{B}' και ο πίνακας μετάβασης Q από την βάση \mathcal{B}' στην βάση \mathcal{B} . Να επαληθεύσετε ότι: $Q = P^{-1}$.

Άσκηση 2. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{K}$, θεωρούμε τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

$$\mathcal{B}' = \{1, t - \alpha, (t - \alpha)^2, \dots, (t - \alpha)^n\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$. Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης P από την βάση \mathcal{B} στην βάση \mathcal{B}' και ο πίνακας μετάβασης Q από την βάση \mathcal{B}' στην βάση \mathcal{B} . Να επαληθεύσετε ότι: $Q = P^{-1}$. Ποιές είναι οι συνιστώσες του τυχόντος $P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ στις βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{B}' ;

Άσκηση 3. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του \mathcal{E} . Ναδειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n, \vec{e}_n + \vec{e}_1\}$$

είναι επίσης βάση του \mathcal{E} και να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Άσκηση 4. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ μια βάση του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_3[x]$ και έστω το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\} \subseteq \mathbb{K}_3[x]$$

Ναδειχθεί ότι το σύνολο \mathcal{C} είναι μια βάση του $\mathbb{K}_3[x]$, να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, και να βρεθούν οι συνιστώσες του πολυωνύμου

$$P(x) = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{6}\vec{e}_3 + \frac{1}{24}\vec{e}_4$$

ως προς τη βάση \mathcal{C} .

Να εξετάσετε ειδικότερα τις περιπτώσεις: (α) \mathcal{B} είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}_3[x]$ και, (β) \mathcal{B} είναι η βάση \mathcal{B}' της Άσκησης 2.

Άσκηση 5. Ναδειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x+x^2, \dots, 1+x+x^2+\dots+x^n\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[x]$. Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, όπου \mathcal{B} είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}_n[x]$. Ποιές είναι οι συνιστώσες ενός πολυωνύμου

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

στη βάση \mathcal{C} ;

Άσκηση 6. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{(1+t)^n, t(1+t)^{n-1}, t^2(1+t)^{n-2}, \dots, t^n\}$$

είναι μια βάση του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$ και ακολούθως να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης από την κανονική βάση \mathcal{B} του $\mathbb{K}_n[t]$ στην \mathcal{C} και από τη βάση \mathcal{C} στην κανονική βάση \mathcal{B} .

Άσκηση 7. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι ο πίνακας μετάβασης από μια βάση \mathcal{B} σε μια βάση \mathcal{C} ενός κατάλληλου \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} .

Υπόδειξη: Θεωρείστε τον \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο \mathbb{K}_n των στηλών με n στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} και θεωρείστε την κανονική βάση \mathcal{B} του \mathbb{K}_n .

Άσκηση 8. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, ναδειχθεί ότι υπάρχουν υπόχωροι $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ του \mathcal{E} έτσι ώστε:

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{V}_{n-1} \subseteq \mathcal{V}_n = \mathcal{E}$$

έτσι ώστε, $\forall k = 0, 1, 2, \dots, n$: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_k = k$.

Άσκηση 9. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο \mathcal{E} έχει πεπερασμένη διάσταση.
- (2) $\mathcal{A}\mathcal{V}$

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_{n+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}$$

είναι μια αύξουσα ακολουθία υπόχωρων του \mathcal{E} , τότε υπάρχει $n \geq 0$ έτσι ώστε:

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n+1} = \dots$$

Αν ισχύει η συνθήκη (2) και n είναι ο μεγαλύτερος μη-αρνητικός ακέραιος έτσι ώστε $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n+1} = \dots$, για κάθε τέτοια ακολουθία υπόχωρων, τότε ναδειχθεί ότι ο \mathcal{E} έχει πεπερασμένη διάσταση και:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$$

Άσκηση 10. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Θεωρούμε τα υποσύνολα:

$$\mathcal{U}(A) = \{AX \in \mathbb{K}_m \mid X \in \mathbb{K}_n\} \quad \text{και} \quad \mathcal{V}(A) = \{{}^t AAX \in \mathbb{K}_m \mid X \in \mathbb{K}_n\}$$

Ναδειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{U}(A)$ και $\mathcal{V}(A)$ είναι υπόχωροι του \mathbb{K}_m και:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U}(A) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(A)$$

Άσκηση 11. Ναδειχθεί ότι το σώμα \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών, θεωρούμενο ως \mathbb{Q} -διανυσματικός χώρος έχει άπειρη διάσταση:

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = \infty$$

Άσκηση 12. Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{K}^6 :

$$\mathcal{U} = \{(x, x+z, x-y+2z, -z, x, y) \in \mathbb{K}^6 \mid x, y, z \in \mathbb{K}\}$$

$$\mathcal{V} = \{(x+y-w, x+y+z, w, -y-z, -y, z+w) \in \mathbb{K}^6 \mid x, y, z, w \in \mathbb{K}\}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι τα υποσύνολα \mathcal{U} και \mathcal{V} είναι υπόχωροι του \mathbb{K}^6 .
- (2) Ναβρεθούν βάσεις των \mathcal{U} και \mathcal{V} οι οποίες να επεκταθούν σε βάσεις του \mathbb{K}^6 .
- (3) Ναβρεθούν βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ και $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Άσκηση 13. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{R}^4 :

$$\vec{x}_1 = (1, 2, 1, -2), \quad \vec{x}_2 = (1, 0, 1, -1), \quad \vec{x}_3 = (1, 2, 2, -3)$$

$$\vec{y}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{y}_2 = (1, 0, 1, -1), \quad \vec{y}_3 = (1, 3, 0, -4)$$

Αν

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{U} = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$$

ναβρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων \mathcal{V} , \mathcal{U} , $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

Άσκηση 14. Θεωρούμε τα σύνολα διανυσμάτων του \mathbb{K}^4 :

$$\mathcal{A}_1 = \{(2, 1, 4, 3), (2, 1, 2, 0)\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{(1, 1, 2, 0), (2, 1, 0, 2)\}$$

$$\mathcal{A}_3 = \{(1, 2, 3, 4), (0, 4, 5, 2)\}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι τα σύνολα διανυσμάτων \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , και \mathcal{A}_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- (2) Νασυμπληρωθούν τα σύνολα \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , και \mathcal{A}_3 σε βάσεις \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 , και \mathcal{B}_3 του \mathbb{K}^4 .
- (3) Ναβρεθούν οι πίνακες μετάβασης:
 - (α) $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ από τη βάση \mathcal{B}_1 στη βάση \mathcal{B}_2 .
 - (β) $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$ από τη βάση \mathcal{B}_2 στη βάση \mathcal{B}_3 .
 - (γ) $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$ από τη βάση \mathcal{B}_1 στη βάση \mathcal{B}_3 .
- (4) Ναεπαληθεύσετε ότι:

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$$

Άσκηση 15. Θεωρούμε n το πλήθος στοιχεία a_1, a_2, \dots, a_n ενός σώματος \mathbb{K} και έστω τα διανύσματα:

$$\vec{x}_1 = (0, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{x}_2 = (a_1, 0, \dots, 0), \quad \vec{x}_3 = (a_2, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{x}_{n+1} = (a_n, 0, \dots, 0)$$

του \mathbb{K}^{n+1} . Ναβρεθεί μια βάση του υπόχωρου \mathcal{U} ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}$ και να συμπληρωθεί σε μια βάση \mathcal{C} του \mathbb{K}^{n+1} . Ποιός είναι ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση \mathcal{B} του \mathbb{K}^{n+1} στη βάση \mathcal{C} και ποιός ο πίνακας μετάβασης από τη βάση \mathcal{C} στη βάση \mathcal{B} ;

Υπενθυμίζουμε ότι, αν $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n$ είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , τότε το άθροισμα

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_n = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_i \in \mathcal{U}_i, 1 \leq i \leq n\}$$

των υπόχωρων $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n$ είναι επίσης ένας υπόχωρος του \mathcal{E} .

Το άθροισμα $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_n$ των υπόχωρων $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n$ καλείται **ευθύ άθροισμα** αν ισχύει η μοναδικότητα της γραφής:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n = \vec{x}'_1 + \vec{x}'_2 + \dots + \vec{x}'_n, \quad \text{όπου} \quad \vec{x}_i, \vec{x}'_i \in \mathcal{U}_i, 1 \leq i \leq n \implies \vec{x}_i = \vec{x}'_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Αν το άθροισμα $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ είναι ευθύ, τότε θα γράφουμε: $U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

Άσκηση 16. Έστω ότι U_1, U_2, \dots, U_n είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) $U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

(2)

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n = \vec{0}, \text{ όπου } \vec{x}_i \in U_i, 1 \leq i \leq n \implies \vec{x}_i = \vec{0}, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

(3) $\forall i = 1, 2, \dots, n$:

$$U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n) = \{\vec{0}\}$$

Άσκηση 17. Θεωρούμε το υποσύνολο

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x + y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{K}^3$$

Ναδειχθεί ότι το υποσύνολο U είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{K}^3 και να βρεθεί υπόχωρος V του \mathbb{K}^3 έτσι ώστε:

$$\mathbb{K}^3 = U \oplus V$$

Άσκηση 18. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του \mathcal{E} . Ναδειχθεί ότι

$$\mathcal{E} = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$$

όπου $U_i = \langle \vec{e}_i \rangle, 1 \leq i \leq n$.

Άσκηση 19. Έστω ότι U_1, U_2, \dots, U_n είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , και υποθέτουμε ότι ο \mathcal{E} έχει πεπερασμένη διάσταση.

(1)

$$\dim_{\mathbb{K}}(U_1 + U_2 + \dots + U_n) \leq \dim_{\mathbb{K}}U_1 + \dim_{\mathbb{K}}U_2 + \dots + \dim_{\mathbb{K}}U_n$$

(2) Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α)

$$\dim_{\mathbb{K}}(U_1 + U_2 + \dots + U_n) = \dim_{\mathbb{K}}U_1 + \dim_{\mathbb{K}}U_2 + \dots + \dim_{\mathbb{K}}U_n$$

(β) $U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

Άσκηση 20. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος και U, V , και W τρεις υπόχωροι του \mathcal{E} .

(1) Αν $\mathcal{E} = U \oplus V$ και $U \subseteq W$, ναδειχθεί ότι:

$$\mathcal{E} = U \oplus (V \cap W)$$

(2) Ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathcal{E} = U \oplus V \oplus W$.

(β) (i) $\mathcal{E} = U + V + W$.

(ii) $U \cap (V + W) = \{\vec{0}\}$ και $V \cap W = \{\vec{0}\}$.

Άσκηση 21. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_4[t]$ ο οποίος παράγεται από τα πολυώνυμα

$$t^4 + 3t^3 - 3t^2 + 4t - 1, \quad t^4 + 4t^3 - t^2 - 2t - 2, \quad 2t^4 + 9t^3 - 2t - 5$$

U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_4[t]$ ο οποίος παράγεται από τα πολυώνυμα

$$t^4 + 6t^3 + 2t^2 + 3t - 2, \quad 2t^4 + 8t^3 - t^2 - 5t + 6, \quad 2t^4 + 9t^3 - 6t - 5$$

Να βρεθούν μια βάση του $V + U$ η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση \mathcal{B} του $\mathbb{R}_4[t]$, και μια βάση του $V \cap U$ η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση \mathcal{C} του $\mathbb{R}_4[t]$. Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης μεταξύ των βάσεων \mathcal{B} και \mathcal{C} .

Άσκηση 22. Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathbb{K}^5 :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(x, 2x, -x, 3x) \in \mathbb{K}^4 \mid x \in \mathbb{K}\} \\ \mathcal{V} &= \{(x, y, -x + 3y, -y) \in \mathbb{K}^4 \mid x, y \in \mathbb{K}\} \\ \mathcal{W} &= \{(x, 0, y, z) \in \mathbb{K}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι τα υποσύνολα \mathcal{U} , \mathcal{V} , και \mathcal{W} είναι υπόχωροι του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathbb{K}^4 .
- (2) Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, $\mathcal{U} + \mathcal{W}$, $\mathcal{V} + \mathcal{W}$, $\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}$.
- (3) Να εξετασθεί αν: $\mathbb{K}^4 = \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} + \mathcal{W})$ ή $\mathbb{K}^4 = \mathcal{V} \oplus (\mathcal{U} + \mathcal{W})$ ή $\mathbb{K}^4 = \mathcal{W} \oplus (\mathcal{U} + \mathcal{V})$.

Άσκηση 23. Ναδειχθεί ότι τα σύνολα διανυσμάτων

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(x, 0, 0) \in \mathbb{K}^3 \mid x \in \mathbb{K}\} \\ \mathcal{V} &= \{(x, 0, 2x) \in \mathbb{K}^3 \mid x \in \mathbb{K}\} \\ \mathcal{W} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ και } x - 2y + z = 0\} \end{aligned}$$

είναι υπόχωροι του \mathbb{K}^3 και ακολούθως ναδειχθεί ότι:

$$\mathbb{K}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

Άσκηση 24. Θεωρούμε τους 2×2 πίνακες

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, & Y &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, & Z &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Αν $\mathcal{V} = \langle A, B, C \rangle$ και $\mathcal{U} = \langle X, Y, Z \rangle$:

- (1) Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους \mathcal{V} και \mathcal{U} , οι οποίες να συμπληρωθούν σε βάσεις του $M_2(\mathbb{R})$.
- (2) Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} + \mathcal{U}$.
- (3) Να βρεθούν υπόχωροι \mathcal{X} και \mathcal{Y} έτσι ώστε:

$$M_2(\mathbb{R}) = (\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) \oplus \mathcal{X} \quad \text{και} \quad M_2(\mathbb{R}) = (\mathcal{V} + \mathcal{U}) \oplus \mathcal{Y}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **αυστηρά άνω τριγωνικός**, αν: $a_{ij} = 0$, $1 \leq j \leq i \leq n$. Ο $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **αυστηρά κάτω τριγωνικός**, αν: $a_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq j \leq n$.

Άσκηση 25. Αν \mathbb{K} είναι ένα σώμα, έστω $AT_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων υπεράνω του \mathbb{K} , έστω $KT_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των κάτω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων υπεράνω του \mathbb{K} , και έστω $D_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των διαγωνίων $n \times n$ πινάκων υπεράνω του \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι:

$$M_n(\mathbb{K}) = AT_n(\mathbb{K}) \oplus D_n(\mathbb{K}) \oplus KT_n(\mathbb{K})$$

Άσκηση 26. Έστω ότι $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$ είναι ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο πολυωνύμων $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$ βαθμού n , έτσι ώστε:

$$\forall i, j = 0, 1, 2, \dots, n: \quad P_i(\rho_j) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Ναδειχθεί ότι το σύνολο πολυωνύμων $\mathcal{C} = \{P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_n[t]$, και ακολούθως να βρεθούν οι συνιστώσες τυχόντος πολυωνύμου $Q(t)$ ως προς τη βάση \mathcal{C} .