

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 13 Ιανουαρίου 2023

Άσκηση 1. Έστω $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Να δείξετε ότι:

- (1) $r(\kappa A) = r(A)$.
- (2) $|r(A) - r(B)| \leq r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Άσκηση 2. Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας και $B \in M_{n \times r}(\mathbb{K})$ ένας $n \times r$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} .

- (1) $r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$.
- (2) Αν $n = r$ και ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, τότε: $r(AB) = r(A)$.
- (3) Αν $m = n$ και ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε: $r(AB) = r(B)$.
- (4) $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε έναν $m \times n$ πίνακα με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Αν $r(A) = r$, να δείχθει ότι υπάρχει ένας $m \times r$ πίνακας B και ένας $r \times n$ πίνακας C έτσι ώστε:

$$A = B \cdot C, \quad \text{και} \quad r(B) = r = r(C)$$

Άσκηση 4. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι $r(A) = 1$.

- (1) Να δείχθει ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$A^2 = \lambda A$$

- (2) Αν $\lambda \neq 1$, να δείχθει ότι ο πίνακας $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 5. Να δείξετε ότι για τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & -7 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ισχύει: $r(A) = 4$ και $r(B) = 3$.

Άσκηση 6. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

Άσκηση 7. Για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \kappa & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \kappa & 5 \\ 1 & \lambda & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8. Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & -a & -b \\ a+b & a+b & 2a & -2a \\ -2a & 2a & a+b & a+b \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x + y + z = 1 \\ x + (1 + \lambda)y + z = \lambda \\ x + y + (1 + \lambda)z = \lambda^2 \end{cases}$$

- (1) έχει λύση.
(2) δεν έχει λύση.

Άσκηση 10. Να λυθεί το σύστημα ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x + \lambda y + 2w = 0 \\ -x + 2y + \lambda w = 0 \\ \lambda x - 3y + (\lambda + 1)w = \lambda \end{cases}$$

Άσκηση 11. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + w = 1 \\ x + \lambda y + z + w = \lambda \\ x + y + \lambda z + w = \lambda^2 \\ x + y + z + \lambda w = \lambda^3 \end{cases}$$

δεν έχει λύση.

Άσκηση 12. Να λυθεί το σύστημα ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} (\lambda + 3)x + y + 2z = \lambda \\ \lambda x + (\lambda - 1)y + z = 2\lambda \\ 3(\lambda + 1)x + \lambda y + (\lambda + 3)z = 3 \end{cases}$$

Άσκηση 13. Έστω το σύστημα (Σ):

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 1 \\ x + \alpha y + z = 4 \\ \alpha x + y + z = \beta \end{cases}$$

- (1) Να βρεθούν οι τιμές των α, β έτσι ώστε το (Σ) να έχει:
(α) μοναδική λύση,

(β) περισσότερες από μια λύσεις,

(γ) καμμία λύση.

(2) Να βρεθεί για ποιες τιμές του α , ο χώρος λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος του (Σ) έχει διάσταση 2.

Άσκηση 14. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, το ακόλουθο σύστημα είναι συμβιβαστό;

$$\begin{cases} x + y + 2z = \alpha \\ 3x + 4y + 7z = \beta \\ x + 2y + 3z = \gamma \end{cases}$$

Άσκηση 15. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 16. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + y + z = \lambda^2 + 3\lambda \\ x + (\lambda + 1)y + z = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x + y + (\lambda + 1)z = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{cases}$$

Άσκηση 17. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + w = 1 \\ x + \lambda y + z + w = 1 \\ x + y + \lambda z + w = 1 \\ x + y + z + \lambda w = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 18. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4w = 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6w = 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8w = 9 \\ \lambda x - 4y + 9z + 10w = 11 \end{cases}$$

Άσκηση 19. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

Άσκηση 20. Για τις διάφορες τιμές του $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$