

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 16 Δεκεμβρίου 2022

Άσκηση 1. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν οι πίνακες A και B έχουν την ίδια βαθμίδα. Αν αυτό ισχύει, να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας Q και ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας P έτσι ώστε:

$$Q^{-1}AP = B$$

Άσκηση 2. (1) Να βρεθούν τετραγωνικοί πίνακες A και B έτσι ώστε: $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) \neq 0$ και $A \cdot B = O$.

(2) Να δοθεί παράδειγμα τετραγωνικών ισοδύναμων αληθιά όχι όμοιων πινάκων.

(3) Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε $A^2 = O$. Ναδειχθεί ότι $\mathbf{r}(A) \leq \frac{1}{2}n$. Επιπλέον ναδειχθεί ότι:

$$\mathbf{r}(A) = \frac{1}{2}n \iff \forall X \in \mathbb{K}_n : AX = O, \exists Y \in \mathbb{K}_n : Y = AX$$

Άσκηση 3. Θεωρούμε έναν $m \times n$ πίνακα με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} .

(1) Ναδειχθεί ότι $\mathbf{r}(A) = m$ αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας B έτσι ώστε: $B \cdot A = I_m$.

(2) Ναδειχθεί ότι $\mathbf{r}(A) = m$ αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας C έτσι ώστε: $A \cdot C = I_m$.

(3) Ναδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας B έτσι ώστε: $B \cdot A = I_n$ και $n \times m$ πίνακας C έτσι ώστε: $A \cdot C = I_m$ (και τότε $B = C = A^{-1}$).

Άσκηση 4. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

έτσι ώστε:

$$f(2, 0, 3) = (1, 2, -1), \quad f(4, 1, 5) = (4, 5, -2), \quad f(3, 1, 2) = (1, -1, 1)$$

Ακολουθώντας να βρεθεί μια βάση \mathcal{B} του \mathbb{R}^3 και μια βάση \mathcal{C} του \mathbb{R}^3 έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

όπου $\mathbf{r}(f) = r$.

Άσκηση 5. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογισθεί ο πίνακας A^{-1} .
- (2) Να βρείτε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση του \mathbb{R}^3 είναι ο A^{-1} .
- (3) Να υπολογίσετε τον πίνακα B της f στη ακόλουθη βάση του \mathbb{R}^3 :

$$\{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 1, 1), \vec{\varepsilon}_2 = (1, -1, 0), \vec{\varepsilon}_3 = (1, 1, -2)\}$$
- (4) Να προσδιορίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιο ώστε:

$$B = P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$$
- (5) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^n , $\forall n \geq 1$.

Άσκηση 6. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής :

$$f(x, y, z) = \left(\frac{19}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{13}{4}z, \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}y - \frac{11}{4}z, 3x + y - 4z \right)$$

- (1) Να βρείτε τον πίνακα A της f στην ακόλουθη (κανονική) βάση του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$
- (2) Να βρείτε τον πίνακα B της f στη βάση στην ακόλουθη βάση του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{C} = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$$
- (3) Να προσδιορίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Άσκηση 7. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z, w) = (x + z, y + w)$.

- (1) Να βρείτε τον πίνακα A της f στις βάσεις

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \quad \text{και} \quad \mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$$
- (2) Να βρείτε τον πίνακα B της f στις βάσεις

$$\mathcal{B}' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \quad \text{και} \quad \mathcal{C}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$$

- (3) Να βρείτε αντιστρέψιμους πίνακες P και Q έτσι ώστε:

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

Άσκηση 8. Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (-x + y - z, x + 2y, -y + 3z)$$

Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός και να βρεθεί ο πίνακας της f^{-1} στην βάση

$$\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 1, 1), \vec{\varepsilon}_2 = (1, 1, 0), \vec{\varepsilon}_3 = (1, 0, 0)\}$$

Άσκηση 9. Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$$

Αν A είναι ο πίνακας της f στη κανονική βάση \mathcal{B} του \mathbb{R}^3 , να βρεθεί γραμμική απεικόνιση g έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = A^{-1}$$

Άσκηση 10. Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 3y - z, 2x - y, y + 2z)$$

Αν \mathcal{B} είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 και

$$\mathcal{C} = \{(1, -1, 0), (0, 1, 2), (1, 0, 1)\}$$

και αν $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ και $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Άσκηση 11. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 και $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_3) = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$$

Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f όπου

$$\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (3, 0, -1), \vec{\varepsilon}_2 = (1, 2, 0), \vec{\varepsilon}_3 = (-1, 3, 1)\}$$

Άσκηση 12. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, $f(X) = A \cdot X$, όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας της f στη κανονική βάση του $M_2(\mathbb{R})$. Είναι η f ισομορφισμός;

Άσκηση 13. Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x, y)$$

Έστω \mathcal{B} και \mathcal{C} οι κανονικές βάσεις των \mathbb{R}^3 και \mathbb{R}^2 . Θεωρούμε τις βάσεις

$$\mathcal{B}' = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\} \quad \text{και} \quad \mathcal{C}' = \{(4, 3), (3, 2)\}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_2(\mathbb{R})$ και αντιστρέψιμος $Q \in M_3(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$P^{-1} \cdot A \cdot Q = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$$

Άσκηση 14. Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 1, -1), \vec{e}_2 = (0, 0, 1), \vec{e}_3 = (1, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (2, 0, 1), \vec{\varepsilon}_2 = (1, 1, 0), \vec{\varepsilon}_3 = (0, 1, -1)\}$$

Αν $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

Άσκηση 15. Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad f(a_0 + a_1t + a_2t^2) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί μια βάση \mathcal{B} του $\mathbb{R}_2[t]$ και μια βάση \mathcal{C} του $M_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

όπου $r = \mathbf{r}(f)$.

Άσκηση 16. Έστω

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

μια γραμμική απεικόνιση και $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ μια βάση του \mathbb{R}^4 . Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ της f ως προς τη βάση \mathcal{B} είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας $C = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ της f ως προς τη βάση $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4\}$ και ο πίνακας $D = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}$ της f ως προς τη βάση $\mathcal{D} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\}$.

Άσκηση 17. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$D: \mathbb{R}_n[t] \longrightarrow \mathbb{R}_n[t], \quad D(P(t)) = P'(t)$$

(1) Να βρεθεί ο πίνακας $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$ της D ως προς τη βάση

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$$

(2) Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$ της D ως προς τη βάση

$$\mathcal{C} = \left\{ 1, t - \lambda, \frac{(t - \lambda)^2}{2!}, \frac{(t - \lambda)^3}{3!}, \dots, \frac{(t - \lambda)^n}{n!} \right\}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = B$$

Άσκηση 18. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του \mathcal{E} . Θεωρούμε μια γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

(1) Να δειχθεί ότι

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} + \dim_{\mathbb{K}} f(\mathcal{E}) \leq \dim_{\mathbb{K}} f(\mathcal{V}) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$$

(2) Να δειχθεί ότι

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} \leq \dim_{\mathbb{K}} f^{-1}(\mathcal{V}) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} f(\mathcal{E})$$

Άσκηση 19. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , και έστω $f, g: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Να δειχθεί ότι:

$$\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \leq \mathbf{r}(g \circ f) \leq \min \{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)\}$$

Άσκηση 20. Έστω A και B δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Να δειχθεί ότι:

$$\mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) - n \leq \mathbf{r}(AB) \leq \min \{\mathbf{r}(A), \mathbf{r}(B)\}$$