ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B}'}$ (Μ-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 4 Νοεμβρίου 2022

Άσκηση 1. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, όπου $n \geq 2$.*

Χρησιμοποιώντας ότι η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογιστεί ως το ανάπτυγμα της κατά τα στοιχεία τυχούσας στήλης ή γραμμής και ότι η ορίζουσα του πίνακα δεν αλλάζει αν σε μια γραμμή ή στήλη προσθέσουμε πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ή στήλης αντίστοιχα, να δειχθούν τα ακόλουθα:

(1) *Αν ο πίνακας A έχει δύο διαδοχικές στήλες ίσες ή δύο γραμμές ίσες, τότε $|A| = 0$.*
(2) *Αν στον πίνακα A εναλλάξουμε αμοιβαία δύο διαδοχικές στήλες ή γραμμές, τότε η ορίζουσα του πίνακα A αλλάζει πρόσημο. Δηλαδή, αν $1 \leq k \leq n-1$,τότε:*

$$A \xmapsto{\Sigma_k \leftrightarrow \Sigma_{k+1}} A' \quad \Longrightarrow \quad |A'| = -|A|$$

(3) *Αν ο πίνακας A έχει δύο στήλες ίσες ή δύο γραμμές ίσες, τότε $|A| = 0$.*

Λύση. *Εργαζόμαστε με στήλες (η διαδικασία για γραμμές είναι ανάλογη).*

Χάριν ευκολίας, θα θεωρούμε τον πίνακα A ως το σύνολο των n το πλήθος στηλών του και θα γράφουμε:

$$A = \Big(\Sigma_1 \cdots \Sigma_i \cdots \Sigma_j \cdots \Sigma_n\Big), \quad \text{όπου} \quad \Sigma_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n$$

(1) *Υποθέτουμε ότι οι διαδοχικές στήλες Σ_k και Σ_{k+1} είναι ίσες: $\Sigma_k = \Sigma_{k+1}$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι: $|A| = 0$.*

• *Αν $n = 2$, τότε $\Sigma_1 = \Sigma_2$ και ο πίνακας A θα είναι της μορφής $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{pmatrix}$. Προφανώς τότε θα έχουμε $|A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$.*

• <u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: *Υποθέτουμε ότι κάθε $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας, όπου $n \geq 3$, με δύο διαδοχικές στήλες ίσες, έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.*

• *Έστω τώρα ο $n \times n$ πίνακας A με $\Sigma_k = \Sigma_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$. Τότε θα έχουμε:*

$$|A| = \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_k \ \Sigma_k \cdots \Sigma_n\Big| \ \xlongequal[\text{της } k\text{-γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} \ a_{k1}A_{k\,1} + a_{k2}A_{k\,2} + \cdots + a_{kn}A_{k\,n}$$

Επειδή οι ελάσσονες ορίζουσες $\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \cdots, \Delta_{k\,k-1}, \Delta_{k\,k+2}, \cdots \Delta_{k\,n}$ είναι ορίζουσες $(n-1) \times (n-1)$ πινάκων με δύο στήλες ίσες, την k-στήλη και την $(k+1)$-στήλη, από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει *ότι* $\Delta_{k1} = \Delta_{k2} = \cdots = \Delta_{k\,k-1} = \Delta_{k\,k+2} = \cdots = \Delta_{k\,n} = 0$. *Επομένως* $A_{k1} = A_{k2} = \cdots = A_{k\,k-1} = A_{k\,k+2} = \cdots = A_{k\,n} = 0$. *Τότε η ορίζουσα του πίνακα* A *θα είναι:*

$$|A| = a_{k\,k}A_{k\,k} + a_{k\,k+1}A_{k\,k+1} = a_{k\,k}A_{k\,k} + a_{k\,k}A_{k\,k+1} = a_{kk}\big(A_{k\,k} + A_{k\,k+1}\big)$$

Επειδή οι πίνακες οι οποίοι προκύπτουν μετά τη διαγραφή της k*-στήλης και της* k*-γραμμής, και τη διαγραφή της* $(k+1)$*-στήλης και της* k*-γραμμής, είναι ίσοι, έπεται ότι* $\Delta_{k\,k} = \Delta_{k\,k+1}$. *Τότε θα έχουμε:*

$$|A| = a_{kk}\big(A_{k\,k} + A_{k\,k+1}\big)a_{kk}\big((-1)^{k+k}\Delta_{k\,k} + (-1)^{k+k+1}\Delta_{k\,k+1} =$$
$$= a_{kk}\big((-1)^{k+k}\Delta_{k\,k} + (-1)^{k+k+1}\Delta_{k\,k}\big) = a_{k\,k}\Delta_{k\,k}\big((-1)^{k+k} + (-1)^{k+k+1}\big) = 0$$

Επομένως δείξαμε, για τον $n \times n$ *πίνακα* A *με δύο διαδοχικές στήλες ίσες, ότι ισχύει* $|A| = 0$. *Άρα, σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, κάθε τετραγωνικός πίνακας με δύο διαδοχικές στήλες ίσες έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.*

(2) *Υποθέτουμε ότι*

$$A = \Big(\Sigma_1 \cdots \Sigma_k\ \Sigma_{k+1} \cdots \Sigma_n\Big) \xmapsto{\Sigma_k \leftrightarrow \Sigma_{k+1}} A' = \Big(\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1}\ \Sigma_k \cdots \Sigma_n\Big)$$

Τότε, χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες οριζουσών και το μέρος (1), θα έχουμε:

$$|A'| = \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1}\ \Sigma_k \cdots \Sigma_n\Big| \overset{\Sigma_k \to \Sigma_k + \Sigma_{k+1}}{=\!=\!=\!=\!=} \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1} + \Sigma_k\ \Sigma_k \cdots \Sigma_n\Big| \overset{\Sigma_{k+1} \to \Sigma_{k+1} - \Sigma_k}{=\!=\!=\!=\!=}$$
$$\Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1} + \Sigma_k\ \Sigma_k - \Sigma_{k+1} - \Sigma_k \cdots \Sigma_n\Big| = \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1} + \Sigma_k\ \ {-\Sigma_{k+1}} \cdots \Sigma_n\Big| =$$
$$= \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1}\ \ {-\Sigma_{k+1}} \cdots \Sigma_n\Big| + \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_k\ \ {-\Sigma_{k+1}} \cdots \Sigma_n\Big| =$$
$$= -\Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1}\ \Sigma_{k+1} \cdots \Sigma_n\Big| - \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_k\ \Sigma_{k+1} \cdots \Sigma_n\Big| = 0 - |A| = -|A|$$

Επομένως: $|A'| = -|A|$.

(3) *Υποθέτουμε ότι* $1 \leq i < j \leq n$ *και έστω ότι* $\Sigma_i = \Sigma_j$. *Τότε με διαδοχικές αμοιβαίες εναλλαγές δύο διαδοχικών στηλών μπορούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα* A *σε έναν πίνακα* B *στον οποίο οι δύο ίσες στήλες* Σ_i *και* Σ_j *είναι διαδοχικές. Τότε όμως από το μέρος (1) προκύπτει ότι* $|B| = 0$. *Επειδή ο πίνακας* B *έχει προκύψει από τον* A *με διαδοχικές αμοιβαίες εναλλαγές στηλών του, έπεται ότι* $0 = |B| = (-1)^k|A|$, *όπου* k *είναι το πλήθος των αμοιβαίων αναλλαγών στηλών του* A. *Τότε όμως* $|A| = 0$. *Άρα κάθε πίνακας με δύο στήλες ίσες έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.*

Άσκηση 2. *Έστω* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ένας* 2×2 *πίνακας με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι:*

$$|A| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{είτε υπάρχει } \lambda \in \mathbb{K}: \ a = \lambda c \text{ και } b = \lambda d \quad \text{είτε υπάρχει } \mu \in \mathbb{K}: \ c = \mu a \text{ και } d = \mu b$$

Με άλλα λόγια, η ορίζουσα ενός 2×2 *πίνακα είναι ίση με μηδέν αν και μόνον αν μία από τις δύο γραμμές είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης*[1].

Λύση. (1) *"$\Longleftarrow$"* *Αν* $a = \lambda c$ *και* $b = \lambda d$ *για κάποιο* $\lambda \in \mathbb{K}$, *τότε* $|A| = \begin{vmatrix} \lambda c & \lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda cd - \lambda cd = 0$.

Παρόμοια αν $c = \mu a$ *και* $d = \mu b$ *για κάποιο* $\mu \in \mathbb{K}$, *τότε:* $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ \mu a & \mu b \end{vmatrix} = \mu ab - \mu ab = 0$.

(2) *"$\Longrightarrow$"* *Έστω ότι* $|A| = 0$ *και επομένως* $ad = bc$. *Διακρίνουμε περιπτώσεις:*

(α') *Υποθέτουμε ότι* $d \neq 0$.

(i) *Αν* $c \neq 0$, *τότε ορίζονται τα κλάσματα* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} := \lambda \in \mathbb{K}$ *και τότε προφανώς θα έχουμε* $a = \lambda c$ *και* $b = \lambda d$.

(ii) *Αν* $c = 0$, *τότε* $ad = 0$ *και επειδή* $d \neq 0$, *θα έχουμε* $a = 0$. *Επειδή* $d \neq 0$, *ορίζεται το κλάσμα* $\frac{b}{d} := \lambda \in \mathbb{K}$ *και τότε θα έχουμε* $b = \lambda d$ *και* $a = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda c$.

Άρα αν $d \neq 0$, *υπάρχει πάντα* $\lambda \in \mathbb{K}$ *έτσι ώστε:* $a = \lambda c$ *και* $b = \lambda d$.

(β') *Υποθέτουμε ότι* $d = 0$.

[1] Το συμπέρασμα της Άσκησης εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τις γραμμές με τις στήλες, δηλαδή: η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα είναι ίση με μηδέν αν και μόνον αν μία από τις δύο στήλες του είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης.

(i) Αν $b \neq 0$, τότε επειδή $0 = ad = bc$, θα έχουμε $c = 0$. Θέτοντας $\mu = 0$, θα έχουμε: $\mu \cdot a = 0 = c$ και $\mu \cdot b = 0 = d$.

(ii) Αν $b = 0$, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

(Α΄) Αν $c = 0$, τότε θέτοντας $\mu = 0$, θα έχουμε $\mu a = 0 = c$ και $\mu b = 0 = d$.

(Β΄) Αν $c \neq 0$, τότε εξετάζουμε το στοιχείο a. Αν $a = 0$, τότε θέτοντας $\mu = 0$, θα έχουμε: $\mu \cdot a = 0 = c$ και $\mu \cdot b = 0 = d$. Αν $a \neq 0$, τότε ορίζεται το κλάσμα $\frac{c}{a} := \mu$ και τότε: $\mu \cdot a = c$ και $\mu \cdot b = 0 = d$.

Άρα αν $d = 0$, υπάρχει πάντα $\mu \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $\mu a = c$ και $\mu b = d$.

Άσκηση 3. *Χωρίς να υπολογιστεί, να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

Λύση. *Θεωρούμε τον ανάστροφο πίνακα ${}^tA$ του A και υπολογίζουμε τον πίνακα $A \cdot {}^tA$:*

$$A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $|{}^tA| = |A|$, θα έχουμε:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^4 = |A \cdot {}^tA| = |A| \cdot |{}^tA| = |A| \cdot |A| = |A|^2 \quad \Longrightarrow \quad |A| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

Άσκηση 4. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -16 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της πρώτης γραμμής}]{\text{Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία}} \begin{vmatrix} -5 & 12 & -16 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_3} \begin{vmatrix} -5 & 12 & -16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της δεύτερης γραμμής}]{\text{Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία}} (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -16 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 16 = 1$$

Άσκηση 5. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής θα έχουμε:*

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 6 = -6!$$

Άσκηση 6. *Χωρίς να υπολογιστούν οι ορίζουσες, να δειχθεί ότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ -2 & 22 & -222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix}$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ -2 & 22 & -222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ 2 & -22 & 222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_2 \to -\Sigma_2} (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 7. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα*

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+2a & 1+2b & 1+2c \\ 1+3a & 1+3b & 1+3c \end{vmatrix}$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+2a & 1+2b & 1+2c \\ 1+3a & 1+3b & 1+3c \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+2a & 1+2b & 1+2c \\ a & b & c \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

διότι ο τελευταίος πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες.

Άσκηση 8. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Λύση. *Έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha+\beta+\gamma & \beta+\gamma+\alpha & \gamma+\alpha+\beta \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \cdot 0 = 0$$

όπου η προτελευταία ισότητα προέκυψε διότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}$ *έχει δύο γραμμές ίσες.*

Άσκηση 9. *Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \qquad (\textit{ορίζουσα } \textsc{Vandermonde} \textit{ τρίτης τάξης})$$

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_1 \to \Sigma_1 - \Sigma_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha-\beta & \beta & \gamma \\ \alpha^2-\beta^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\alpha-\beta)\cdot 0 & 1 & 1 \\ (\alpha-\beta)\cdot 1 & \beta & \gamma \\ (\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\beta)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3} (\alpha-\beta)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \beta-\gamma & \gamma \\ \alpha+\beta & \beta^2-\gamma^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\beta)\cdot \begin{vmatrix} 0 & (\beta-\gamma)\cdot 0 & 1 \\ 1 & (\beta-\gamma)\cdot 1 & \gamma \\ \alpha+\beta & (\beta-\gamma)\cdot(\beta+\gamma) & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \\ \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} =$$

$$\xlongequal[\textit{της πρώτης γραμμής}]{\textit{Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία}} (\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+\beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\beta+\gamma-\alpha-\beta) =$$

$$= (\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\gamma-\alpha)$$

Άσκηση 10. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ (\alpha_2-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_3 \\ (\alpha_3-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1) \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα με δύο ίσες γραμμές είναι ίση με μηδέν.

Άσκηση 11. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2(x) & 1 & \cos^2(x) \\ \sin^2(y) & 1 & \cos^2(y) \\ \sin^2(z) & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix}$

Λύση. *Έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} \sin^2(x) & 1 & \cos^2(x) \\ \sin^2(y) & 1 & \cos^2(y) \\ \sin^2(z) & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_3} \begin{vmatrix} \sin^2(x)+\cos^2(x) & 1 & \cos^2(x) \\ \sin^2(y)+\cos^2(y) & 1 & \cos^2(y) \\ \sin^2(z)+\cos^2(z) & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos^2(x) \\ 1 & 1 & \cos^2(y) \\ 1 & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix} = 0$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα με δύο ίσες στήλες είναι ίση με μηδέν.

Άσκηση 12. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η ορίζουσα $|A|$ του 4×4 πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της τέταρτης γραμμής}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$= (4-\lambda^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της δεύτερης γραμμής}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} (4-\lambda^2)(1-\lambda^2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3(1-\lambda^2)(4-\lambda^2)$$

Άσκηση 13. *Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{K})$ ο οποίος ικανοποιεί την σχέση:*

$$A^2 + 2 \cdot A = O$$

Να δείξετε ότι ο πίνακας $A + I_3$ είναι αντιστρέψιμος, να βρείτε τον $(A+I_3)^{-1}$, και να υπολογίσετε την ορίζουσα $|A|$ του A.

Λύση. *Στην ισότητα 3×3 πινάκων $A^2 + 2 \cdot A = \mathbb{O}$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον μοναδιαίο 3×3 πίνακα I_3 και θα έχουμε:*

$$A^2 + 2 \cdot A = O \implies A^2 + 2 \cdot A + I_3 = O + I_3 = I_3 \implies (A + I_3) \cdot (A + I_3) = I_3$$

Επομένως $(A + I_3) \cdot (A + I_3) = I_3 = (A + I_3) \cdot (A + I_3)$ και άρα ο πίνακας $A + I_3$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(A + I_3)^{-1} = A + I_3$$

Από τη σχέση $A^2 + 2 \cdot A = O$ έπεται ότι

$$A \cdot (A + 2I_3) = O \implies |A \cdot (A + 2I_3)| = |O| \implies |A| \cdot |A + 2I_3| = 0 \implies |A| = 0 \ \text{ ή } \ |A + 2I_3| = 0$$

Αν $|A| \neq 0$, τότε γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και επομένως υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1}. Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τη σχέση $A^2 + 2A = O$ με τον πίνακα A^{-1} θα έχουμε:

$$A^{-1} \cdot (A^2 + 2A) = A^{-1} \cdot O \implies A^{-1} \cdot A \cdot (A + 2I_3) = O \implies I_3 \cdot (A + 2I_3) = O \implies A + 2I_3 = O$$
$$\implies A = -2I_3$$

Θεωρώντας ορίζουσες και στα δύο μέλη θα έχουμε:

$$|A| = |-2I_3| = (-2)^3 |I_3| = -8$$

Συνοψίζοντας δείξαμε ότι:

$$|A| = \begin{cases} 0, & \text{αν ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος} \\ -8, & \text{αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος} \end{cases}$$

Άσκηση 14. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.*

(1) *Αν ο n είναι περιττός και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν πίνακες $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε: $A^2 + I_n = O$.*
(2) *Αν ο n είναι περιττός και $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ έτσι ώστε: $A^2 + I_n = O$.*
(3) *Αν ο n είναι άρτιος και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ έτσι ώστε: $A^2 + I_n = O$.*

Λύση. (1) *Έστω ότι ο n είναι περιττός και υπάρχει πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A^2 + I_n = O$. Τότε $A^2 = -I_n$ και επομένως χρησιμοποιώντας ότι ο n είναι περιττός, θα έχουμε:*

$$|A^2| = |-I_n| \implies |A|^2 = (-1)^n |I_n| \implies |A|^2 = (-1)^n \implies |A|^2 = -1$$

Επειδή $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, θα έχουμε $|A| \in \mathbb{R}$ και επομένως η παραπάνω σχέση είναι αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A^2 + I_n = O$.

(2) *Θεωρούμε τον διαγώνιο* 3×3 *πίνακα μιγαδικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A^2 = \begin{pmatrix} i^2 & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3 \quad \Longrightarrow \quad A^2 + I_2 = O$$

(3) *Θεωρούμε τον διαγώνιο* 2×2 *πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \quad \Longrightarrow \quad A^2 + I_2 = O$$

Άσκηση 15. *Θεωρούμε* 2×2 *πίνακες* A *και* B *με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$ *και υποθέτουμε ότι:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $x, y \in \mathbb{K}$. *Να βρεθούν οι αριθμοί* x, y. *Αν ο πίνακας* A *είναι γνωστός, μπορεί να προσδιοριστεί ο πίνακας* B;

Λύση. *Γνωρίζουμε ότι, για τυχόντες* $n \times n$ *πίνακες* A *και* B, *ισχύει ότι:*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |B \cdot A|$$

και

$$\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA)$$

Επομένως θα έχουμε:

$$4 = |A \cdot B| = |B \cdot A| = y + x(x-1) \quad \text{και} \quad 5 = \mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA) = y + 1$$

Επομένως

$$y = 4 \quad \text{και} \quad x(x-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 4 \quad \text{και} \quad x = \begin{cases} 0 \\ \text{ή} \\ 1 \end{cases}$$

Έτσι θα έχουμε

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν ο πίνακας A *είναι γνωστός:* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *τότε έστω* $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. *Επομένως θα έχουμε:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bw = 0 \\ cx + dz = 2 \\ cy + dw = 4 \end{cases}$$

Το (Σ) είναι ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y, z, w και ο πίνακας των συντελεστών του (Σ) είναι ο

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Έτσι το σύστημα (Σ) γράφεται

$$(\Sigma) \quad C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα C κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$|C| = (ad - bc)^2 = |A|^2$$

Επειδή $4 = |AB| = |A| \cdot |B|$, προκύπτει ότι $|A| \neq 0$ και επομένως $|C| \neq 0$. Τότε ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος και άρα το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας B προσδιορίζεται μοναδικά αν γνωρίζουμε τον πίνακα A.

Άσκηση 16. Έστω A ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Αν ο n είναι περιττός, να δειχθεί ότι $|A| = 0$. Ακολούθως να δοθούν παραδείγματα αντισυμμετρικών 2×2 και 4×4 πινάκων με μη μηδενική ορίζουσα.

Λύση. Από τον ορισμό αντισυμμετρικού πίνακα, έχουμε ${}^tA = -A$. Επομένως, επειδή οι πίνακες ${}^tA$ και A έχουν τιν ίδια ορίζουσα, θα έχουμε:

$$|A| = |{}^tA| = |-A| = (-1)^n |A|$$

Αν ο n είναι περιττός, τότε $|A| = -|A|$ απ' όπου $2|A| = 0$, δηλαδή $|A| = 0$.

Οι ακόλουθοι πίνακες είναι αντισυμμετρικοί με μη-μηδενική ορίζουσα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 17. Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = 0$, όπου $i^2 = -1$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1-x & -1+x & 0 \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 + \Sigma_1} (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & i \\ -i & -2i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & i \\ -2i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2 - 5x + 4)$$

’ρα, έπεται ότι

$$(1-x)(x^2 - 5x + 4) = 0 \implies (1-x)(x-1)(x-4) = 0 \implies \begin{cases} x = 1, & \text{πολλαπλότητας 2.} \\ x = 4, & \text{απλή.} \end{cases}$$

Άσκηση 18. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Λύση. *Αφαιρώντας διαδοχικά την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες γραμμές, έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\cdots,\, \Gamma_n \to \Gamma_n - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

Άσκηση 19. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Λύση. *Προσθέτοντας την πρώτη γραμμής σε όλες τις υπόλοιπες θα έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\cdots,\, \Gamma_n \to \Gamma_n + \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 2\cdot 3 & \cdots & 2\cdot n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2\cdot n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)\cdot n = n!$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

Άσκηση 20. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα του* $n \times n$ *πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} \xlongequal[2 \le k \le n]{\Sigma_k \to \Sigma_k - k\Sigma_{k-1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & \cdots & -(n-2) & -(n-1) \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -(n-3) & -(n-2) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -(n-4) & -(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{της τελευταίας γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατα τα στοιχεία}} (-1)^{n+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & \cdots & -(n-1) \\ 0 & -1 & \cdots & -(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^{2n} = 1$$

Άσκηση 21. *Να υπολογισθεί η* $n\times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$.

Λύση. *Θέτουμε*

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{pmatrix}$$

Αν $n=1$, *τότε* $|A_1| = 3 = 2^{1+1}-1$.

Αν $n=2$, *τότε* $|A_2| = 9-2 = 7 = 2^{2+1}-1$.

Αν $n=3$, *τότε με τον κανόνα του Sarrus, υπολογίζουμε εύκολα ότι* $|A_3| = 15 = 2^{3+1}-1$.

Με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής, θα δείξουμε ότι:

(1) $$|A_n| = 2^{n+1}-1$$

Από την παραπάνω ανάλυση, έπεται ότι η σχέση (1) ισχύει οταν $n=1,2,3$.

Επαγωγική Υπόθεση: *Υποθέτουμε ότι:*

$$|A_k| = 2^{k+1}-1, \quad \text{για κάθε} \quad 1\le k\le n$$

Έστω $n\ge 3$. *Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα* A_n *κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, θα έχουμε:*

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = 3|A_{n-1}| - 2|A_{n-2}|$$

Να σημειώσουμε ότι οι ορίζουσες μετά την δεύτερη ισότητα είναι $(n-1)\times(n-1)$, *και η ορίζουσα* $|A_{n-2}|$ *πρόεκυψε αναπτύσσοντας την ορίζουσα πριν την τελευταία ισότητα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Επομένως, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, θα έχουμε:*

$$|A_{n+1}| = 3|A_n| - 2|A_{n-1}| = 3\cdot(2^{n+1}-1) - 2\cdot(2^n-1) = 3\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 2^n - 3 + 2 = 3\cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} - 1 = 2\cdot 2^{n+1} - 1 =$$

$$= 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Επομένως η σχέση (1) είναι αληθής και για $k = n+1$. *Τότε από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, έπεται ότι η σχέση (1) είναι αληθής για κάθε* $n\ge 1$.

Άσκηση 22. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Λύση. • *Αν $n = 1$, τότε*

$$|A_1| = 9 = 25 - 16 = 5^{1+1} - 4^{1+1}$$

• *Αν $n = 2$, τότε*

$$|A_2| = 61 = 125 - 64 = 5^{2+1} - 4^{2+1}$$

• *Αν $n = 3$, τότε με τον κανόνα του Sarrus, υπολογίζουμε εύκολα ότι*

$$|A_3| = 369 = 549 - 180\frac{609}{3} = 5^{3+1} - 4^{3+1}$$

Με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής, θα δείξουμε ότι:

(2) $$|A_n| = 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: *Υποθέτουμε ότι:*

$$|A_k| = 5^{k+1} - 4^{k+1} \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq k < n$$

Θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια έναν αναδρομικό τύπο ο οποίος συνδέει την ορίζουσα του πίνακα A_n με τις ορίζουσες των πινάκων A_{n-1} και A_{n-2}.

Θα έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} \underset{\text{της πρώτης στήλης}}{\overset{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{πρώτης γραμμής της δεύτερης ορίζουσας}}{\overset{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= 9|A_{n-1}| - 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 9|A_{n-1}| - 20|A_{n-2}|$$

Άρα, $\forall n \geq 1$:

$$|A_n| = 9|A_{n-1}| - 20|A_{n-2}| \tag{3}$$

Τότε χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, θα έχουμε:

$$|A_n| = 9|A_{n-1}| - 20|A_{n-2}| = 9\big(5^{n-1+1} - 4^{n-1+1}\big) - 20\big(5^{n-2+1} - 4^{n-2+1}\big) = 9\big(5^n - 4^n\big) - 20\big(5^{n-1} - 4^{n-1}\big) =$$

$$= 9 \cdot 5^n - 9 \cdot 4^n - 4 \cdot 5^n + 5 \cdot 4^n = 5 \cdot 5^n - 4 \cdot 4^n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

Άρα με χρήση της Αρχής Μαθηματικης Επαγωγής έπεται ότι, $\forall n \geq 1$:

$$|A_n| = 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

Άσκηση 23. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Λύση. • Αν $n = 1$, τότε

$$|A_1| = 7 = \frac{21}{3} = \frac{5^{1+1} - 2^{1+1}}{5 - 2}$$

• Αν $n = 2$, τότε

$$|A_2| = 39 = \frac{117}{3} = \frac{5^{2+1} - 2^{2+1}}{5 - 2}$$

• Αν $n = 3$, τότε με τον κανόνα του Sarrus, υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$|A_3| = 203 = \frac{609}{3} = \frac{5^{3+1} - 2^{3+1}}{5 - 2}$$

Με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής, θα δείξουμε ότι:

$$|A_n| = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{5 - 2} = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} \tag{4}$$

Από την παραπάνω ανάλυση, έπεται ότι η σχέση (4) ισχύει οταν $n = 1, 2, 3$.

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: Υποθέτουμε ότι:

$$|A_k| = \frac{5^{k+1} - 2^{k+1}}{3} \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq k < n$$

Θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια έναν αναδρομικό τύπο ο οποίος συνδέει την ορίζουσα του πίνακα A_n με τις ορίζουσες των πινάκων A_{n-1} και A_{n-2}.

Θα έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}{\underset{\text{πρώτης στήλης}}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= 7\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}{\underset{\text{πρώτης γραμμής της δεύτερης ορίζουσας}}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= 7|A_{n-1}| - 2\cdot 5\begin{vmatrix} 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7|A_{n-1}| - 10|A_{n-2}|$$

Άρα, $\forall n \geq 1$*:*

(5)
$$|A_n| = 7|A_{n-1}| - 10|A_{n-2}|$$

Τότε χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, θα έχουμε:

$$|A_n| = 7|A_{n-1}| - 10|A_{n-2}| = 7\frac{5^{n-1+1} - 2^{n-1+1}}{3} - 10\frac{5^{n-2+1} - 2^{n-2+1}}{3} = 7\frac{5^n - 2^n}{3} - 10\frac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3} =$$

$$= \frac{7\cdot 5^n - 7\cdot 2^n - 2\cdot 5\cdot 5^{n-1} + 5\cdot 2\cdot 2^{n-1}}{3} = \frac{7\cdot 5^n - 7\cdot 2^n - 2\cdot 5^n + 5\cdot 2^n}{3} = \frac{5\cdot 5^n - 2\cdot 2^n}{3} = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$$

Άρα με χρήση της Αρχής Μαθηματικης Επαγωγής έπεται ότι, $\forall n \geq 1$*:*

$$|A_n| = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$$

Άσκηση 24. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του* $n \times n$ *πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Λύση. *Αναπτύσσοντας την ορίζουσα* $|A_n|$ *κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, έχουμε:*

$$|A_n| = (\alpha+\beta)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} - \alpha\beta\begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορίζουσες είναι $(n-1)\times(n-1)$. *Παρατηρούμε ότι η πρώτη ορίζουσα είναι η αρχική που ξεκινήσαμε αλλά μεγέθους* $(n-1)\times(n-1)$ *και αν αναπτύξουμε την δεύτερη ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη, τότε καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση:*

(6) $$|A_n| = (\alpha+\beta)|A_{n-1}| - \alpha\beta|A_{n-2}|$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_n|$, *ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:*

$$|A_1| = \alpha+\beta$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_k| = \alpha^k+\alpha^{k-1}\beta+\alpha^{k-2}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{k-2}+\alpha\beta^{k-1}+\beta^k\ ,\ k\geq 1. \qquad (*)$$

1. *Για* $k=1$, *η ζητούμενη σχέση* $(*)$ *ισχύει αφού* $|A_1|=\alpha+\beta$.

2. Υπόθεση Επαγωγής: *Έστω ότι η ζητούμενη σχέση* $(*)$ *ισχύει για* $k\leq n$, *δηλαδή δεχόμαστε ότι:*
$$|A_k| = \alpha^k+\alpha^{k-1}\beta+\alpha^{k-2}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{k-2}+\alpha\beta^{k-1}+\beta^k$$

3. *Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση* $(*)$ *ισχύει για* $k=n+1$. *Έχουμε*
$$\begin{aligned}|A_{n+1}| \overset{(6)}{=} (\alpha+\beta)|A_n|-\alpha\beta|A_{n-1}| &= (\alpha+\beta)(\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n)\\ &\quad -\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})\\ &= \alpha^{n+1}+\alpha^n\beta+\cdots+\alpha\beta^n+\beta^{n+1}\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε, $\forall n\geq 1$:
$$|A_n| = \alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{n-2}+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$$

Άσκηση 25. *Να υπολογισθεί η* $2n\times 2n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}$.

Λύση. *Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα* $|A_{2n}|$ *ως προς την πρώτη στήλη, τότε έχουμε:*

$$|A_{2n}| = \alpha\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & 0 & \cdots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix} - \beta\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορίζουσες είναι $(2n-1)\times(2n-1)$. *Αν αναπτύξουμε την πρώτη ορίζουσα ως προς τη τελευταία γραμμή και τη δεύτερη ορίζουσα ως προς τη πρώτη γραμμή, τότε καταλήγουμε*

(7) $$|A_{2n}| = \alpha^2|A_{2n-2}| - \beta^2|A_{2n-2}| = (\alpha^2-\beta^2)|A_{2n-2}|$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_{2n}|$, *ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:*

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

$$|A_6| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2 - \beta^2)^3$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_{2k}| = (\alpha^2 - \beta^2)^k \ , \ k \geq 1. \tag{$*$}$$

1. *Για $k = 1$, η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει αφού $|A_2| = \alpha^2 - \beta^2$.*
2. Υπόθεση Επαγωγής: *Έστω ότι ισχύει για $k < n$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:*

$$|A_{2k}| = (\alpha^2 - \beta^2)^k$$

3. *Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k = n$. Έχουμε*

$$|A_{2n}| \overset{(7)}{=} (\alpha^2 - \beta^2)|A_{2n-2}| = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)^{n-1} = (\alpha^2 - \beta^2)^n$$

'ρα, έχουμε $|A_{2n}| = (\alpha^2 - \beta^2)^n \ , \ \forall n \geq 1.$

Άσκηση 26. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του ακόλουθου $n \times n$ πίνακα A, όπου $x \in \mathbb{R}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Λύση. *Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα $|A_n|$ ως προς την πρώτη γραμμή, τότε έχουμε:*

$$|A_n| = (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορίζουσες είναι $(n-1) \times (n-1)$. Παρατηρούμε ότι η πρώτη ορίζουσα είναι η αρχική που ξεκινήσαμε αλλά διάστασης $(n-1) \times (n-1)$ και αν αναπτύξουμε την δεύτερη ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη, τότε έχουμε

$$|A_n| = (1+x^2)|A_{n-1}| - x^2|A_{n-2}| \tag{8}$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_n|$, ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:

$$|A_1| = 1 + x^2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+x^6$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_k| = 1+x^2+x^4\cdots+x^{2k}\ ,\ k\geq 1. \tag{$*$}$$

1. *Για $k=1$, η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει αφού $|A_1| = 1+x^2$.*
2. <u>Υπόθεση Επαγωγής</u>: *Έστω ότι ισχύει για $k\leq n$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:*

$$|A_k| = 1+x^2+\cdots+x^{2k}$$

3. *Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k=n+1$. Έχουμε*

$$|A_{n+1}| \overset{(8)}{=} (1+x^2)|A_n| - x^2|A_{n-1}| = (1+x^2)(1+x^2+\cdots+x^{2n}) - x^2(1+x^2+\cdots+x^{2(n-1)})$$
$$= 1+x^2+\cdots+x^{2n+2}$$

Επομένως, έχουμε $|A_n| = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}\ ,\ \forall n\geq 1.$

Άσκηση 27. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα:*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \end{pmatrix}.$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_n\to\Gamma_n+\Gamma_1+\Gamma_2+\cdots+\Gamma_{n-1}}$$

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ n-n & n-n & n-n & \cdots & n-n & n-n & n-n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Άσκηση 28. *Να λυθεί η εξίσωση ως προς x: $|A| = 0$, όπου A είναι ο ακόλουθος $n \times n$ πίνακας:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-x \end{pmatrix}.$$

Λύση. *Αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από όλες τις υπόλοιπες, θα έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-x \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1,\ \Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1}{\underset{\cdots,\,\Gamma_n\to\Gamma_n-\Gamma_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-1-x \end{vmatrix} = (-x)(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του. Επομένως

$$|A| = 0 \implies (-x)(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x) = 0 \implies x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } \cdots \text{ ή } x = n-1$$

Δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης $|A| = 0$ είναι οι αριθμοί: $0, 1, 2, \cdots, n-1$.

Άσκηση 29. *Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να έχει η ορίζουσα ενός 5×5 πίνακα τής μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix};$$

(Με «$\star$» συμβολίζουμε αυθαίρετες τιμές στοιχείων του $\mathbb{K}$).

Λύση. *Θεωρουμε το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής του πίνακα A.*

(1) Πρώτη Περίπτωση *Αν το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής είναι μηδέν, τότε ο πίνακας A έχει την μορφή*

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής βλέπουμε ότι οφείλουμε να υπολογίσουμε δύο ορίζουσες 4×4 πινάκων που και οι δυό τους έχουν τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Οι τελευταίοι 4×4 πίνακες είναι κάτω τριγωνικοί με μηδενικό στοιχείο στην κύρια διαγώνιό τους και συνεπώς η ορίζουσά τους ισούται με μηδέν. ΄Ωστε, σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$|A| = 0$$

(2) <u>Δεύτερη Περίπτωση</u> *Αν το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής δεν είναι μηδέν, τότε αφαιρώντας ένα κατάλληλο πολλαπλάσιο τής τέταρτης γραμμής από την πέμπτη, μπορούμε να μηδενίσουμε το πέμπτο στοιχείο τής πέμπτης γραμμής. ΄Ετσι προκύπτει ο πίνακας*

$$B = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{pmatrix}$$

και εκ΄ κατασκευής έχουμε $|A| = |B|$.

Στον πίνακα B εναλλάσσουμε την πέμπτη με την τέταρτη γραμμή. ΄Ετσι προκύπτει ένας πίνακας τής μορφής

$$C = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

και εκ΄ κατασκευής έχουμε $|C| = -|B|$.

΄Ομως ο πίνακας C είναι της μορφής που μελετήσαμε στην πρώτη περίπτωση, και επομένως έχουμε $|C| = 0$. Συμπεραίνουμε ότι καιμστην δεύτερη περίπτωση έχουμε:

$$|A| = |B| = -|C| = 0$$

΄Αρα σε κάθε περίπτωση, έχουμε: $|A| = 0$.

Η **ακολουθία Fibonacci** F_n, $n \geq 0$, είναι η ακολουθία φυσικών αριθμών η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_3 = 3, \quad F_4 = 5, \quad F_5 = 8, \quad F_6 = 13, \quad F_7 = 21, \quad F_8 = 34, \quad F_9 = 55$$

και κάθε όρος της, εκτός του μηδενικού, είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων, δηλαδή, $\forall n \geq 1$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Άσκηση 30. *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$, η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

συμπίπτει με τον n-οστό όρο της ακολουθίας Fibonacci, δηλαδή: $|A_n| = F_n, \forall n \geq 1$.

Λύση. *Για* $n = 1$, *έχουμε* $|A_1| = 1 = F_1$.

Για $n = 2$, *έχουμε* $|A_2| = 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 = F_2$.

Για κάθε $n \geq 3$, *θα έχουμε:*

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της πρώτης στήλης}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Στο παραπάνω άθροισμα οριζουσών, οι ορίζουσες είναι μεγέθους $(n-1) \times (n-1)$, *και η πρώτη είναι προφανώς η ορίζουσα του πίνακα* A_{n-1}. *Αναπτύσσοντας την δεύτερη ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, η ορίζουσα η οποία θα προκύψει είναι μεγέθους* $(n-2) \times (n-2)$ *και προφανώς συμπίπτει με την ορίζουσα του πίνακα* A_{n-2}. *Επομένως, από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:*

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|$$

'Ετσι, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, έχουμε $|A_3| = |A_2| + |A_1| = 2 + 1 = 3 = F_3$. *'Ετσι, οι τρεις πρώτες ορίζουσες, συμπίπτουν με τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας Fibonacci, και κάθε μια από τις υπόλοιπες ορίζουσες προκύπτει ως το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Αυτό σημαίνει ότι* $|A_n| = F_n$.

Άσκηση 31. *'Εστω ότι* x, y *είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του* $n \times n$ *πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

Λύση. *Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του* A_n *κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, έχουμε:*

$$|A|_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}}_{\text{ορίζουσα τάξης } n-1} + (-1)^{1+n} y \underbrace{\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}}_{\text{ορίζουσα τάξης } n-1} =$$

$$= x \cdot x^{n-1} + (-1)^{n+1} y \cdot y^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

Επομένως:

$$|A_n| = x^n + (-1)^{n+1}y^n$$

Άσκηση 32. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \overset{\Gamma_i \to \Gamma_i - \Gamma_n}{\underset{1 \le i \le n-1}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1-n & 0 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ορίζουσα } (n-1)\times(n-1)}{\underset{\text{κάτω τριγωνικού πίνακα}}{=\!=\!=\!=\!=}} \quad n(-1)(-2)\cdots(3-n)(2-n)(1-n) =$$

$$= (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdots (n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n = (-1)^{n-1}n!$$

Επομένως

$$|A| = (-1)^{n-1}n!$$

Άσκηση 33. *Έστω ότι x είναι ένας πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ x & a & x & \cdots & x & x \\ x & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a & x \\ x & x & x & \cdots & x & a \end{pmatrix}$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ x & a & x & \cdots & x & x \\ x & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a & x \\ x & x & x & \cdots & x & a \end{vmatrix} \overset{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_n}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+(n-1)x & x & x & \cdots & x & x \\ a+(n-1)x & a & x & \cdots & x & x \\ a+(n-1)x & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)x & x & x & \cdots & a & x \\ a+(n-1)x & x & x & \cdots & x & a \end{vmatrix} =$$

$$= \big(a+(n-1)x\big) \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x & x \\ 1 & a & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & a & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & a \end{vmatrix} \overset{\Gamma_{i+1} \to \Gamma_{i+1} - \Gamma_i}{\underset{1 \le i \le n-1}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$\big(a+(n-1)x\big)\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-a & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & a-x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της πρώτης στήλης}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$\big(a+(n-1)x\big)\begin{vmatrix} a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x-a & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & a-x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{κάτω τριγωνικοί πίνακα}]{\text{Ορίζουσα } (n-1)\times(n-1)}$$

$$= \big(a+(n-1)x\big)(a-x)^{n-1}$$

Επομένως

$$|A_n| = \big(a+(n-1)x\big)(a-x)^{n-1}$$

Η επόμενη Άσκηση αποτελεί γενίκευση της Άσκησης 33.

Άσκηση 34. *Έστω ότι $x, a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{pmatrix}$$

Λύση. *Η τελευταία στήλη του πίνακα A μπορεί να γραφεί*

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ \vdots \\ x \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ \vdots \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n - x \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αν μια στήλη Σ_j ενός πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα $\Sigma'_j + \Sigma''_j$ δύο στηλών Σ'_j και Σ''_j, τότε η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα των οριζουσών $|A'| + |A''|$ δύο πινάκων A' και A'', οι οποίοι προκύπτουν από τον A αντικαθιστώντας την j-στήλη του A με τις στήλες Σ'_j και Σ''_j αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα στην τελευταία στήλη του πίνακα A έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & 0 \\ x & a_2 & x & \cdots & x & 0 \\ x & x & a_3 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & a_n - x \end{vmatrix}$$

- *Αναπτύσσοντας την δεύτερη ορίζουσα κατά τα στοιχεία της τελευταίας στήλης, έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & 0 \\ x & a_2 & x & \cdots & x & 0 \\ x & x & a_3 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & a_n - x \end{vmatrix} = (a_n - x) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix} = (a_n - x)|A_{n-1}|$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε διότι η τελευταία ορίζουσα είναι μεγέθους $(n-1)\times(n-1)$ και άρα ταυτίζεται με την ορίζουσα του πίνακα A_{n-1}.

- *Για την πρώτη ορίζουσα εργαζόμαστε ως εξής: αφαιρούμε την τελευταία στήλη από όλες τις υπόλοιπες και έχουμε:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & a_2 - x & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & a_3 - x & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - x & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε διότι ο πίνακας πριν την ισότητα είναι άνω τριγωνικός.

Συνοψίζοντας δείξαμε ότι:

$$|A_n| = (a_n - x)|A_{n-1}| + x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-1} - x) \tag{9}$$

Ισχυρισμός: Η ορίζουσα του πίνακα A_n είναι ίση με:

$$\begin{aligned} |A_n| \;=\; & x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x) \\ + \; & x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-2} - x)(a_n - x) \\ & \vdots \\ + \; & x(a_2 - x)(a_3 - x)\cdots(a_{n-1} - x)(a_n - x) \\ + \; & (a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-1} - x)(a_n - x) \end{aligned} \tag{$*$}$$

- *Αν $n = 1$, τότε προφανώς $|A_1| = a_1 = x + (a_1 - x)$, και επομένως ο παραπάνω τύπος (*) ισχύει.*

- *Αν $n = 2$, τότε προφανώς*

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_1 & x \\ x & a_2 \end{vmatrix} a_1a_2 - x^2 = x(a_1 - x) + x(a_2 - x) + (a_1 - x)(a_2 - x)$$

και επομένως ο παραπάνω τύπος $(*)$ ισχύει.

- *Επαγωγική Υπόθεση Υποθέτουμε ότι ο παραπάνω τύπος (*) ισχύει για $k = n$.*

Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει για $k = n + 1$. Πράγματι θα έχουμε:

$$|A_{n+1}| \overset{(9)}{=} (a_{n+1} - x)|A_n| + x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-1} - x)(a_n - x)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση την ορίζουσα $|A_n|$ από τη σχέση (*), εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
|A_{n+1}| &= x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_{n-1}-x)(a_{n+1}-x)\\
&+ x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_n-x)(a_{n+1}-x)\\
&\vdots\\
&+ x(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x)(a_{n+1}-x)\\
&+ x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x)\\
&+ (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x)(a_{n+1}-x)
\end{aligned}$$

δηλαδή ο παραπάνω τύπος (*) ισχύει και για $k=n+1$.

Σύμφωνα με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, ο τύπος (*) ισχύει για κάθε $n\geq 1$.

Σχόλιο. *Αν στην παραπάνω Άσκηση 34, έχουμε $x\neq a_i$, $1\leq i\leq n$, τότε η ορίζουσα του πίνακα A_n μπορεί να γραφεί ως εξής:*

$$|A_n| = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\left(1+\frac{x}{x-a_1}+\frac{x}{x-a_2}+\cdots+\frac{x}{x-a_n}\right)$$

Άσκηση 35. *Έστω $r_1, r_2, \cdots, r_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1+r_2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+r_3 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+r_{n-1} & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+r_n \end{pmatrix}$$

Λύση. *Θέτουμε στην Άσκηση 34: $x=1$, και $a_i=1+r_i$, $1\leq i\leq n$, και τότε θα έχουμε:*

$$\begin{aligned}
|A_n| &= x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_{n-1}-x)\\
&+ x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_n-x)\\
&\vdots \qquad\qquad (*)\\
&+ x(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x)\\
&+ (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x)\\
&= (1+r_1-1)(1+r_2-1)\cdots(1+r_{n-2}-1)(1+r_{n-1}-1)\\
&+ (1+r_1-1)(1+r_2-1)\cdots(1+r_{n-2}-1)(1+r_n-1)\\
&\vdots \qquad\qquad (*)\\
&+ (1+r_2-1)(1+r_3-1)\cdots(1+r_{n-1}-1)(1+r_n-1)\\
&+ (1+r_1-1)(1+r_2-1)\cdots(1+r_{n-1}-1)(1+r_n-1)\\
&= r_1r_2\cdots r_{n-2}r_{n-1}\\
&+ r_1r_2\cdots r_{n-2}r_n\\
&\vdots \qquad\qquad (*)\\
&+ r_2r_3\cdots r_{n-1}r_n\\
&+ r_1r_2\cdots r_{n-1}r_n
\end{aligned}$$

Επειδή $r_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, η παραπάνω σχεση μπορει να γραφεί ως εξής:

$$|A_n| = (r_1 + r_2 + \cdots + r_n)\left(1 + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}\right)$$

Άσκηση 36. *Έστω ότι $x, a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεδεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{pmatrix}$$

Λύση. *Για καλύτερη εποπτεία, συμβολίζουμε τον δοθέντα πίνακα με $A_n(x; a_1, \cdots, a_n)$.*

- *Αν $n = 1$, τότε ο δοθείς πίνακας είναι ο 1×1 πίνακας $A_1(x; a_1) = (x + a_1)$ και άρα $|A_1(x; a_1)| = x + a_1$.*
- *Αν $n = 2$, τότε ο δοθείς πίνακας είναι ο 2×2 πίνακας $A_2(x; a_1, a_2) = \begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 \\ a_2 & x+a_2 \end{pmatrix}$ και άρα*

$$|A_2(x; a_1, a_2)| = (x + a_1)(x + a_2) - a_1a_2 = x^2 + xa_1 + xa_2 = x(x + a_1 + a_2)$$

Ισχυρισμός: *Η ορίζουσα του πίνακα A_n είναι ίση με:*

(10) $$|A_n(x; a_1, \cdots, a_n)| = x^{n-1}(x + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι ο ισχυρισμός (10) είναι αληθής, όταν $n = 1$ ή $n = 2$.

- *Επαγωγική Υπόθεση* *Υποθέτουμε ότι ο παραπάνω τύπος (10) ισχύει για $k = n - 1$, δηλαδή υποθέτουμε ότι:*

$$|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| = x^{n-2}(x + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \qquad (*)$$

Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει για $k = n$.

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του πίνακα $A_n(x; a_1, \cdots a_n)|$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{pmatrix} x+a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αν μια στήλη Σ_j ενός πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα $\Sigma'_j + \Sigma''_j$ δύο στηλών Σ'_j και Σ''_j, τότε η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα των οριζουσών $|A'| + |A''|$ δύο πινάκων A' και A'', οι οποίοι προκύπτουν από τον A αντικαθιστώντας την j-στήλη του A με τις στήλες Σ'_j και Σ''_j αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα στην τελευταία στήλη του πίνακα A έχουμε:

$$|A_n(x; a_1, \cdots a_n)| = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την πρώτη ορίζουσα στο παραπάνω άθροισμα κατά τα στοιχεία της πρώτηξς στήλης, θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x+a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & x+a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & x+a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} = x|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| \tag{†}$$

Για την δεύτερη ορίζουσα στο πατραπάνω άθροισμα, αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από όλες τις υπόλοιπες και έχουμε:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\cdots, \Gamma_n \to \Gamma_n - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 x^{n-1} \tag{††}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (†) *και* (††) *έπεται ότι*

$$|A_n(x; a_1, \cdots, a_n)| = x|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| + a_1 x^{n-1}$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση $(*)$*:* $|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| = x^{n-2}(x + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$*, θα έχουμε:*

$$|A_n(x; a_1, \cdots, a_n)| = x|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| + a_1 x^{n-1} = x\big(x^{n-2}(x + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\big) + a_1 x^{n-1} =$$

$$x^{n-1}(x + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_1 x^{n-1} = x^{n-1}(x + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

Δηλαδή ο παραπάνω τύπος (10) ισχύει και για $k = n$*. Επομένως, σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, θα έχουμε,* $\forall n \geq 1$*:*

$$|A_n(x; a_1, \cdots, a_n)| = x^{n-1}(x + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

Άσκηση 37. *Έστω ότι x, y είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα A_n μπορεί να γραφεί*

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ \vdots \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ \vdots \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αν μια στήλη Σ_j ενός πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα $\Sigma'_j + \Sigma''_j$ δύο στηλών Σ'_j και Σ''_j, τότε η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα των οριζουσών $|A'| + |A''|$ δύο πινάκων A' και A'', οι οποίοι προκύπτουν από τον A αντικαθιστώντας την j-στήλη του A με τις στήλες Σ'_j και Σ''_j αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα στην τελευταία στήλη του πίνακα A_n έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & 0 \\ y & 0 & x & \cdots & x & 0 \\ y & y & 0 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & -x \end{vmatrix}$$

Θέτουμε

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C_n = \begin{pmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & 0 \\ y & 0 & x & \cdots & x & 0 \\ y & y & 0 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & -x \end{pmatrix}$$

και τότε:

$$|A_n| = |B_n| + |C_n|$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα C_n κατά τα στοιχεία της τελευταίας στήλης, έχουμε:

$$|C_n| = (-x)\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & 0 \\ y & 0 & x & \cdots & x & 0 \\ y & y & 0 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & -x \end{vmatrix}}_{\text{ορίζουσα τάξης } n-1} = (-x)|A_{n-1}|$$

Για την ορίζουσα του πίνακα B_n, έχουμε:

$$|B_n| = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_{n-1}\to\Gamma_{n-1}-\Gamma_n]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2,\cdots,} \begin{vmatrix} -y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{τελευταίας στήλης}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της}}$$

$$= (-1)^{n+n} x(-y)^{n-1} = x(-y)^{n-1}$$

διότι ο πίνακας ο οποίος θα προκύψει είναι άνω τριγωνικός. Επομένως, $\forall n \geq 2$:

$$|A_n| = |B_n| + |C_n| = x(-y)^{n-1} + (-x)|A_{n-1}| \qquad (*)$$

Για να υπολογίζουμε την ορίζουσα $|A_n|$, υπολογίζουμε την $|A_n|$ για μικρές τιμές του n ($n = 1, 2, 3, 4$) για να μαντέψουμε την τιμή της $|A_n|$, και ακολούθως με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου επαληθεύουμε την τιμής που έχουμε μαντέψει.

- *Προφανώς* $A_0 = (0)$ *και επομένως* $|A_0| = 0$.
- *Προφανώς* $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ *και επομένως*[2] $|A_2| = -xy$.
- *Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου* $(*)$, *έχουμε:*

$$|A_3| = x(-y)^{3-1} + (-x)|A_{3-1}| = x(-y)^2 + (-x)(-xy) = xy^2 + x^2y = xy(x+y)$$

- *Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου* $(*)$, *έχουμε:*

$$|A_4| = x(-y)^{4-1} + (-x)|A_{4-1}| = x(-y)^3 + (-x)(xy(x+y)) = -xy^3 + (-x)(x^2y + xy^2) = -xy^3 - x^3y - x^2y^2 =$$

$$= -(xy)(x^2y + xy + xy^2)$$

<u>Ισχυρισμός</u>: *Η ορίζουσα του πίνακα A_n είναι ίση με:*

$$|A_n| = (-1)^{n-1} xy\big(x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3} + y^{n-2}\big) \qquad (\dagger)$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι ο ισχυρισμός (†) είναι αληθής, όταν $1 \leq n \leq 4$.

- <u>Επαγωγική Υπόθεση</u> *Υποθέτουμε ότι $n \geq 3$, και ότι ο παραπάνω τύπος (†) ισχύει για $k = n-1$, δηλαδή υποθέτουμε ότι:*

$$|A_{n-1}| = (-1)^{n-2} xy\big(x^{n-3} + x^{n-4}y + \cdots + xy^{n-4} + y^{n-3}\big) \qquad (\dagger\dagger)$$

Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει για $k = n$.

Χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο $(*)$, *θα έχουμε:*

$$|A_n| = x(-y)^{n-1} + (-x)|A_{n-1}| = x(-y)^{n-1} + (-x)(-1)^{n-2}xy\big(x^{n-3} + x^{n-4}y + \cdots + xy^{n-4} + y^{n-3}\big) =$$

$$= (-1)^{n-1}xy^{n-1} + (-1)^{n-1}x(xy)\big(y^{n-2}\big)\big(x^{n-3} + x^{n-4}y + \cdots + xy^{n-4} + y^{n-3}\big) =$$

$$= (-1)^{n-1}xy\big(y^{n-2} + x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3}\big)$$

---

[2] Ο υπολογισμός προκύπτει και από τον αναδρομικό τύπο $(*)$: $|A_2| = x(-y)^{2-1} + (-x)|A_{2-1}| = -xy + (-x)\cdot 0 = -xy$.

Επομένως η τύπος (†) ισχύει και για $k = n$. Από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, έπεται ότι ο τύπος (†) ισχύει για κάθε $n \geq 1$, και επομένως[3]*:*

$$|A_n| = (-1)^{n-1} xy\big(x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3} + y^{n-2}\big)$$

Άσκηση 38. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$*

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα $|V(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$ καλείται **ορίζουσα Vandermonde τάξης** *n.*

Λύση. *Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα Vandermonde για μικρές τιμές του n, ξεκινλωντας από την πρώτη μη-τετριμένη περίπτωση $n = 2$.*

- *Αν $n = 2$, τότε $V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ και επομένως:*

$$|V(x_1, x_2)| = x_2 - x_1$$

- *Αν $n = 3$, τότε $V(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ και επομένως:*

$$|V(x_1, x_2, x_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \overset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1}{\underset{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}{\underset{\text{της πρωτης γραμμής}}{=\!=\!=}} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

<u>Ισχυρισμός</u>: *Για n το πλήθος τυχόντα στοιχεία $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{K}$, η ορίζουσα του πίνακα $V(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ είναι ίση με:*

$$|V(y_1, y_2, \cdots, y_n| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_j - y_i) \qquad (\dagger)$$

[3] Αν $x \neq y$, τότε ο τύπος (†) γράφεται και ως:

$$|A_n| = (-1)^{n-1} xy \frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x - y}$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned}|V(y_1,y_2,y_3| &= (y_2-y_1)\\ &\cdot\ (y_3-y_1)\cdot(y_3-y_2)\\ &\cdot\ (y_4-y_1)\cdot(y_4-y_2)(y_4-y_3)\\ &\vdots\\ &\cdot\ (y_n-y_1)\cdot(y_n-y_2)\cdots(y_{n-1}-y_{n-1})\end{aligned}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι ο ισχυρισμός (†) είναι αληθής, όταν $2 \le n \le 3$.

- *Επαγωγική Υπόθεση* *Υποθέτουμε ότι* $n \ge 3$, *και ότι ο παραπάνω τύπος (†) ισχύει για* $k = n$. *Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει για* $k = n+1$. *δηλαδή θα δείξουμε ότι, για* $n+1$ *το πλήθος τυχόντα στοιχεία* $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$:

$$|V(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}| = \prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j-x_i) \qquad (\dagger\dagger)$$

$$|V(x_1,x_2,\cdots x_{n+1})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1}\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & x_{n+1}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{vmatrix} \overset{\Gamma_{n+1}\to\Gamma_{n+1}-x_1\Gamma_n}{=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1}\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & x_{n+1}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1}\\ 0 & x_2^n - x_1x_2^{n-1} & x_3^n - x_1x_3^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_1x_n^{n-1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \overset{\Gamma_n\to\Gamma_n-x_1\Gamma_{n-1}}{=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1}\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & x_{n+1}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^n - x_1x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} - x_{n+1}^{n-2}\\ 0 & x_2^n - x_1x_2^{n-1} & x_3^n - x_1x_3^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_1x_n^{n-1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία εκτελώντας τις πράξεις $\Gamma_{i+1} - x_1\Gamma_i$, $1 \le i \le n$, *προκύπτει ότι θα έχουμε*

$$|V(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 & x_{n+1} - x_1\\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & x_3^2 - x_1x_3 & \cdots & x_n^2 - x_1x_n & x_{n+1}^2 - x_1x_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^n - x_1x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} - x_{n+1}^{n-2}\\ 0 & x_2^n - x_1x_2^{n-1} & x_3^n - x_1x_3^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_1x_n^{n-1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{της πρωτης στήλης}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 & x_{n+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_n^2 - x_1 x_n & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n} - x_1 x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} - x_{n+1}^{n-2} \\ x_2^{n} - x_1 x_2^{n-1} & x_3^{n} - x_1 x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n} - x_1 x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n} - x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) \cdot 1 & (x_3 - x_1) \cdot 1 & \cdots & (x_n - x_1) \cdot 1 & (x_{n+1} - x_1) \cdot 1 \\ (x_2 - x_1) \cdot x^2 & (x_3 - x_1) \cdot x_3 & \cdots & (x_n - x_1) \cdot x_n & (x_{n+1} - x_1) \cdot x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_2 - x_1) \cdot x_2^{n-2} & (x_3 - x_1) \cdot x_3^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1) \cdot x_n^{n-2} & (x_{n+1} - x_1) \cdot x_{n+1}^{n-2} \\ (x_2 - x_1) \cdot x_2^{n-1} & (x_3 - x_1) \cdot x_3^{n-1} & \cdots & (x_n - x_1) \cdot x_n^{n-1} & (x_{n+1} - x_1) \cdot x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-2} \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1) \cdot |V(x_2, x_3, \cdots, x_{n+1})|$$

Επομένως:

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1) \cdot |V(x_2, x_3, \cdots, x_{n+1})|$$

Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι:

$$|V(x_2, x_3, \cdots, x_{n+1})| = \prod_{2 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i)$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, έπεται ότι:

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1) \cdot \prod_{2 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i)$$

Δηλαδή δείξαμε ότι

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})| = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i)$$

Σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, έπεται ότι, $\forall n \geq 2$*:*

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$