

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

## ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 14 Οκτωβρίου 2022

Υπενθυμίζουμε ότι  $\mathbb{K}$  συμβολίζει ένα σώμα, συνήθως ένα εκ των  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ . Το σύνολο όλων των  $m \times n$  πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$  συμβολίζεται με  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Για λόγους απλότητας, το σύνολο όλων τετραγωνικών  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$  συμβολίζεται με  $M_n(\mathbb{K})$ .

Ο μηδενικός  $m \times n$  πίνακας συμβολίζεται με  $O$  και ο μοναδιαίος  $n \times n$  πίνακας συμβολίζεται με  $I_n$ .

**Άσκηση 1.** Να γράψετε αναλυτικά τον  $6 \times 6$  πίνακα  $A = (a_{ij})$  όπου  $a_{ij} = \min\{i, j\} + i - j$ .

**Λύση.** Θα έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1+1-1 & 1+1-2 & 1+1-3 & 1+1-4 & 1+1-5 & 1+1-6 \\ 1+2-1 & 2+2-2 & 2+2-3 & 2+2-4 & 2+2-5 & 2+2-6 \\ 1+3-1 & 2+3-2 & 3+3-3 & 3+3-4 & 3+3-5 & 3+3-6 \\ 1+4-1 & 2+4-2 & 3+4-3 & 4+4-4 & 4+4-5 & 4+4-6 \\ 1+5-1 & 2+5-2 & 3+5-3 & 4+5-4 & 5+5-5 & 5+5-6 \\ 1+6-1 & 2+6-2 & 3+6-3 & 4+6-4 & 5+6-5 & 6+6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 2.** Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = (1 \ 0 \ -1 \ 2)$$

Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατόν, οι ακόλουθοι πολλαπλασιασμοί πινάκων:

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad A \cdot C, \quad C \cdot A, \quad B \cdot C, \quad C \cdot D, \quad D \cdot C, \quad C \cdot E, \quad E \cdot C$$

**Λύση.** Θα έχουμε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad C \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Τα γινόμενα πινάκων  $B \cdot A$ ,  $C \cdot A$ ,  $C \cdot D$ , και  $E \cdot C$  δεν ορίζονται.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός  $n \times n$  πίνακας  $A$  με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$  καλείται **αντιστρέψιμος**, αν υπάρχει  $n \times n$  πίνακας  $B$  με στοιχεία από το σώμα  $\mathbb{K}$  έτσι ώστε  $AB = I_n = BA$ . Σ' αυτή την περίπτωση ο πίνακας  $B$  είναι μοναδικός, συμβολίζεται με  $A^{-1}$  και καλείται ο **αντίστροφος** του πίνακα  $A$ .

**Άσκηση 3.** Αν  $x, y$  είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

να δειχθεί ότι οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι πίνακες  $A^{-1}$  και  $B^{-1}$ , και να δειχθεί ότι:

$$AB = BA$$

**Λύση.** Θεωρούμε τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

Θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos x)^2 + (\sin x)^2 & -\sin x \cos x + \sin x \cos x \\ \sin x \cos x - \sin x \cos x & (\sin x)^2 + (\cos x)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos x)^2 + (\sin x)^2 & -\sin x \cos x + \sin x \cos x \\ \sin x \cos x - \sin x \cos x & (\sin x)^2 + (\cos x)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Επομένως ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Παρόμοια ο πίνακας  $B = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

Τέλος θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos x \sin y + \sin x \cos y \\ -\sin x \cos y - \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Παρόμοια:

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y \cos x - \sin y \sin x & \cos y \sin x + \sin y \cos x \\ -\sin y \cos x - \cos y \sin x & -\sin y \sin x + \cos y \cos x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Άρα  $A \cdot B = B \cdot A$ .

**Σχόλιο.** Στην παραπάνω Άσκηση χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές ταυτότητες:

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \text{και} \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

**Άσκηση 4.** Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Να προσδιοριστεί  $3 \times 3$  πίνακας  $X$ , ο οποίος να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$A + 3X = 2(X - B)$$

**Λύση.** Έστω ότι υπάρχει  $3 \times 3$  πίνακας

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε  $A + 3X = 2(X - B)$ . Θα έχουμε τότε:

$$\begin{aligned} A + 3X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} & 3x_{13} \\ 3x_{21} & 3x_{22} & 3x_{23} \\ 3x_{31} & 3x_{32} & 3x_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} & 3x_{13} + 1 \\ 3x_{21} & 3x_{22} + 1 & 3x_{23} \\ 3x_{31} & 3x_{32} & 3x_{33} + 1 \end{pmatrix} \\ 2(X - B) &= 2X - 2B = 2 \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} & 2x_{13} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2x_{11} - 2 & 2x_{12} - 2 & 2x_{13} - 2 \\ 2x_{21} - 2 & 2x_{22} - 2 & 2x_{23} - 2 \\ 2x_{31} - 2 & 2x_{32} - 2 & 2x_{33} - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Άρα θα πρέπει να έχουμε

$$\begin{pmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} & 3x_{13} + 1 \\ 3x_{21} & 3x_{22} + 1 & 3x_{23} \\ 3x_{31} & 3x_{32} & 3x_{33} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} - 2 & 2x_{12} - 2 & 2x_{13} - 2 \\ 2x_{21} - 2 & 2x_{22} - 2 & 2x_{23} - 2 \\ 2x_{31} - 2 & 2x_{32} - 2 & 2x_{33} - 2 \end{pmatrix}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} 3x_{11} = 2x_{11} - 2 &\implies x_{11} = -2, & 3x_{12} = 2x_{12} - 2 &\implies x_{12} = -2, & 3x_{13} + 1 = 2x_{13} - 2 &\implies x_{13} = -3 \\ 3x_{21} = 2x_{21} - 2 &\implies x_{21} = -2, & 3x_{22} + 1 = 2x_{22} - 2 &\implies x_{22} = -3, & 3x_{23} = 2x_{23} - 2 &\implies x_{23} = -2 \\ 3x_{31} = 2x_{31} - 2 &\implies x_{31} = -2, & 3x_{32} = 2x_{32} - 2 &\implies x_{32} = -2, & 3x_{33} + 1 = 2x_{33} - 2 &\implies x_{33} = -3 \end{aligned}$$

Επομένως αν υπάρχει τέτοιος  $3 \times 3$  πίνακας  $X$ , τότε

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Αντίστροφα, εύκολα βλέπουμε ότι ο παραπάνω πίνακας ικανοποιεί τη σχέση  $A + 3X = 2(X - B)$ .

Θα μπορούσαμε να εργαστούμε και ως εξής: Από τη ζητούμενη σχέση  $A + 3X = 2(X - B)$ , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A + 3X = 2(X - B) &\implies A + 3X = 2X - 2B \implies 3X - 2X = -A - 2B \implies X = -A - 2B = \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Άσκηση 5.** Για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}$  και για κάθε  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ , θεωρούμε τους πίνακες:

$$E_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), \quad \text{όπου} \quad (E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = i \text{ \& } l = j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Με άλλα λόγια ο πίνακας  $E_{ij}$  είναι ο  $m \times n$  πίνακας ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 0 εκτός από το στοιχείο του στη θέση  $(i, j)$  το οποίο είναι ίσο με 1.

(1) Να δείχθει ότι για κάθε  $m \times n$  πίνακα  $A = (a_{ij})$  ισχύει ότι:

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$



Επομένως δείξαμε ότι

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

- (2) Θεωρούμε έναν  $m \times n$  πίνακα  $A = (a_{ij})$  και τον  $n \times t$  πίνακα  $E_{ij}$  ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 0 εκτός από το στοιχείο στην  $i$ -γραμμή και στην  $j$ -στήλη το οποίο είναι ίσο με 1. Τότε ο πίνακας  $A \cdot E_{ij}$  είναι ο  $m \times t$  πίνακας:

$$A \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου τα στοιχεία  $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$  βρίσκονται στην  $j$ -στήλη.

Παρόμοια αν θεωρήσουμε τον  $s \times m$  πίνακα  $E_{ij}$  ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 0 εκτός από το στοιχείο στην  $i$ -γραμμή και στην  $j$ -στήλη το οποίο είναι ίσο με 1, τότε ο πίνακας  $E_{ij} \cdot A$  είναι ο  $s \times n$  πίνακας:

$$E_{ij} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου τα στοιχεία

$$(a_{j1} \ a_{j2} \ \cdots \ a_{ji} \ \cdots \ a_{jn})$$

βρίσκονται στην  $i$ -γραμμή.

Υπενθυμίζουμε ότι αν  $A \in M_n(\mathbb{K})$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ , τότε ορίζονται οι δυνάμεις  $A^n, \forall n \geq 0$ , του  $A$  επαγωγικά ως εξής:

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \dots \quad A^{n+1} = A^n \cdot A$$

Ο πίνακας  $A^n$  καλείται η  $n$ -οστή δύναμη του  $A$ . Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m}, \quad (A^n)^m = A^{nm}$$

**Άσκηση 6.** Να εξετασθεί αν ισχύει η ακόλουθη σχέση στο σύνολο  $M_n(\mathbb{K})$  των  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ :

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

**Λύση.** Θα έχουμε:

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)^3 = (A+B)^2 \cdot (A+B) = (A^2 + AB + BA + B^2) \cdot (A+B) = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$$

Αν  $AB = BA$ , τότε προφανώς θα έχουμε και  $BA^2 = A^2B$  και  $B^2A = AB^2$ , και επομένως από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^3 = A^3 + A^2B + A^2B + AB^2 + BA^2 + AB^2 + B^2A + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Θα δείξουμε με ένα παράδειγμα ότι αν  $AB \neq BA$ , τότε γενικά:

$$(A+B)^3 \neq A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Θεωρούμε τους  $2 \times 2$  πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και επιπλέον:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A+B$$

Άρα

$$(A+B)^3 = A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από την άλλη πλευρά υπολογίζουμε:

$$A^2 = A \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad A^3 = A^2 \cdot A = A^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad B^3 = O$$

$$A^2 \cdot B = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \quad \text{και} \quad AB^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Άρα

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A + 3B + 3O + O = A + 3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$(A+B)^3 = A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

**Άσκηση 7.** Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί ο πίνακας  $A^{2018} \cdot B$ .

**Λύση.** Υπολογίζουμε πρώτα την  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα  $A$ . Θα έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ισχυρισμός: Για κάθε  $n \geq 1$ :

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n 2n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad (*)$$

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού, παρατηρούμε ότι η σχέση (\*) είναι αληθής για  $n = 1, 2, 3, 4$ . Υποθέτουμε ότι η σχέση (\*) ισχύει για  $n = k$ , όπου  $k \geq 2$ . Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A = \begin{pmatrix} (-1)^k & -(-1)^k 2k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 2(-1)^k + (-1)^k 2k \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & (-1)^k 2(k+1) \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & -(-1)^{k+1} 2(k+1) \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως η σχέση (\*) ισχύει και για  $n = k+1$ . Σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι η σχέση (\*) ισχύει για κάθε  $n \geq 1$ .

Τότε θα έχουμε:

$$A^n \cdot B = \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n 2n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ιδιαίτερα, θέτοντας  $n = 2018$ , έπεται ότι:

$$A^{2018} \cdot B = \begin{pmatrix} (-1)^{2018} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B$$

**Άσκηση 8.** Να υπολογιστεί η  $n$ -οστή δύναμη  $A^n$  του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Λύση.** Υπολογίζουμε πρώτα τους πίνακες  $A^n$ , όπου  $n = 1, 2, 3, 4$ . Θα έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ισχυρισμός: Για κάθε  $n \geq 1$ :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2n-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού, παρατηρούμε ότι η σχέση (\*) είναι αληθής για  $n = 1, 2, 3, 4$ . Υποθέτουμε ότι η σχέση (\*) ισχύει για  $n = k$ , όπου  $k \geq 2$ . Τότε θα έχουμε:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2(k+1)-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως η σχέση (\*) ισχύει και για  $n = k + 1$ . Σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι η σχέση (\*) ισχύει για κάθε  $n \geq 1$ . Άρα θα έχουμε:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2n-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το **ίχνος**  $\text{Tr}(A)$  ενός τετραγωνικού πίνακα  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$  ορίζεται να είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B), \quad \text{και} \quad \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$$

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ο **ανάστροφος**  ${}^t A$  ενός  $m \times n$  πίνακα  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  ορίζεται να είναι ο  $n \times m$  πίνακας  ${}^t A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ , όπου:

$$({}^t A)_{ij} = (A)_{ji}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B \quad \text{και} \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$$

Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{K})$  καλείται **συμμετρικός** αν και μόνον αν  ${}^t A = A$ , δηλαδή ισχύει ότι:  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Άσκηση 9.** Έστω  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  δύο  $n \times n$  πίνακες με στοιχεία από το σώμα  $\mathbb{K}$ . Ναδειχθεί ότι:

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$$

Ως εφαρμογή ναδειχθεί ότι για κάθε αντιστρέψιμο  $n \times n$  πίνακα  $P$  και κάθε  $n \times n$  πίνακα  $A$  ισχύει ότι:

$$\text{Tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \text{Tr}(A)$$

**Λύση.** Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A \cdot B) &= \sum_{k=1}^n (A \cdot B)_{kk} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n (A)_{kl} (B)_{lk} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n (B)_{lk} (A)_{kl} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (B)_{lk} (A)_{kl} = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n (B)_{lk} (A)_{kl} = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^n (B)_{lk} (A)_{kl} \right) = \sum_{l=1}^n (B \cdot A)_{ll} = \text{Tr}(B \cdot A) \end{aligned}$$

Αν  $P$  είναι ένας αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας, τότε χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, θα έχουμε για κάθε  $n \times n$  πίνακα  $A$ :

$$\text{Tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \text{Tr}(P^{-1} \cdot (A \cdot P)) = \text{Tr}((A \cdot P) \cdot P^{-1}) = \text{Tr}(A \cdot (P \cdot P^{-1})) = \text{Tr}(A \cdot I_n) = \text{Tr}(A)$$

**Άσκηση 10.** Να εξετασθεί αν για τυχόντες τετραγωνικούς πίνακες  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ , ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B) \quad \text{και} \quad \text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A)$$

**Λύση.** Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\text{Tr}(A) = 0 \quad \text{και} \quad \text{Tr}(B) = -1$$

Επομένως:

$$\text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B) = 0 \quad (*)$$

Από την άληθη πλευρά έχουμε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\text{Tr}(A \cdot B) = 1 \quad (**)$$

Από τις σχέσεις (\*) και (\*\*) έπεται ότι:

$$\text{Tr}(A \cdot B) = 1 \neq 0 = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$$

Αν  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ , τότε  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Επειδή τα διαγώνια στοιχεία του αναστρόφου  ${}^tA$  του  $A$  συμπίπτουν με τα διαγώνια στοιχεία του  $A$ , θα έχουμε  $\text{Tr}({}^tA) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Επομένως:  $\text{Tr}({}^tA) = \text{Tr}(A)$ .

**Άσκηση 11.** Έστω  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  δύο  $n \times n$  πίνακες με στοιχεία από το σώμα  $\mathbb{K}$ . Ναδειχθεί ότι:

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

**Λύση.** Έστω  $A = (a_{ij})$  και  $B = (b_{ij})$ . Τότε, για κάθε  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , θα έχουμε

$$\left( {}^t(A \cdot B) \right)_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^n (A)_{jk} (B)_{ki} = \sum_{k=1}^n (B)_{ki} (A)_{jk} = \sum_{k=1}^n ({}^tB)_{ik} ({}^tA)_{kj} = \left( {}^tB \cdot {}^tA \right)_{ij}$$

Επομένως θα έχουμε  ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ .

**Άσκηση 12.** Θεωρούμε τους  $n \times 1$  πίνακες  $A, B \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ .

(1) Ναδειχθεί ότι:

$${}^tA \cdot B = {}^tB \cdot A$$

(2) Ναδειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι:

$$A \cdot {}^tB \neq B \cdot {}^tA$$

(3) Ναδειχθεί ότι:

$$\text{Tr}(A \cdot {}^tB) = {}^tA \cdot B$$

(4) Ναδειχθεί ότι:

$${}^tA \cdot A = 0 \iff A = O$$

(5) Ναδειχθεί ότι:

$$A \cdot {}^tA = 0 \iff A = O$$

**Λύση.** Οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

και επομένως

$${}^tA = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \quad \text{και} \quad {}^tB = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$$

(1) Ο πίνακας  ${}^tA \cdot B$  είναι μεγέθους  $1 \times 1$  και:

$${}^tA \cdot B = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Παρόμοια ο πίνακας  ${}^tB \cdot A$  είναι μεγέθους  $1 \times 1$  και

$${}^tB \cdot A = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n = \sum_{i=1}^n b_ia_i$$

Επειδή  $a_ib_i = b_ia_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , θα έχουμε:

$${}^tA \cdot B = \sum_{i=1}^n a_ib_i = \sum_{i=1}^n b_ia_i = {}^tB \cdot A$$

(2) Ο πίνακας  $A \cdot {}^tB$  είναι μεγέθους  $n \times n$  και:

$$(A \cdot {}^tB)_{ij} = (A)_{i1}({}^tB)_{1j} = (A)_{i1}(B)_{j1} = a_{i1}b_{j1}$$

Επομένως ο  $n \times n$  πίνακας  $A \cdot {}^tB$  είναι ο εξής:

$$A \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

Παρόμοια, ο πίνακας  $B \cdot {}^tA$  είναι μεγέθους  $n \times n$  και:

$$(B \cdot {}^tA)_{ij} = (B)_{i1}({}^tA)_{1j} = (B)_{i1}(A)_{j1} = b_ia_j$$

Επομένως ο  $n \times n$  πίνακας  $B \cdot {}^tA$  είναι ο εξής:

$$B \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι γενικά  $(A \cdot {}^tB)_{ij} = a_ib_j \neq b_ia_j = (B \cdot {}^tA)_{ij}$  και επομένως  $A \cdot {}^tB \neq B \cdot {}^tA$ . Για παράδειγμα, έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$A \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ \cdots \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$B \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ \cdots \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Προφανώς  $A \cdot {}^tB \neq B \cdot {}^tA$  αν και μόνον αν  $n = 1$ .

(3) Από τους υπολογισμούς που κάναμε στο μέρος (2) προκύπτει ότι

$$\text{Tr}(A \cdot {}^tB) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i = \sum_{i=1}^n b_ia_i = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n = \sum_{i=1}^n b_ia_i = \text{Tr}(B \cdot {}^tA)$$

(4) Έστω ότι  ${}^tA \cdot A = O$ . Τότε όπως στο μέρος (1) θα έχουμε:

$$0 = {}^tA \cdot A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1a_1 + a_2a_2 + \cdots + a_na_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Επειδή προφανώς  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$  αν και μόνον αν  $a_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , έπεται ότι:

$${}^tA \cdot A = 0 \iff A = O$$

(5) Έστω ότι  $A \cdot {}^tA = O$ . Από τους υπολογισμούς που κάναμαε στο μέρος (2) προκύπτει ότι:

$$O = A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_n & a_na_n & \cdots & a_na_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_n & a_na_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

Ιδιαίτερα θα έχουμε  $a_i^2 = 0$ , δηλαδή  $a_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , και επομένως  $A = O$ .

**Παρατήρηση.** Θεωρούμε τους  $n \times 1$  πίνακες  $A, B \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ . Τότε, όπως προκύπτει από την παραπάνω Άσκηση:

$${}^tA \cdot B = \text{Tr}(A \cdot {}^tB) = \text{Tr}(B \cdot {}^tA) = {}^tB \cdot A$$

**Άσκηση 13.** (1) Αν  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , να εξετασθεί αν ισχύει ότι:  $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A$ .

(2) Αν  $A \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ , να δειχθεί ότι:

(α) Οι πίνακες  $A \cdot {}^tA$  και  ${}^tA \cdot A$  είναι συμμετρικοί.

(β)  $\text{Tr}({}^tA \cdot A) = \text{Tr}(A \cdot {}^tA)$ .

(γ) Ο αριθμός  $\text{Tr}({}^tA \cdot A)$  είναι μη-αρνητικός και:  $\text{Tr}({}^tA \cdot A) = 0 \iff A = O$ .

**Λύση.** (1) Έστω  $A = (a_{ij})$ . Για τους  $n \times n$  πίνακες  $A \cdot {}^tA$  και  ${}^tA \cdot A$ , θα έχουμε:

$$(A \cdot {}^tA)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} ({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (A)_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + \cdots + a_{in} a_{jn}$$

$$({}^tA \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{ik} (A)_{kj} = \sum_{k=1}^n (A)_{ki} (A)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} + \cdots + a_{ni} a_{nj}$$

Θεωρούμε τον  $n \times n$  πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και τότε} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Θα έχουμε:

$$A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

και

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι  $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A$  αν και μόνον αν  $n = 1$ .

(2) (α) Ο πίνακας  $A \cdot {}^tA$  είναι συμμετρικός αν και μόνον αν  ${}^t(A \cdot {}^tA) = A \cdot {}^tA$ . Επειδή

$${}^t(A \cdot {}^tA) = {}^t({}^tA) \cdot {}^tA = A \cdot {}^tA$$

έπεται ότι ο πίνακας  $A \cdot {}^tA$  είναι συμμετρικός.

Παρόμοια, ο πίνακας  ${}^tA \cdot A$  είναι συμμετρικός αν και μόνον αν  ${}^t({}^tA \cdot A) = {}^tA \cdot A$ . Επειδή

$${}^t({}^tA \cdot A) = {}^tA \cdot {}^t({}^tA) = {}^tA \cdot A$$

έπεται ότι ο πίνακας  ${}^tA \cdot A$  είναι συμμετρικός.

(β) Επειδή, για τυχόντες  $n \times n$  πίνακες  $A$  και  $B$  ισχύει ότι  $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$ , θα έχουμε:  
 $\text{Tr}({}^tA \cdot A) = \text{Tr}(A \cdot {}^tA)$ .

(γ) Έστω  $A = (a_{ij})$ . Τότε θα έχουμε:

$$\text{Tr}({}^tA \cdot A) = \sum_{k=1}^n ({}^tA \cdot A)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n ({}^tA)_{kl} (A)_{lk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (A)_{lk} (A)_{lk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{lk} a_{lk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{lk}^2$$

Επομένως ο αριθμός  $\text{Tr}({}^tA \cdot A)$ , ως άθροισμα τετραγώνων, είναι μη-αρνητικός και προφανώς:

$$\text{Tr}({}^tA \cdot A) = 0 \iff \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{lk}^2 = 0 \iff a_{lk} = 0 \iff A = O$$

**Άσκηση 14.** Αν  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ , να δειχθεί ότι  $A^2 - 2A - 8I_2 = 0$ . Επιπλέον να δειχθεί ότι ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο πίνακας  $A^{-1}$ .

**Λύση.** Θα έχουμε:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

και άρα:

$$\begin{aligned} A^2 - 2A - 8I_2 &= \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 14 - 6 - 8 & -2 + 2 + 0 \\ -10 + 10 + 0 & 6 + 2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O} \end{aligned}$$

Τέλος θα έχουμε

$$A^2 - 2A - 8I_2 = \mathbb{O} \implies A^2 - 2A = 8I_2 \implies A(A - 2I_2) = 8I_2 \implies A \cdot \frac{1}{8}(A - 2I_2) = I_2 = \frac{1}{8}(A - 2I_2) \cdot A$$

Επομένως ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 2I_2) = \frac{1}{8}A - \frac{1}{4}I_2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} - \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

**Σχόλιο.** Η παρακάτω Άσκηση είναι γενίκευση της Άσκησης 14.

**Άσκηση 15.** Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ένος  $2 \times 2$  πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ . Να δειχθεί ότι<sup>1</sup>:

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O$$

Να συμπεράνετε ότι:

$$\text{ο πίνακας } A \text{ είναι αντιστρέψιμος} \iff ad - bc \neq 0$$

<sup>1</sup>Ο αριθμός  $a + d$  είναι το ίχνος  $\text{Tr}(A)$  του  $A$ , και ο αριθμός  $ad - bc$  καλείται **ορίζουσα** του  $A$  και συμβολίζεται με  $|A|$  ή  $\text{Det}(A)$ .

και τότε:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \left( -A + (a + d)I_2 \right) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Λύση.** Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ac - bd & 0 \\ 0 & ac - bd \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - bd \\ ac + cd - ac - cd & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \end{aligned}$$

Άρα πράγματι έχουμε:

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$A^2 - (a + d)A = -(ad - bc)I_2 \implies A \cdot (A - (a + d)I_2) = -(ad - bc)I_2 = (A - (a + d)I_2) \cdot A \quad (*)$$

• Υποθέτουμε ότι  $ad - bc \neq 0$ . Τότε πολλαπλασιάζοντας βαθμωτά και τα δύο μέλη της ισότητας πινάκων (\*) με τον αριθμό  $\frac{-1}{ad - bc}$ , θα έχουμε:

$$A \cdot \left( \frac{a + d}{ad - bc} I_2 - \frac{1}{ad - bc} A \right) = I_2 = \left( \frac{a + d}{ad - bc} I_2 - \frac{1}{ad - bc} A \right) \cdot A$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{a + d}{ad - bc} I_2 - \frac{1}{ad - bc} A = \begin{pmatrix} \frac{a + d}{ad - bc} & 0 \\ 0 & \frac{a + d}{ad - bc} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a}{ad - bc} & \frac{b}{ad - bc} \\ \frac{c}{ad - bc} & \frac{d}{ad - bc} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• Υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ο αντίστροφός του  $A^{-1}$ . Αν  $ad - bc = 0$ , τότε από τη σχέση (\*) θα έχουμε:

$$A \cdot (A - (a + d)I_2) = O$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με  $A^{-1}$ , έπεται ότι:

$$A^{-1} \cdot A \cdot (A - (a + d)I_2) = A^{-1} \cdot O \implies I_2 \cdot (A - (a + d)I_2) = O \implies A - (a + d)I_2 = O \implies$$

$$\implies A = (a + d)I_2 \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = a + d \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a + d = d \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \implies A = O$$

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι ο μηδενικός πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Στην αντίφαση αυτή καταλήξαμε υποθέτοντας ότι  $ad - bc = 0$ . Άρα θα έχουμε:  $ad - bc \neq 0$ .

**Άσκηση 16.** Έστω  $n \in \mathbb{N}$  με  $n \geq 2$ . Ας είναι  $AT_n(\mathbb{K})$  (αντιστοιχώς  $KT_n(\mathbb{K})$ ) το σύνολο των άνω (αντιστοιχώς κάτω) τριγωνικών  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από το σώμα  $\mathbb{K}$ .

Ναδειχθεί ότι η τομή  $AT_n(\mathbb{K}) \cap KT_n(\mathbb{K})$  των δύο αυτών συνόλων ισούται με το σύνολο των διαγωνίων πινάκων.

**Λύση.** Συμβολίζουμε με  $\Delta_n(\mathbb{K})$  το σύνολο των διαγωνίων πινάκων. Ένα τυπικό στοιχείο του συνόλου αυτού είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

όπου  $k_i \in \mathbb{K}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Έστω ένας πίνακας  $A \in AT_n(\mathbb{K}) \cap KT_n(\mathbb{K})$ , δηλαδή  $A \in AT_n(\mathbb{K})$  και  $A \in KT_n(\mathbb{K})$ . Αφού ο πίνακας  $A$  είναι άνω και κάτω τριγωνικός έπεται ότι κάτω και πάνω από την κύρια διαγώνιο έχει μηδέν. Συνεπώς, ο πίνακας  $A \in \Delta_n(\mathbb{K})$  και άρα δείξαμε ότι  $AT_n(\mathbb{K}) \cap KT_n(\mathbb{K}) \subseteq \Delta_n(\mathbb{K})$ . Επίσης είναι φανερό ότι αν έχουμε έναν διαγώνιο πίνακα τότε αυτός είναι άνω και κάτω τριγωνικός, δηλαδή  $\Delta_n(\mathbb{K}) \subseteq AT_n(\mathbb{K}) \cap KT_n(\mathbb{K})$ . Επομένως  $AT_n(\mathbb{K}) \cap KT_n(\mathbb{K}) = \Delta_n(\mathbb{K})$ .

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας  $A$  καλείται **ταυτοδύναμος** αν  $A^2 = A$ . Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

είναι ταυτοδύναμος.

**Άσκηση 17.** (1) Ναδειχθεί ότι αν ο πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{K})$  είναι ταυτοδύναμος, τότε και ο πίνακας  $I_n - A$  είναι ταυτοδύναμος.

(2) Να βρεθούν όλοι οι ταυτοδύναμοι και αντιστρέψιμοι πίνακες.

(3) Υποθέτουμε ότι για τους πίνακες (κατάλληλων μεγεθών)  $A$  και  $B$  ισχύει ότι:  $AB = A$  και  $BA = B$ . Ναδειχθεί ότι οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι ταυτοδύναμοι.

**Λύση.** (1) Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες πράξεων πινάκων, θα έχουμε:

$$(I_n - A) \cdot (I_n - A) = (I_n)^2 - I_n \cdot A - A \cdot I_n + A^2 = I_n - A - A + A = I_n - A$$

Άρα ο πίνακας  $I_n - A$  είναι ταυτοδύναμος.

(2) Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας ο οποίος είναι ταυτοδύναμος και αντιστρέψιμος. Τότε θα έχουμε  $A^2 = A$  και  $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$ . Επομένως πολλαπλασιάζοντας τη σχέση  $A^2 = A$  από τα αριστερά με τον πίνακα  $A^{-1}$ , θα έχουμε:

$$A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot A \implies A^{-1} \cdot A \cdot A = I_n \implies I_n \cdot A = I_n \implies A = I_n$$

Αντίστροφα ο μοναδιαίος πίνακας  $I_n$  είναι προφανώς αντιστρέψιμος και ταυτοδύναμος.

(3) Υποθέτουμε ότι  $AB = A$  και  $BA = B$ . Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A \cdot B = A &\implies (A \cdot B) \cdot A = A \cdot A \implies A \cdot (B \cdot A) = A^2 \implies A \cdot B = A^2 \implies A = A^2 \\ B \cdot A = B &\implies (B \cdot A) \cdot B = B \cdot B \implies B \cdot (A \cdot B) = B^2 \implies B \cdot A = B^2 \implies B = B^2 \end{aligned}$$

Επομένως οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι ταυτοδύναμοι.

**Άσκηση 18.** (1) Αν ο  $n \times n$  πίνακας  $P$  είναι ταυτοδύναμος, τότε ναδειχθεί ότι:

$$(2P - I_n)^2 = I_n$$

(2) Αν για τον  $n \times n$  πίνακα  $A$  ισχύει ότι  $A^2 = I_n$ , τότε ναδειχθεί ότι ο πίνακας

$$\frac{1}{2}(A + I_n)$$

είναι ταυτοδύναμος.

**Λύση.** (1) Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες πράξεων πινάκων, θα έχουμε:

$$(2P - I_n)^2 = (2P - I_n) \cdot (2P - I_n) = 2P \cdot 2P - 2P \cdot I_n - I_n \cdot 2P + (I_n)^2 = 4P^2 - 2P - 2P + I_n = 4P - 4P + I_n = I_n$$

(2) Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες πράξεων πινάκων, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(A + I_n)\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}(A + I_n)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(A + I_n)\right) = \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_n\right) \cdot \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_n\right) = \\ &= \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}I_n \cdot \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_n \cdot \frac{1}{2}I_n = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}A \cdot I_n + \frac{1}{4}I_n \cdot A + \frac{1}{4}I_n \cdot I_n = \\ &= \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_n = \frac{1}{2}(A + I_n) \end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας  $\frac{1}{2}(A + I_n)$  είναι ταυτοδύναμος.

**Άσκηση 19.** Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Να δείξετε ότι  $A^4 = I_3$  και ο ακολούθως να δείξετε ότι

ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος. Στην συνέχεια να βρείτε τους πίνακες  $A^{-1}$  και  $A^{2018}$ .

**Λύση.** Υπολογίσουμε εύκολα ότι:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Επειδή  $A^4 = I_3$ , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A^3 \cdot A = I_3 \quad \text{και} \quad A \cdot A^3 = I_3 &\implies \\ A^{-1} = A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Τέλος, επειδή  $2018 = 504 \cdot 4 + 2$ , θα έχουμε:

$$A^{2018} = A^{504 \cdot 4 + 2} = A^{504 \cdot 4} \cdot A^2 = (A^4)^{504} \cdot A^2 = I_3^{504} \cdot A^2 = I_3 \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 20.** Έστω  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Βρείτε τον πίνακα  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Λύση.** Υπολογίζουμε εύκολα:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \end{aligned}$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι,  $\forall n \geq 1$ :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής για  $n = 1$ ,  $n = 2$ . Υποθέτουμε ότι  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , όπου  $k \geq 3$ . Τότε:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα η επαγωγική υπόθεση είναι αληθής για  $n = k + 1$ , και επομένως από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1$$

**Άσκηση 21.** Για κάθε  $n \geq 1$ , να βρείτε την  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Λύση.** Για να καταλάβουμε τη περιγραφή του  $A^n$ , ξεκινάμε πρώτα κάνοντας τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς πινάκων:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1+2+3+4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (*)$$

1. Για  $n = 1$ , και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι  $A^1 = A$  και τη μορφή του πίνακα  $A$ , η ζητούμενη σχέση (\*) προφανώς ισχύει.
2. Υπόθεση Επαγωγής: Έστω ότι ισχύει για  $n = k$ , δηλαδή δεχόμαστε ότι:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση (\*) ισχύει για  $n = k + 1$ . Έχουμε

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, η  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα  $A$  είναι ο πίνακας  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

**Άσκηση 22.** Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και ακολούθως να βρεθεί ο αντίστροφός του  $A^{-1}$ .

**Λύση.** Υπολογίζουμε:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \implies A \cdot A = I_4 = A \cdot A$$

Επομένως ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος, και:

$$A^{-1} = A$$

**Άσκηση 23.** Έστω  $A$  και  $B$  δύο  $n \times n$  πίνακες και υποθέτουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  έτσι ώστε οι πίνακες  $P^{-1}AP$  και  $P^{-1}BP$  είναι διαγώνιοι. Ναδειχθεί ότι:  $AB = BA$ .

**Λύση.** Θέτοντας  $P^{-1}AP = X$  και  $P^{-1}BP = Y$ , θα έχουμε:

$$P^{-1}AP = X \implies AP = PX \implies A = PXP^{-1} \text{ και } P^{-1}BP = Y \implies BP = PY \implies B = PYP^{-1}$$

$$AB = (PXP^{-1}) \cdot (PYP^{-1}) = PXP^{-1}PYP^{-1} = PXI_nYP^{-1} = PXYP^{-1}$$

$$BA = (PYP^{-1}) \cdot (PXP^{-1}) = PYP^{-1}PXP^{-1} = PYI_nXP^{-1} = PYPXP^{-1}$$

Επειδή οι πίνακες  $P^{-1}AP = X$  και  $P^{-1}BP = Y$  είναι διαγώνιοι, μπορούμε να γράψουμε:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ και } Y = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_n \end{pmatrix}$$

όπου τα στοιχεία  $\lambda_i, \kappa_i \in \mathbb{K}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Επειδή

$$XY = \begin{pmatrix} \lambda_1\kappa_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\kappa_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\kappa_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1}\kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\kappa_n \end{pmatrix} = YX$$

θα έχουμε:

$$AB = PXYP^{-1} = PYPXP^{-1} = BA$$

Υπενθυμίζουμε ότι μια **σχέση**  $\mathcal{R}$  επί ενός συνόλου  $S$  είναι ένα υποσύνολο  $\mathcal{R} \subseteq S \times S$  του καρτεσιανού γινομένου  $S \times S$ . Αν  $s_1, s_2 \in S$ , και  $(s_1, s_2) \in \mathcal{R}$  θα γράφουμε:  $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2$ , δηλαδή:

$$\forall s_1, s_2 \in S: s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \iff (s_1, s_2) \in \mathcal{R}$$

Μια σχέση  $\mathcal{R}$  επί του συνόλου  $S$  καλείται **σχέση ισοδυναμίας** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(1) \forall s \in S: s \sim_{\mathcal{R}} s. \quad (\text{Ανακλαστική ιδιότητα})$$

$$(2) \forall s_1, s_2 \in S: s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \implies s_2 \sim_{\mathcal{R}} s_1. \quad (\text{Συμμετρική ιδιότητα})$$

$$(3) \forall s_1, s_2, s_3 \in S: \begin{cases} s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \\ s_2 \sim_{\mathcal{R}} s_3 \end{cases} \implies s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_3. \quad (\text{Μεταβατική ιδιότητα})$$

Αν  $\mathcal{R}$  είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου  $S$  και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα συμβολίζουμε την  $\mathcal{R}$  με “ $\sim$ ” και θα γράφουμε  $s_1 \sim s_2$  αντί  $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2$ .

**Άσκηση 24.** Δύο  $n \times n$  πίνακες  $A$  και  $B$  καλούνται **όμοιοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $P$  έτσι ώστε  $P^{-1}AP = B$ . Να δείχθει ότι ορίζοντας

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) : A \sim B \iff \text{οι πίνακες } A \text{ και } B \text{ είναι όμοιοι}$$

απκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας “ $\sim$ ” στο σύνολο  $M_n(\mathbb{K})$  όλων των  $n \times n$  πινάκων υπεράνω του σώματος  $\mathbb{K}$ .

**Λύση.** Δείχνουμε ότι η σχέση “ $\sim$ ” στο σύνολο  $M_n(\mathbb{K})$  όλων των  $n \times n$  πινάκων υπεράνω του σώματος  $\mathbb{K}$  είναι ανακλαστική, συμμετρική, και μεταβατική.

- (1) «Ανακλαστική»: Για κάθε πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , έχουμε ότι ο μοναδιαίος πίνακας  $I_n$  είναι αντιστρέψιμος και:  $I_n^{-1}AI_n = I_nA = A$ . Επομένως  $A \sim A$ .
- (2) «Συμμετρική»: Έστω οι πίνακες  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ , και υποθέτουμε ότι  $A \sim B$ . Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  έτσι ώστε  $P^{-1}AP = B$ . Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση από τα αριστερά με τον πίνακα  $P$  και από τα δεξιά με τον πίνακα  $P^{-1}$  θα έχουμε:

$$P^{-1}AP = B \implies AP = PB \implies A = PBP^{-1} \implies A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$$

Επειδή ο πίνακας  $P^{-1}$  είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι  $B \sim A$ .

- (3) «Μεταβατική»: Έστω οι πίνακες  $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ , και υποθέτουμε ότι  $A \sim B$  και  $B \sim C$ . Τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $P$  και  $Q$  έτσι ώστε  $P^{-1}AP = B$  και  $Q^{-1}BQ = C$ . Τότε:

$$Q^{-1}BQ = C \implies Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = C \implies (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = C \implies (PQ)^{-1}A(PQ) = B$$

Επειδή ο πίνακας  $PQ$  είναι αντιστρέψιμος (με αντίστροφο τον πίνακα  $Q^{-1}P^{-1}$ ), έπεται ότι  $A \sim C$ .

Συμπεραίνουμε ότι η σχέση “ $\sim$ ” είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική και άρα είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

**Παρατήρηση.** Στις επόμενες τέσσερις ασκήσεις ζητείται να προσδιοριστεί αν ένας (άνω τριγωνικός) πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και ακολούθως, αν είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο αντίστροφός του. Αργότερα με χρήση οριζουσών θα δούμε αποτελεσματικά κριτήρια για το πότε ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος και μεθόδους εύρεσης του αντίστροφου πίνακα.

Η μέθοδος η οποία ακολουθείται στις παρακάτω ασκήσεις για την εύρεση του αντίστροφου του πίνακα  $A$ , αν αυτός υπάρχει, είναι η εξής: αναζητούμε πίνακα  $X = (x_{ij})$  έτσι ώστε  $A \cdot X = I_n = X \cdot A$ . Τότε θα έχουμε το ακόλουθο σύστημα ως προς  $x_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ :

$$(A \cdot X)_{ij} = (I_n)_{ij} \implies \sum_{k=1}^n a_{ik}x_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

$$(X \cdot A)_{ij} = (I_n)_{ij} \implies \sum_{k=1}^n x_{ik}a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Αν το παραπάνω σύστημα έχει (μοναδική) λύση, τότε υπολογίσουμε τα στοιχεία  $x_{ij}$  συναρτήσεως των στοιχείων  $a_{ij}$  και τότε ο πίνακας  $X$  που προκύπτει είναι ο πίνακας  $A^{-1}$ . Αν το σύστημα δεν έχει λύση, τότε ο πίνακας  $A$  δεν είναι αντιστρέψιμος.

Σημειώνουμε ότι αν ο πίνακας  $A$  είναι άνω ή κάτω τριγωνικός, τότε και ο πίνακας  $X$  που αναζητούμε, αναγκαστικά θα είναι άνω ή κάτω τριγωνικός (αποδείξτε το σαν Άσκηση). Σε αυτή την περίπτωση οι πράξεις είναι σημαντικά απλούστερες.

**Άσκηση 25.** Για κάθε  $n \geq 1$ , να βρεθεί η  $n$ -οστή δύναμη των πινάκων

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

όπου  $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Πότε οι παραπάνω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι; Αν είναι αντιστρέψιμοι, ποιοί είναι οι αντίστροφοί τους;

**Λύση.** (1) Θα δείξουμε με χρήση Μαθηματικής Επαγωγής ότι,  $\forall n \geq 1$ :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b(1+a+a^2+\dots+a^{n-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b \sum_{k=0}^{n-1} a^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν  $n = 1$ , τότε η σχέση (1) είναι προφανώς αληθής.

Αν  $n = 2$ , τότε η σχέση (1) είναι αληθής, διότι:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(1+a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση (1) είναι αληθής όταν  $n$ . Τότε

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b(1+a+a^2+\dots+a^{n-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n b + b(1+a+a^2+\dots+a^{n-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & b(1+a+a^2+\dots+a^{n-1}+a^n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, η σχέση (1) είναι αληθής για κάθε  $n \geq 1$ .

Αν  $a \neq 0$ , τότε θεωρούμε<sup>2</sup> τον πίνακα  $\begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  και θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα ο πίνακας  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος και

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν  $a = 0$ , τότε ο πίνακας  $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  δεν είναι αντιστρέψιμος, διότι αν ήταν θα υπήρχε  $2 \times 2$  πίνακας

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  έτσι ώστε

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

από όπου προκύπτει άμεσα ότι θα πρέπει να έχουμε  $1 = 0$  το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο πίνακας  $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  δεν είναι αντιστρέψιμος.

<sup>2</sup>Αναζητούμε πίνακα  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  έτσι ώστε  $X \cdot A = I_2 = A \cdot X$ . Επειδή ο πίνακας  $A$  είναι άνω τριγωνικός, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και ο πίνακας  $X$  που αναζητούμε είναι άνω τριγωνικός, δηλαδή  $z = 0$ . Θα έχουμε:

$$A \cdot X = I_2 \implies \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} ax & ay+bw \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies ax = 1, \quad w = 1, \quad ay + bw = 0$$

Έτσι, για να είναι ο  $A$  αντιστρέψιμος, πρέπει  $a \neq 0$  και τότε  $x = a^{-1}$ ,  $w = 1$ , και  $y = -a^{-1}bw = -a^{-1}b$ , δηλαδή

$$X = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Αν  $\lambda \neq 0$ , θεωρούμε<sup>3</sup> τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

και τότε:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος και

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Αν  $\lambda = 0$ , ο πίνακας  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  δεν είναι αντιστρέψιμος διότι αν ήταν αντιστρέψιμος, τότε<sup>4</sup> και ο

πίνακας  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$  θα ήταν αντιστρέψιμος,  $\forall n \geq 1$ . Επειδή  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \mathbb{O}$ , καταλήγουμε στην

αντίφαση ότι ο μηδενικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος. Επομένως ο πίνακας  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  δεν είναι αντιστρέψιμος.

Για τις δυνάμεις του πίνακα, υπολογίζουμε:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \binom{2}{1}\lambda^1 & \binom{2}{2}\lambda^0 \\ 0 & \lambda^2 & \binom{2}{1}\lambda^1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & \binom{3}{1}\lambda^2 & \binom{3}{2}\lambda^1 \\ 0 & \lambda^3 & \binom{3}{1}\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

όπου

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

είναι ο διωνυμικό συντελεστής. Ισχυριζόμαστε ότι

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

<sup>3</sup>Ο πίνακας που θεωρούμε προκύπτει αν εργασθούμε όπως περιγράφεται στην Παρατήρηση .

<sup>4</sup>Εστω ότι ο  $n \times n$  πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ο αντίστροφός του  $A^{-1}$  και ισχύει  $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$ . Για κάθε  $k \geq 1$ , θα έχουμε:

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A \implies (A \cdot A^{-1})^k = I_n^k = (A^{-1} \cdot A)^k \implies A^k \cdot (A^{-1})^k = I_n = (A^{-1})^k \cdot A^k$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι επειδή οι πίνακες  $A$  και  $A^{-1}$  μετατίθενται, ισχύει ότι  $(A \cdot A^{-1})^k = A^k \cdot (A^{-1})^k$  και  $(A^{-1} \cdot A)^k = (A^{-1})^k \cdot A^k$ . Επομένως ο πίνακας  $A^k$  είναι αντιστρέψιμος και

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι η σχέση (2) είναι αληθής όταν  $n = 2$  ή  $n = 3$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση (2), και τότε:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + \binom{n}{1}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & \lambda^n + \binom{n}{1}\lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & ((\binom{n}{1}) + 1)\lambda^n & ((\binom{n}{1}) + \binom{n}{2})\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & ((\binom{n}{1}) + 1)\lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\binom{n}{1} + 1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} + 1 = \frac{n! + (n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n-1)!}{(n-1)!} = n+1 = \frac{(n+1)!}{1!n!} = \binom{n+1}{1}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{2} &= \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!} \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{n!}{(n-2)!} \left( \frac{n+1}{2(n-1)} \right) = \frac{n!(n+1)}{2(n-2)!(n-1)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

Επομένως ο τελευταίος πίνακας θα είναι

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \dots = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & ((\binom{n}{1}) + 1)\lambda^n & ((\binom{n}{1}) + \binom{n}{2})\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & ((\binom{n}{1}) + 1)\lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \binom{n+1}{1}\lambda^n & \binom{n+1}{2}\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & \binom{n+1}{1}\lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, θα έχουμε ότι η σχέση (2) είναι αληθής,  $\forall n \geq 1$ .

**Άσκηση 26.** Ναδειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

**Λύση.** Θεωρούμε<sup>5</sup> τον  $n \times n$  πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>5</sup>Ο πίνακας που θεωρούμε προκύπτει αν εργασθούμε όπως περιγράφεται στην Παρατήρηση .

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς  $A \cdot B$  και  $B \cdot A$ , εύκολα βλέπουμε ότι  $A \cdot B = I_n = B \cdot A$ . Άρα ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 27.** Ναδειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

**Λύση.** Θεωρούμε<sup>6</sup> τον  $n \times n$  πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς  $A \cdot B$  και  $B \cdot A$ , εύκολα βλέπουμε ότι  $A \cdot B = I_n = B \cdot A$ . Άρα ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 28.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ναδειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 0 & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & x & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>6</sup>Ο πίνακας που θεωρούμε προκύπτει αν εργασθούμε όπως περιγράφεται στην Παρατήρηση .

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

**Λύση.** Θεωρούμε<sup>7</sup> τον  $n \times n$  πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς  $A \cdot B$  και  $B \cdot A$ , εύκολα βλέπουμε ότι  $A \cdot B = I_n = B \cdot A$ . Άρα ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 29.** Έστω  $A$  και  $B$   $n \times n$  πίνακες τέτοιοι ώστε ο πίνακας  $I_n - (AB)^2$  να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας  $I_n - (BA)^2$  είναι αντιστρέψιμος και

$$(I_n - (BA)^2)^{-1} = I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA$$

**Λύση.** Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(I_n - (BA)^2) \cdot [I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] = I_n = [I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] \cdot (I_n - (BA)^2)$$

**1.** Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (I_n - (BA)^2) \cdot [I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] &= I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\ &\quad - (BA)^2 - (BA)^2 B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\ &= I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\ &\quad - (BA)^2 - BABAB(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\ &= I_n - (BA)^2 + \\ &\quad + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA - B(AB)^2(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\ &= I_n - (BA)^2 + \\ &\quad + B[(I_n - (AB)^2)^{-1} - (AB)^2(I_n - (AB)^2)^{-1}]ABA \\ &= I_n - (BA)^2 + B(I_n - (AB)^2)(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\ &= I_n - (BA)^2 + BI_nABA \\ &= I_n - (BA)^2 + (BA)^2 \\ &= I_n \end{aligned}$$

**2.** Θα έχουμε:

<sup>7</sup>Ο πίνακας που θεωρούμε προκύπτει αν εργασθούμε όπως περιγράφεται στην Παρατήρηση .

$$\begin{aligned}
[I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] \cdot (I_n - (BA)^2) &= I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&\quad - (BA)^2 - B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA(BA)^2 \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA - B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABABABA \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad + B(I_n - (AB)^2)^{-1}[ABA - (AB)^2ABA] \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad + B(I_n - (AB)^2)^{-1}(I_n - (AB)^2)ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + BI_nABA \\
&= I_n - (BA)^2 + BABA \\
&= I_n - (BA)^2 + (BA)^2 \\
&= I_n
\end{aligned}$$

Από τα **1.** και **2.** έχουμε το ζητούμενο.

**Παρατήρηση.** Έστω  $A, B$  δύο  $n \times n$  πίνακες με στοιχεία από το σώμα  $\mathbb{K}$ . Τότε, όπως θα δούμε σύντομα με χρήση της θεωρίας οριζουσών, ισχύει ότι:

$$A \cdot B = I_n \iff B \cdot A = I_n$$

και άρα, αν ικανοποιείται μία από τις σχέσεις  $A \cdot B = I_n$  ή  $B \cdot A = I_n$ , τότε ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και  $A^{-1} = B$ . Επομένως στην Άσκηση 29 (και σε ανάλογες Ασκήσεις, βλ. την Άσκηση 32 παρακάτω), αρκεί να δειχθεί μόνο η μία εκ των δύο απαιτούμενων ισοτήτων.

**Άσκηση 30.** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι  $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$ , Να δειχθεί ότι ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = -A^4$$

**Λύση.** Από τη σχέση  $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$  έχουμε  $-A^4 + A^3 - A^2 + A = I_n$  και άρα

$$A(-A^3 + A^2 - A + I_n) = I_n \quad \text{και} \quad (-A^3 + A^2 - A + I_n)A = I_n$$

Συνεπώς ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και  $A^{-1} = -A^3 + A^2 - A + I_n = -A^4$ .

**Άσκηση 31.** Έστω  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . Να δειχθεί ότι:

ο πίνακας  $I_n + AB$  είναι αντιστρέψιμος  $\iff$  ο πίνακας  $I_n + BA$  είναι αντιστρέψιμος

**Λύση.** “ $\implies$ ” Υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $I_n + AB$  είναι αντιστρέψιμος. Συμβολίζουμε με  $C$  τον αντίστροφό του:

$$C := (I_n + AB)^{-1}$$

και έτσι θα έχουμε:

$$(I_n + AB) \cdot C = I_n = C \cdot (I_n + AB), \quad \text{ιδιαίτερα θα έχουμε: } C + ABC = I_n, \quad \text{δηλαδή}$$

$$ABC = I_n - C \quad (*)$$

Θεωρούμε τον πίνακα  $I_n - BCA$ . Θα δείξουμε ότι ο πίνακας  $I_n + BA$  είναι αντιστρέψιμος και  $(I_n + BA)^{-1} = I_n - BCA$ .

Θα έχουμε:

$$(I_n - BCA) \cdot (I_n + BA) = I_n + BA - BCA - BCABA = I_n + BA - BCA - BCABI_nA =$$

$$\begin{aligned}
&= I_n + BA - BCA - BCABCC^{-1}A = I_n + BA - BCA - BC(ABC)C^{-1}A \stackrel{(*)}{=} \\
&= I_n + BA - BCA - BC(I_n - C)C^{-1}A = I_n + BA - BCA - (BCI_nC^{-1}A - BCCC^{-1}A) = \\
&= I_n + BA - BCA - (BA - BCA) = I_n + BA - BCA - BA + BCA = I_n
\end{aligned}$$

και επομένως:

$$(I_n - BCA) \cdot (I_n + BA) = I_n \quad (1)$$

Παρόμοια θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
(I_n + BA) \cdot (I_n - BCA) &= I_n - BCA + BA - BABCA \stackrel{(*)}{=} I_n - BCA + BA - B(I_n - C)A = \\
&= I_n - BCA + BA - BA + BCA = I_n
\end{aligned}$$

και επομένως

$$(I_n + BA) \cdot (I_n - BCA) = I_n \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο πίνακας  $I_n + BA$  είναι αντιστρέψιμος και

$$(I_n + BA)^{-1} = I_n - BCA = I_n - B(I_n + AB)^{-1}A$$

“ $\Leftarrow$ ” Η απόδειξη είναι ανάλογη<sup>8</sup> και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

**Άσκηση 32.** Θεωρούμε τους  $n \times n$  πίνακες  $A$  και  $B$  και υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $B$  είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$A + B = AB \quad (\dagger)$$

Να δείξετε ότι ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:  $A^{-1} + B^{-1} = I_n$ .

**Λύση.** Επειδή ο πίνακας  $B$  είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει ο αντίστροφός του  $B^{-1}$ . Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση  $(\dagger)$  από δεξιά με τον πίνακα  $B^{-1}$  θα έχουμε:

$$A + B = AB \implies (A + B)B^{-1} = ABB^{-1} \implies AB^{-1} + I_n = A \implies A - AB^{-1} = I_n \implies A(I_n - B^{-1}) = I_n$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση, ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και  $A^{-1} = I_n - B^{-1}$ . Τέλος έχουμε ότι

$$A^{-1} + B^{-1} = I_n - B^{-1} + B^{-1} = I_n$$

**Άσκηση 33.** Έστω  $A, B$  δύο αντιστρέψιμοι  $n \times n$  πίνακες έτσι ώστε ο πίνακας  $A + B^{-1}$  να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας  $A^{-1} + B$  είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$$

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
&(A^{-1} + B) \cdot (A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}) = ((A^{-1} + B) \cdot A) \cdot ((A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}) = \\
&= (A^{-1} \cdot A + B \cdot A) \cdot ((B \cdot (A + B^{-1}))^{-1}) = (I_n + B \cdot A) \cdot ((B \cdot A + B \cdot B^{-1})^{-1}) = \\
&= (I_n + B \cdot A) \cdot (I_n + B \cdot A)^{-1} = I_n
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση, ο πίνακας  $A^{-1} + B$  είναι αντιστρέψιμος και  $(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$ . Διαφορετικά, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
&(A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}) \cdot (A^{-1} + B) = (A \cdot (A + B^{-1})^{-1}) \cdot (B^{-1} \cdot (A^{-1} + B)) = \\
&= (A \cdot (A + B^{-1})^{-1}) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1} + B^{-1} \cdot B) = (A \cdot (A + B^{-1})^{-1}) \cdot ((A \cdot B)^{-1} + I_n) = \\
&= ((A^{-1})^{-1} \cdot (A + B^{-1})^{-1}) \cdot ((A \cdot B)^{-1} + I_n) = (((A + B^{-1}) \cdot A^{-1})^{-1}) \cdot ((A \cdot B)^{-1} + I_n) =
\end{aligned}$$

<sup>8</sup>Αν ο πίνακας  $I_n + BA$  είναι αντιστρέψιμος, θέτουμε  $D = (I_n + BA)^{-1}$  και τότε  $(I_n + BA) \cdot D = I_n$ . Επομένως θα έχουμε  $BAD = I_n - D$ . Θεωρούμε τον πίνακα  $I_n - ADB$  και δείχνουμε ότι  $(I_n + AB) \cdot (I_n - ADB) = I_n = (I_n - ADB) \cdot (I_n + AB)$ . Επομένως ο πίνακας  $I_n + AB$  είναι αντιστρέψιμος και

$$(I_n + AB)^{-1} = I_n - ADB = I_n - A(I_n + BA)^{-1}B$$

$$= ((A \cdot A^{-1} + B^{-1} \cdot A^{-1})^{-1}) \cdot ((A \cdot B)^{-1} + I_n) = ((A \cdot B)^{-1} + I_n)^{-1} \cdot ((A \cdot B)^{-1} + I_n) = I_n$$

Άρα

$$(A^{-1} + B) \cdot (A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}) = I_n = (A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}) \cdot (A^{-1} + B)$$

Άρα ο πίνακας  $A^{-1} + B$  είναι αντιστρέψιμος και  $(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$ .

**Παρατήρηση.** Έστω  $A$  και  $B$  δύο αντιστρέψιμοι  $n \times n$  πίνακες. Ακολουθώντας τη μέθοδο λύσης της παραπάνω Άσκησης 33, αποδεικνύονται ακριβώς ανάλογα και οι ακόλουθοι ισχυρισμοί.

(1) Αν ο πίνακας  $A^{-1} + B$  είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας  $A + B^{-1}$  είναι αντιστρέψιμος και

$$(A + B^{-1})^{-1} = A^{-1} \cdot (A^{-1} + B)^{-1} \cdot B$$

(2) Αν ο πίνακας  $A^{-1} + B^{-1}$  είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας  $A + B$  είναι αντιστρέψιμος και

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} \cdot (A^{-1} + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$$

(3) Αν ο πίνακας  $A + B$  είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας  $A^{-1} + B^{-1}$  είναι αντιστρέψιμος και

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A \cdot (A + B)^{-1} \cdot B$$

**Άσκηση 34.** Να ευρεθούν όλοι οι πίνακες που μετατίθενται με τους πίνακες της μορφής:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Λύση.** Ας είναι  $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ένας πίνακας με  $AC = CA$ , δηλαδή  $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{pmatrix}$ . Τότε  $b = 0$  και  $c = d - a$ . Επομένως ο πίνακας  $C$  είναι της μορφής

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ d-a & d \end{pmatrix} \quad (a, d \in \mathbb{K})$$

Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε ότι κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής μετατίθεται με τον  $A$ .

Ας είναι  $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$  ένας πίνακας με  $BC = CB$ , δηλαδή  $\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$ . Τότε

$$d = 0, \quad g = 0, \quad h = 0, \quad e = a, \quad k = a, \quad f = b$$

Επομένως ο πίνακας  $C$  είναι της μορφής

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{K})$$

Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε ότι κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής μετατίθεται με τον  $B$ .

**Άσκηση 35.** Να προσδιοριστούν όλοι οι  $2 \times 2$  ταυτοδύναμοι πίνακες.

**Λύση.** Ας είναι  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ένας  $2 \times 2$  πίνακας με  $A^2 = A$ , δηλαδή

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 + bc = a & (1) \\ ab + bd = b & (2) \\ ac + cd = c & (3) \\ bc + d^2 = d & (4) \end{cases}$$

Έστω ότι  $b \neq 0$ , τότε η (2) δίνει τη λύση  $d = 1 - a$ , η οποία ικανοποιεί και την (3). Από την (1) έχουμε  $c = \frac{a-a^2}{b}$ . Αυτές οι τιμές των  $c, d$  ικανοποιούν την (4). Άρα αν  $b \neq 0$ , τότε οι ταυτοδύναμοι  $2 \times 2$  πίνακες με στοιχεία από το σώμα  $\mathbb{K}$  είναι οι πίνακες της μορφής:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$$

Έστω ότι  $b = 0$ , τότε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γίνεται

$$\begin{cases} a^2 = a \\ ac + cd = c \\ d^2 = d \end{cases}$$

Παίρνοντας υπ' όψιν ότι  $a = 0$  ή  $1$  και  $d = 0$  ή  $1$  έχουμε τις λύσεις:  $(a = 0, b = 0, d = 1, c \in \mathbb{K})$ ,  $(a = 1, b = 0, d = 0, c \in \mathbb{K})$ ,  $(a = 0, b = 0, c = 0, d = 0)$ ,  $(a = 0, b = 0, c = 0, d = 1)$ ,  $(a = 1, b = 0, c = 0, d = 0)$ ,  $(a = 1, b = 0, c = 0, d = 1)$ , δηλαδή οι ταυτοδύναμοι  $2 \times 2$  πίνακες με στοιχεία από το σώμα  $\mathbb{K}$  είναι οι πίνακες της μορφής ( $c \in \mathbb{K}$ ):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συνοψίζοντας οι ταυτοδύναμοι  $2 \times 2$  πίνακες με στοιχεία από το σώμα  $\mathbb{K}$  είναι οι πίνακες της μορφής:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{K}, b \neq 0) \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{K})$$

**Άσκηση 36.** Να προσδιοριστούν όλοι οι  $2 \times 2$  πίνακες  $A$  που υψούμενοι στο τετράγωνο είναι ίσοι με τον μηδενικό  $2 \times 2$  πίνακα, δηλαδή όλοι οι  $2 \times 2$  πίνακες  $A$  για τους οποίους ισχύει ότι  $A^2 = O$ .

**Λύση.** Ας είναι  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ένας  $2 \times 2$  πίνακας με  $A^2 = O$ , δηλαδή

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ ab + bd = 0 & (2) \\ ac + cd = 0 & (3) \\ bc + d^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Έστω ότι  $b \neq 0$ , τότε η (1) δίνει  $c = -\frac{a^2}{b}$  και η (2) δίνει  $d = -a$ . Οι (3) και (4) ικανοποιούνται από τις προηγούμενες λύσεις. Έτσι προκύπτουν οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \quad (b \neq 0)$$

Έστω ότι  $b = 0$ , τότε επειδή έπεται  $a = 0$  και  $d = 0$ , έχουμε τη λύση  $a = 0, b = 0, c \in \mathbb{K}, d = 0$ . Δηλαδή προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{K})$$

Συνοψίζοντας οι  $2 \times 2$  πίνακες  $A$  με στοιχεία από το σώμα  $\mathbb{K}$  έτσι ώστε  $A^2 = O$ , είναι οι πίνακες της μορφής:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{K}, b \neq 0) \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{K})$$