ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 18 Νοεμβρίου 2022

Υπενθυμίσεις από τη Θεωρία

Υπενθυμίζουμε κάποια βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία τα οποία μας διευκολύνουν στην μελέτη συνόλων γεννητόρων, γραμμικά ανξάρτητων υποσυνόλων, και βάσεων ενός διανυσματικού χώρου.

Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Σταθεροποιούμε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$.

Έστω ότι $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ είναι m το πλήθος διανύσματα του $\mathcal{E}$. Τότε γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων τηςε βάσης $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n \\
\vec{x}_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n \\
&\vdots \\
\vec{x}_m &= a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $A = (a_{ij})$ των συντελεστών των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1. Έστω ότι A' είναι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A:

$$A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

και έστω τα διανύσματα[1] του $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 &= a'_{11}\vec{e}_1 + a'_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a'_{1n}\vec{e}_n \\
\vec{y}_2 &= a'_{21}\vec{e}_1 + a'_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a'_{2n}\vec{e}_n \\
&\vdots \\
\vec{y}_m &= a'_{m1}\vec{e}_1 + a'_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + a'_{mn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

[1] Τα διανύσματα $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m$ έχουν προκύψει μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεψων στα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$.

Τότε:

(1) $$\left\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_2, \cdots ,\, \vec{x}_m \right\rangle = \left\langle \vec{y}_1,\, \vec{y}_2, \cdots ,\, \vec{y}_m \right\rangle$$

2. Το σύνολο διανυσμάτων $\vec{x}_1,\, \vec{x}_2, \cdots ,\, \vec{x}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$^{t}A \cdot \Lambda = 0, \qquad \text{όπου} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

δηλαδή το ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \cdots , \lambda_n$:

(2) $$(\Sigma) : \begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \cdots + a_{m1}\lambda_m = 0 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{m2}\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση την μηδενική[2].

Ιδιαίτερα αν $m = n$, τότε το σύνολο διανυσμάτων $\left\{ \vec{x}_1,\, \vec{x}_2, \cdots ,\, \vec{x}_m \right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν $|A| \neq 0$.

3. Αν $\mathcal{E} = \mathbb{K}^n$, τότε τα **1.** και **2.** παίρνουν την ακόλουθη μορφή.

Τα διανύσματα $\vec{x}_1,\, \vec{x},\, \cdots,\, \vec{x}_m$ είναι διατεταγμένες n-άδες:

$$\vec{x}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots , a_{1n})$$
$$\vec{x}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots , a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\vec{x}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots , a_{mn})$$

Αν

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

είναι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

τότε:

(3) $$\left\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_2, \cdots ,\, \vec{x}_m \right\rangle = \left\langle \vec{y}_1,\, \vec{y}_2, \cdots ,\, \vec{y}_m \right\rangle$$

όπου:

$$\vec{y}_1 = (a'_{11}, a'_{12}, \cdots , a'_{1n})$$
$$\vec{y}_2 = (a'_{21}, a'_{22}, \cdots , a'_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\vec{y}_m = (a'_{m1}, a'_{m2}, \cdots , a'_{mn})$$

[2] Θα δούμε αργότερα ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $m = \mathbf{r}(A)$, όπου $\mathbf{r}(A)$ είναι η **βαθμίδα** του πίνακα A, δηλαδή το πλήθος των οδηγών στην ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A ή ισοδύναμα το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών, ή ισοδύναμα γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A.

Επιπλέον το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν το ομογενές γραμμικό σύστημα (Σ), βλέπε παραπάνω, έχει μόνο τη μηδενική λύση.

Ιδιαίτερα, αν $m = n$, τότε το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν $|A| \neq 0$.

4. Έστω $\mathcal{B}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{E}$. Τότε το υποσύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ αν και μόνον αν ικανοποιεί τις 2 από τις ακόλουθες 3 ιδιότητες:
(α΄) Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
(β΄) Το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον χώρο $\mathcal{E}$.
(γ΄) Ισχύει ότι:

$$|\mathcal{B}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \tag{4}$$

5. Έστω ότι το υποσύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ του $\mathcal{E}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι $m \leq n$ και το υποσύνολο $\mathcal{C}$ μπορεί να συμπληρωθεί σε μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$, δηλαδή υπάρχουν διανύσματα $\vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n$ έτσι ώστε το υποσύνολο $\mathcal{B}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$ να είναι βάση του $\mathcal{E}$.

Για να προσδιορίσουμε διανύσματα $\vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n$ έτσι ώστε το υποσύνολο

$$\mathcal{B}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$$

να είναι βάση του $\mathcal{E}$, εργαζόμαστε ως εξής:
Θεωρούμε τον πίνακα A των συνιστωσών των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

και αναζητούμε $n - m$ το πλήθος γραμμές

$$\begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \qquad k = m+1, m+2, \cdots, n$$

έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος. Τότε θέτοντας

$$\vec{x}_k = a_{k1}\vec{e}_1 + a_{k2}\vec{x}_{k2} + \cdots + a_{kn}\vec{e}_n, \qquad k = m+1, m+2, \cdots, n$$

από το 3 έπεται ότι το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$ να είναι βάση του $\mathcal{E}$.

• Για τις λυσεις των ασκησεων που ακολουθουν θα εφαρμοζουμε ειτε τον ορισμο (συνολου γεννητορων, γραμμικης ανεξαρτησιας, βασης) ειτε καποιο απο τα παραπανω αποτελεσματα της Θεωριας.

Άσκηση 1. (1) *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ και τον $\mathbb{Q}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^2_{\mathbb{Q}}$.*
Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων

$$\vec{x} = (3 + \sqrt{2},\, 1 + \sqrt{2}) \quad \text{και} \quad \vec{y} = (7,\, 1 + 2\sqrt{2})$$

είναι γραμμικά εξαρτημένο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ και γραμμικά ανεξάρτητο στον $\mathbb{Q}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2_{\mathbb{Q}}$.

(2) *Θεωρούμε τον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2$ τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$ και τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2$ τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.*

Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων

$$\vec{x} = \big(1 - i,\, i\big) \quad \text{και} \quad \vec{y} = \big(2,\, -1 + i\big)$$

είναι γραμμικά εξαρτημένο στον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$ και γραμμικά ανεξάρτητο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

Λύση. (1) *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. Τότε θα έχουμε:*

$$a\big(3 + \sqrt{2},\, 1 + \sqrt{2}\big) + b\big(7,\, 1 + 2\sqrt{2}\big) = (0, 0) \implies \big(a(3 + \sqrt{2}) + 7b,\, a(1 + \sqrt{2}) + b(1 + 2\sqrt{2})\big) = (0, 0)$$

$$\implies \begin{cases} a(3 + \sqrt{2}) + 7b = 0 \\ a(1 + \sqrt{2}) + b(1 + 2\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με $1 + \sqrt{2}$, τη δεύτερη σχέση με $-(3 + \sqrt{2})$ και ακολούθως προσθέτοντας τις σχέσεις που προκύπτουν, έπεται ότι:

$$b(7 + 7\sqrt{2} - 3 - \sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 4) = 0 \implies b \cdot 0 = 0$$

επομένως ο πραγματικός αριθμός b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Θέτουμε $b = -1$ και τότε από την πρώτη σχέση προκύπτει ότι:

$$a = \frac{7}{3 + \sqrt{2}} = \frac{7(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{7(3 - \sqrt{2})}{7} = 3 - \sqrt{2}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$(3 - \sqrt{2})\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$$

δηλαδή τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$.

Αν τώρα $a, b \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. Αν $b \neq 0$, τότε από την πρώτη σχέση θα έχουμε:

$$a = -\frac{7b}{3 + \sqrt{2}} = -\frac{7b(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{7b(3 - \sqrt{2})}{7} = b(3 - \sqrt{2}) = 3b - b\sqrt{2}$$

Τότε όμως θα έχουμε:

$$\sqrt{2} = \frac{3b - a}{b}$$

Επειδή οι αριθμοί a, b είναι ρητοί, έπεται ότι και ο αριθμός $\frac{3b-a}{b} = \sqrt{2}$ είναι ρητός και αυτό είναι άτοπο διότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $b \neq 0$. Άρα $b = 0$ και τότε από την πρώτη σχέση θα έχουμε:

$$a(3 + \sqrt{2}) = 0 \implies a(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 0 \implies 7a = 0 \implies a = 0$$

Έτσι δείξαμε ότι $a = b = 0$ και άρα τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{Q}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2_{\mathbb{Q}}$.

(2) *Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. Τότε θα έχουμε:*

$$a\big(1 - i,\, i\big) + b\big(2,\, -1 + i\big) = (0, 0) \implies \big(a(1 - i) + 2b,\, ai + b(-1 + i)\big) = (0, 0)$$

$$\implies \begin{cases} a(1 - i) + 2b = 0 \\ ai + b(-1 + i) = 0 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με $-i$ και τη δεύτερη σχέση με $1 - i$, και ακολούθως προσθέτοντας τις σχέσεις που προκύπτουν, έπεται ότι θα έχουμε:

$$b(-1 + i + i + 1) - 2bi = 0 \implies b \cdot 0 = 0$$

επομένως ο μιγαδικός αριθμός b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μιγαδική τιμή. Θέτουμε $b = -1$ και τότε από την πρώτη σχέση προκύπτει ότι:

$$a = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i$$

Επομένως θα έχουμε:

$$(1+i)\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$$

δηλαδή τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα στον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$.

Αν τώρα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$. Αν $b \neq 0$, τότε από την πρώτη σχέση θα έχουμε:

$$a = -\frac{2b}{1-i} = -\frac{2b(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2b(1+i)}{2} = b(1+i) \implies 1+i = \frac{a}{b}$$

Επειδή οι αριθμοί a, b είναι πραγματικοί, έπεται ότι και ο αριθμός $\frac{a}{b} = 1+i$ είναι πραγματικός και αυτό είναι άτοπο διότι ο αριθμός $1+i$ δεν είναι πραγματικός. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $b \neq 0$. Άρα $b = 0$ και τότε από την πρώτη σχέση θα έχουμε:

$$a(1-i) = 0 \implies a(1-i)(1+i) = 0 \implies 2a = 0 \implies a = 0$$

Έτσι δείξαμε ότι $a = b = 0$ και άρα τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

Άσκηση 2. *Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων*

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1 = (1,\,2,\,1),\ \vec{x}_2 = (1,\,1,\,0),\ \vec{x}_3 = (0,\,2,\,1)$$

είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ και ακολούθως να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{x} = (3,2,0)$ ως τη βάση $\mathcal{C}$.

Λύση. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος προκύπτει από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$. Επειδή όπως μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα:

$$|A| = 1 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 = 3 = |\mathcal{C}|$, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έστω το διάνυσμα $\vec{x} = (3,2,0)$. Γνωρίζουμε τότε ότι υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί a, b, c έτσι ώστε: $\vec{x} = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 + c\vec{x}_3$. Τότε:

$$\vec{x} = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 + c\vec{x}_3 \implies (3,2,0) = a(1,2,1) + b(1,1,0) + c(0,2,1) = (a+b, 2a+b+2c, a+c)$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b+2c=2 \\ a+c=0 \end{cases} \implies a=1,\quad b=2,\quad c=-1$$

Επομένως:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 - \vec{x}_3$$

Άσκηση 3. *Να προσδιοριστεί μια βάση και η διάσταση του $\mathbb{R}$-υποχώρου*

$$\mathcal{V} = \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a-b,\ d = a+b\big\} \ \subseteq\ \mathbb{R}^4$$

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a-b,\ d = a+b\big\} \\
&= \big\{(a,b,a-b,a+b) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big\{(a,0,a,a) + (0,b,-b,b) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big\{a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big\langle(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\big\rangle
\end{aligned}$$

και άρα τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,1,1)$ και $\vec{\varepsilon}_2 = (0,1,-1,1)$ παράγουν τον υπόχωρο $\mathcal{V}$. Έστω

$$\begin{aligned}\lambda_1(1,0,1,1)+\lambda_2(0,1,-1,1)=(0,0,0,0) &\implies (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1-\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2)=(0,0,0,0)\\ &\implies \lambda_1=\lambda_2=0\end{aligned}$$

'ρα τα διανύσματα $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αφού δείξαμε ότι παράγουν τον χώρο $\mathcal{V}$ έπεται ότι αποτελούν μια βάση του $\mathcal{V}$. Συνεπώς έχουμε $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 2$.

Άσκηση 4. Έστω $a \in \mathbb{K}$ και θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{K}^3$:

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{x} = (a^2,0,1),\ \vec{y} = (0,a,2),\ \vec{z} = (1,0,1)\big\}$$

(1) Να προσδιοριστούν όλες οι τιμές του $a \in \mathbb{K}$, για τις οποίες το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(2) Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\rangle$$

(3) Να συμπληρωθεί η βάση που βρέθηκε στο (2) σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Λύση. **1.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 1\\ 0 & a & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ο οποίος προκύπτει από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$. Γνωρίζουμε τότε ότι τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν και μόνον αν:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 1\\ 0 & a & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} \neq 0$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 1\\ 0 & a & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2-1) = a(a-1)(a+1)$$

Επομένως

$$|A| = 0 \quad\implies\quad a=0 \ \text{ ή } \ a=1 \ \text{ ή } \ a=-1$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\text{τα διανύσματα } \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητα} \iff a\neq 0 \ \text{ και } \ a \neq 1 \ \text{ και } \ a\neq -1$$

2. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α΄) Αν $a \neq 0$ και $a \neq 1$, και $a \neq -1$, τότε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του $\mathcal{V}$. Ιδιαίτερα:

$$\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 3$$

Παρατηρούμε ότι επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 3 = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$, θα έχουμε: $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

(β΄) Αν $a = 0$, τότε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και έχουμε:

$$\vec{x} = (0,\ 0,\ 1), \qquad \vec{y} = (0,\ 0,\ 2), \qquad \vec{z} = (1,\ 0,\ 1)$$

δηλαδή $\vec{y} = 2\vec{x}$, και τότε:

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x},\ \vec{z}\rangle$$

Προφανώς τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{z} = \vec{0}$, τότε θα έχουμε $\lambda_1(0,0,1) + \lambda_2(1,0,1) = (0,0,0)$ και άρα $(\lambda_2, 0, \lambda_1+\lambda_2) = (0,0,0)$ από όπου προκύπτει άμεσα ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Επομένως τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{z}$ αποτελούν βάση του $\mathcal{V}$ και ιδιαίτερα

$$\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 2$$

(γ') *Αν* $a = 1$, *τότε τα διανύσματα* $\vec{x}$, $\vec{y}$, *και* $\vec{z}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα και έχουμε:*

$$\vec{x} = (1,\, 0,\, 1), \qquad \vec{y} = (0,\, 1,\, 2), \qquad \vec{z} = (1,\, 0,\, 1)$$

δηλαδή $\vec{x} = \vec{z}$, *και τότε:*

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x},\, \vec{y} \rangle$$

Προφανώς τα διανύσματα $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν* $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{0}$, *τότε θα έχουμε* $\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,2) = (0,0,0)$ *και άρα* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0,0)$ *από όπου προκύπτει άμεσα ότι* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *Επομένως τα διανύσματα* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$ *αποτελούν βάση του* $\mathcal{V}$ *και ιδιαίτερα*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 2$$

(δ') *Αν* $a = -1$, *τότε τα διανύσματα* $\vec{x}$, $\vec{y}$, *και* $\vec{z}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα και έχουμε:*

$$\vec{x} = (1,\, 0,\, 1), \qquad \vec{y} = (0,\, -1,\, 2), \qquad \vec{z} = (1,\, 0,\, 1)$$

δηλαδή $\vec{x} = \vec{z}$, *και τότε:*

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x},\, \vec{y} \rangle$$

Προφανώς τα διανύσματα $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν* $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{0}$, *τότε θα έχουμε* $\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,-1,2) = (0,0,0)$ *και άρα* $(\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0,0)$ *από όπου προκύπτει άμεσα ότι* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *Επομένως τα διανύσματα* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$ *αποτελούν βάση του* $\mathcal{V}$ *και ιδιαίτερα*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 2$$

3. *Διακρίνουμε περιπτώσεις:*

(α') *Αν* $a \neq 0$ *και* $a \neq 1$, *και* $a \neq -1$, *τότε τα διανύσματα* $\vec{x}$, $\vec{y}$, *και* $\vec{z}$ *αποτελούν ήδη βάση του* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

(β') *Αν* $a = 0$, *τότε έχουμε τη βάση*

$$\vec{x} = (0,\, 0,\, 1), \qquad \vec{z} = (1,\, 0,\, 1)$$

του $\mathcal{V}$. *Θεωρούμε το διάνυσμα* $\vec{e}_2 = (0,1,0)$. *Επειδή*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{z}$ *και* $\vec{e}_2$ *αποτελούν μια βάση του* $\mathbb{R}^3$ *η οποία συμπληρώνει τη βάση* $\{\vec{x}, \vec{z}\}$ *του* $\mathcal{V}$.

(γ') *Αν* $a = 1$, *τότε έχουμε τη βάση*

$$\vec{x} = (1,\, 0,\, 1), \qquad \vec{y} = (0,\, 1,\, 2)$$

του $\mathcal{V}$. *Θεωρούμε το διάνυσμα* $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. *Επειδή*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ *και* $\vec{e}_3$ *αποτελούν μια βάση του* $\mathbb{R}^3$ *η οποία συμπληρώνει τη βάση* $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *του* $\mathcal{V}$.

(δ') *Αν* $a = -1$, *τότε έχουμε τη βάση*

$$\vec{x} = (1,\, 0,\, 1), \qquad \vec{y} = (0,\, -1,\, 2)$$

του $\mathcal{V}$. *Θεωρούμε το διάνυσμα* $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. *Επειδή*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ *και* $\vec{e}_3$ *αποτελούν μια βάση του* $\mathbb{R}^3$ *η οποία συμπληρώνει τη βάση* $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *του* $\mathcal{V}$.

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:*

$$\vec{x} = (1, -2, k), \quad \vec{y} = (3, 0, -2), \quad \vec{z} = (2, -1, -5)$$

(1) *Να βρεθεί για ποιές τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
(2) *Για τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, να βρεθεί μια σχέση γραμμικής εξάρτησης τους.*
(3) *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$.*
(4) *Να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{U}$ έτσι ώστε:*

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Λύση. *(1) Τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν η ορίζουσα του πίνακα του οποίου οι γραμμές είναι οι συνιστώσες των διάνυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, είναι μη-μηδενική. Επειδή*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 24 + 3k \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k \neq -8$$

έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν $k \neq -8$.

(2) Από το (1), τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνον αν $k = -8$. Έτσι θέτουμε $k = -8$ και θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{y}, \vec{z}$ τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι:

$$\kappa\vec{y} + \lambda\vec{z} = \vec{0} \implies \kappa(3, 0, -2) + \lambda(2, -1, -5) = (0, 0, 0) \implies (3\kappa + 2\lambda, -\lambda, -2\kappa - 5\lambda) = (0, 0, 0) \implies$$

$$\implies \begin{cases} 3\kappa + 2\lambda = 0 \\ -\lambda = 0 \\ -2\kappa - 5\lambda = 0 \end{cases} \implies \kappa = \lambda = 0$$

Επειδή, για $k = -8$, τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και τα διανύσματα $\vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται από τη Θεωρία ότι $\vec{x} \in \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = \mathcal{V}$. Άρα υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$\vec{x} = \kappa\vec{y} + \lambda\vec{z} \implies (1, -2, -8) = (3\kappa + 2\lambda, -\lambda, -2\kappa - 5\lambda) \implies \begin{cases} 3\kappa + 2\lambda = 1 \\ -\lambda = -2 \\ -2\kappa - 5\lambda = -8 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \kappa = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \implies \vec{x} = -\vec{y} + 2\vec{z}$$

(3) Αν $k \neq -8$, τότε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε θα έχουμε προφανώς $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

Αν $k = -8$, τότε γνωρίζουμε ότι $\vec{x} \in \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle$ και τα διανύσματα $\vec{y}, \vec{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως $\mathcal{V} = \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle$. Θεωρούμε τον 2×3 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{3}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & -1 & -11/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 11/3 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V} = \left\langle \left(1,\, 0,\, -\frac{2}{3}\right),\ \left(0, 1, \frac{11}{3}\right) \right\rangle = \left\{ \left(\kappa, \lambda, \frac{-2\kappa + 11\lambda}{3}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = \begin{cases} 3, \ \text{αν } k \neq -8, & \text{και τότε μια βάση του } \mathcal{V} \text{ είναι η κανονική βάση του } \mathbb{R}^3 \\ 2, \ \text{αν } k = -8, & \text{και τότε μια βάση του } \mathcal{V} \text{ είναι η } \left\{ \left(1,\, 0,\, -\frac{2}{3}\right),\ \left(0, 1, \frac{11}{3}\right) \right\} \end{cases}$$

(4) Αν $k \neq -8$, τότε γνωρίζπυμε ότι $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ και επομένως σαύτή την περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε $\mathcal{U} = \{\vec{0}\}$, καθώς τότε έχουμε $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Έστω $k=-8$. Αναζητούμε ένα διάνυσμα $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε η τριάδα (a,b,c), $(1,\,0,\,-\frac{2}{3})$, $(0,1,\frac{11}{3})$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^3$. Ισοδύναμα αναζητούμε γραμμή $(*\ *\ *)$ η οποία να συμπληρώνει τον 2×3 πίνακα

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 11/3\end{pmatrix}$$

σε έναν αντιστρέψιμο 3×3 πίνακα

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 11/3\\ * & * & *\end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 11/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ο οποίος προφανώς είναι αντιστρέψιμος. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε $(a,b,c)=(0,0,1)$ και τότε θέτοντας

$$\mathcal{U}=\langle(0,0,1)\rangle=\big\{(0,0,k)\big\}\in\mathbb{R}^3\mid k\in\mathbb{R}\big\}$$

θα έχουμε:

$$\mathbb{R}^3=\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}$$

Άσκηση 6. *Θεωρούμε διανύσματα $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$ και $\vec{x}$:*

(1)
$$\vec{e}_1=(1,1,1),\quad \vec{e}_2(1,1,2),\quad \vec{e}_3=(1,2,3)\qquad \textit{και}\qquad \vec{x}=(6,9,14)$$

(2)
$$\vec{e}_1=(2,1,-3),\quad \vec{e}_2(3,2,-5),\quad \vec{e}_3=(1,-1,1)\qquad \textit{και}\qquad \vec{x}=(6,2,-7)$$

(3)
$$\vec{e}_1=(1,2,-1,-2),\quad \vec{e}_2(2,3,0,-1),\quad \vec{e}_3=(1,2,1,4),\quad \vec{e}_4=(1,3,-1,0)\qquad \textit{και}\qquad \vec{x}=(7,14,-1,2)$$

Να δειχθεί, σε κάθε περίπτωση, ότι το σύνολο $\mathcal{B}=\big\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\big\}$ είναι βάση και να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{x}$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Λύση. (1) *Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα A*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων του συνόλου

$$\mathcal{B}=\big\{\vec{e}_1=(1,1,1),\ \ \vec{e}_2=(1,1,2),\ \ \vec{e}_3=(1,2,3)\big\}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$|A|=-1$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έστω $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$. Τότε θα έχουμε:

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3\quad\Longrightarrow\quad(6,9,14)=x_1(1,1,1)+x_2(1,1,2)+x_3(1,2,3)\quad\Longrightarrow$$

$$(\Sigma)\qquad\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\ x_1+x_2+2x_3=9\\ x_1+2x_2+3x_3=14\end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η μοναδική λύση του (Σ) είναι η

$$x_1=1,\qquad x_2=2,\qquad x_3=3$$

Άρα οι συνιστώσες του $\vec{x}$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$, δηλαδή

$$\vec{x}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$$

(2) *Θεωρούμε τον* 3×3 *πίνακα* A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων του συνόλου

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (2,1,-3), \;\; \vec{e}_2 = (3,2,-5), \;\; \vec{e}_3 = (1,-1,1)\big\}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$|A| = 1$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως είναι βάση του* $\mathbb{R}^3$.

Έστω $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$. *Τότε θα έχουμε:*

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad \Longrightarrow \quad (6,2,-7) = x_1(2,1,-3) + x_2(3,2,-5) + x_3(1,-1,1) \quad \Longrightarrow$$

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η μοναδική λύση του (Σ) *είναι η*

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 1$$

Άρα οι συνιστώσες του $\vec{x}$ *ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$ *είναι* $x_1 = 1, \; x_2 = 1, \; x_3 = 1$, *δηλαδή*

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

(3) *Θεωρούμε τον* 4×4 *πίνακα* A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων του συνόλου

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,2,-1,2), \;\; \vec{e}_2 = (2,3,0,-1), \;\; \vec{e}_3 = (1,2,1,4), \;\; \vec{e}_4 = (1,3,-1,0)\big\}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$|A| = 2$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως είναι βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Έστω $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4$. *Τότε θα έχουμε:*

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (7,14,-1,2) = x_1(1,2,-1,2) + x_2(2,3,0,-1) + x_3(1,2,1,4) + x_4(1,3,-1,0) \quad \Longrightarrow$$

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \\ -x_1 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η μοναδική λύση του (Σ) *είναι η*

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 2$$

Άρα οι συνιστώσες του $\vec{x}$ *ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$ *είναι* $x_1 = 0, \; x_2 = 2, \; x_3 = 1, \; x_4 = 2$, *δηλαδή*

$$\vec{x} = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

Άσκηση 7. *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων* $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ακολούθως να συμπληρωθεί το σύνολο* $\mathcal{B}$ *σε μια βάση του αντίστοιχου χώρου:*

(1)
$$\vec{\epsilon}_1 = (2,2,7,-1), \qquad \vec{\epsilon}_2 = (3,-1,2,4), \qquad \vec{\epsilon}_3 = (1,1,3,1)$$
(2)
$$\vec{\epsilon}_1 = (2,3,-4,-1), \qquad \vec{\epsilon}_2 = (1,-2,1,3)$$

Λύση. (1) *Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:*

$$\lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 + \lambda_3\vec{\epsilon}_3 = (0,0,0,0) \implies \lambda_1(2,2,7,-1) + \lambda_2(3,-1,2,4) + \lambda_3(1,1,3,1) = (0,0,0,0) \implies$$

$$\implies (\Sigma) \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 7\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το (Σ) είναι ένα ομογενές σύστημα με αγνώστους τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και ο πίνακας του (Σ) είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A είναι ο πίνακας

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και επομένως το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με το σύστημα (Σ')

$$\Gamma(A)X = O, \qquad \text{δηλαδή} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

το οποίο προφανώς έχει μόνο τη μηδενική λύση

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}' = \{\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2,\ \vec{\epsilon}_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Αναζητούμε ένα διάνυσμα $\vec{\epsilon}_4 = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{\vec{\epsilon}_4\}$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^4$. Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές σχηματίζονται από τις συνιστλωσες των διανυσμάτων $\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2,\ \vec{\epsilon}_3$, αναζητούμε τετράδα αριθμών (a,b,c,d) έτσι ώστε ο πίνακας

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $|X| \neq 0$. Επιλέγοντας $(a,b,c,d) = (0,0,0,1)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

και επομένως, θέτοντας $\vec{\epsilon}_4 = (0,0,0,1)$, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$ η οποία περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}'$.

(2) *Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:*

$$\lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 = (0,0,0,0) \implies \lambda_1(2,3,-4,-1) + \lambda_2(1,-2,1,3) = (0,0,0,0) \implies$$

$$\implies \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Το παραπάνω ομογενές σύστημα με αγνώστους τα λ_1, λ_2 έχει προφανώς μόνο τη μηδενική λύση: από την τρίτη εξίσωση έχουμε $\lambda_2 = 4\lambda_1$ και τότε από την πρώτη έχουμε $6\lambda_1 = 0$ από όπου $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}' = \{\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Αναζητούμε δύο διανύσματα $\vec{\epsilon}_3 = (x,y,z,w)$, $\vec{\epsilon}_4 = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{\vec{\epsilon}_3,\ \vec{\epsilon}_4\}$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^4$. Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές σχηματίζονται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2$, αναζητούμε δύο τετράδες αριθμών (x,y,z,w), (a,b,c,d) έτσι ώστε ο πίνακας

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ x & y & z & w \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $|X| \neq 0$. Επιλέγοντας $(x,y,z,w) = (0,0,1,0)$ και $(a,b,c,d) = (0,0,0,1)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

και επομένως, θέτοντας $\vec{\epsilon}_3 = (0,0,1,0)$ και $\vec{\epsilon}_4 = (0,0,0,1)$, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$ η οποία περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}'$.

Άσκηση 8. *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ακολούθως να συμπληρωθεί το σύνολο $\mathcal{B}$ σε μια βάση του αντίστοιχου χώρου:*

(1)

$$\vec{\epsilon}_1 = (4,3,-1,1,1), \quad \vec{\epsilon}_2 = (2,1,-3,2,-5), \quad \vec{\epsilon}_3 = (1,-3,0,1,-2), \quad \vec{\epsilon}_4 = (1,5,2,-2,6)$$

(2)

$$\vec{\epsilon}_1 = (2,3,5,-4,1), \quad \vec{\epsilon}_2 = (1,-1,2,3,5)$$

Λύση. (1) *Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:*

$$\lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 + \lambda_3\vec{\epsilon}_3 + \lambda_4\vec{\epsilon}_4 = (0,0,0,0,0) \implies$$

$$\implies \lambda_1(4,3,-1,1,1) + \lambda_2(2,1,-3,2,-5) + \lambda_3(1,-3,0,1,-2) + \lambda_4(1,5,2,-2,6) = (0,0,0,0) \implies$$

$$\implies (\Sigma) \begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - 5\lambda_2 - 2\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Το (Σ) *είναι ένα ομογενές σύστημα με αγνώστους τα* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *και ο πίνακας του* (Σ) *είναι ο*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η ισχυρά γ*-κλιμακωτή μορφή του* A *είναι ο πίνακας*

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και επομένως το σύστημα (Σ) *είναι ισοδύναμο με το σύστημα* (Σ')

$$\Gamma(A)X = O, \qquad \textit{δηλαδή} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

το οποίο προφανώς έχει μόνο τη μηδενική λύση

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}' = \{\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2,\ \vec{\epsilon}_3\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Αναζητούμε ένα διάνυσμα $\vec{\epsilon}_5 = (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{\vec{\epsilon}_5\}$ *να είναι βάση του* $\mathbb{R}^4$*. Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές σχηματίζονται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3,\ \vec{\epsilon}_4$*, αναζητούμε μια πεντάδα αριθμών* (a, b, c, d, e) *έτσι ώστε ο πίνακας*

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -2 & 6 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $|X| \neq 0$*. Επιλέγοντας* $(a, b, c, d, e) = (1, 0, 0, 0, 0)$ *προκύπτει εύκολα ότι:*

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$$

και επομένως, θέτοντας $\vec{\epsilon}_5 = (1, 0, 0, 0, 0)$ *έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^5$ *η οποία περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων* $\mathcal{B}'$.

(2) *Έστω* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε:*

$$\lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 = (0, 0, 0, 0) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1(2, 3, 5, -4, 1) + \lambda_2(1, -1, 2, 3, 5) = (0, 0, 0, 0) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Το παραπάνω ομογενές σύστημα με αγνώστους τα λ_1, λ_2 έχει προφανώς μόνο τη μηδενική λύση: από την δεύτερη εξίσωση έχουμε $\lambda_2 = 3\lambda_1$ και τότε από την πρώτη έχουμε $5\lambda_1 = 0$ από όπου $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}' = \{\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Αναζητούμε τρία διανύσματα $\vec{\epsilon}_3 = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, $\vec{\epsilon}_4 = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$, $\vec{\epsilon}_5 = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \in \mathbb{R}^5$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{\vec{\epsilon}_3,\ \vec{\epsilon}_4,\ \vec{\epsilon}_5\}$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^5$. Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές σχηματίζονται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2$, αναζητούμε τρεις πεντάδες αριθμών $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ έτσι ώστε ο πίνακας

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $|X| \neq 0$. Επιλέγοντας

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (0, 0, 1, 0, 0), \quad (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (0, 0, 0, 1, 0), \quad (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (0, 0, 0, 0, 1)$$

προκύπτει εύκολα ότι:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

και επομένως, θέτοντας

$$\vec{\epsilon}_3 = (0, 0, 1, 0, 0), \quad \vec{\epsilon}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \quad \vec{\epsilon}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$ η οποία περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}'$.

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:*

$$\vec{x} = (3, 9, -4, -2), \quad \vec{y} = (1, -2, 0, 3), \quad \vec{z} = (2, 3, 0, -1), \quad \vec{w} = (2, -1, 2, 1)$$

(1) *Να βρεθεί ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$.*
(2) *Να εξετασθεί αν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
(3) *Αν τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, να βρεθεί μια σχέση γραμμική εξάρτησης μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$.*
(4) *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V}$.*
(5) *Να βρεθεί μια βάση του $\mathbb{R}^4$ η οποία περιέχει μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}$.*
(6) *Να βρεθεί υποχωρος $\mathcal{U}$ του $\mathbb{R}^4$ έτσι ώστε:*

$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Λύση. *(1) Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_2]{\Gamma_2 \to \Gamma_1 - 3\Gamma_2,\, \Gamma_3 - 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 15 & -4 & -11 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{7}\Gamma_3]{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 15 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 15\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \frac{1}{2}\Gamma_4]{\Gamma_2 \to -\frac{1}{4}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 2\Gamma_3]{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Επομένως

$$\big\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \,\big\rangle = \Big\langle (1,0,0,1),\ (0,1,0,-1),\ (0,0,1,-1) \Big\rangle \tag{$*$}$$

δηλαδή

$$\big\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \,\big\rangle = \Big\{ \big(\kappa, \lambda, \mu, \kappa - \lambda - \mu\big) \in \mathbb{R}^4 \mid \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Big\} \tag{$**$}$$

(2) Το σύνολο διανυσμάτων $\big\{\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z},\ \vec{w}\big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν η ορίζουσα του πίνακα A ο οποίος έχει ως γραμμές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$, έχει μη-μηδενική ορίζουσα. Επειδή η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A έχει μια μηδενική γραμμή, έπεται ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος και άρα $|A| = 0$. Επομένως τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(3) Εξετάζουμε αν τα διανύσματα $\vec{z}$ και $\vec{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$\kappa\vec{z} + \lambda\vec{w} = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \kappa(2,3,0,-1) + \lambda(2,-1,2,1) = (0,0,0,0) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad (2\kappa, 3\kappa, 0, -\kappa) + (2\lambda, -\lambda, 2\lambda, \lambda) = (0,0,0,0) \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 2\kappa + 2\lambda = 0 \\ 3\kappa - \lambda = 0 \\ 2\lambda = 0 \\ -\kappa + \lambda = 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \kappa = \lambda = 0$$

Επομένως τα διανύσματα $\vec{z}$ και $\vec{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Στη συνέχεια εξετάζουμε αν το διάνυσμα $\vec{y}$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle \vec{z}, \vec{w} \,\rangle$. Θα έχουμε

$$\vec{y} \in \langle \vec{z}, \vec{w} \,\rangle \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}:\ \ \vec{y} = \kappa\vec{z} + \lambda\vec{w} \quad\Longrightarrow\quad (1,-2,0,3) = \big(2\kappa + 2\lambda,\ 3\kappa - \lambda,\ 2\lambda,\ -\kappa + \lambda\big) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases} 2\kappa + 2\lambda = 1 \\ 3\kappa - \lambda = -2 \\ 2\lambda = 0 \\ -\kappa + \lambda = 3 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \kappa = -3 \\ 3\kappa - \lambda = -2 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \kappa = -3 \\ -9 = -2 \end{cases} \quad : \quad \textit{άτοπο}$$

Άρα $\vec{y} \notin \langle \vec{z}, \vec{w} \,\rangle$. Επειδή το σύνολο $\big\{\vec{z}, \vec{w}\big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $\vec{y} \notin \langle \vec{z}, \vec{w} \,\rangle$, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\big\{\vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και τα διανύσματα $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι $\vec{x} \in \langle \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \,\rangle$.

Έστω $\vec{x} = \kappa\vec{y} + \lambda\vec{z} + \mu\vec{w}$, όπου οι $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι αριθμοί προς προσδιορισμό. Τότε θα έχουμε:

$$\vec{x} = \kappa\vec{y} + \lambda\vec{z} + \mu\vec{w} \quad\Longrightarrow\quad (3,9,-4,-2) = \kappa(1,-2,0,3) + \lambda(2,3,0,-1) + \mu(2,-1,2,1) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (3,9,-4,-2) = \big(\kappa+2\lambda+2\mu,\ -2\kappa+3\lambda-\mu,\ 2\mu,\ -2\kappa-\lambda+\mu\big) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \kappa+2\lambda+2\mu = 3 \\ -2\kappa+3\lambda-\mu = 9 \\ 2\mu = -4 \\ -2\kappa-\lambda+\mu = -2 \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτει εύκολα ότι: $\kappa = 1$, $\lambda = 3$, *και* $\mu = -2$. *Άρα:*

$$\vec{x} = \vec{y} + 3\vec{z} - 2\vec{w}$$

Η παραπάνω σχέση είναι η ζητούμενη σχέση γραμμικής εξάρτησης των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, *και* $\vec{w}$.

(4) Από τη σχέση (*) προκύπτει ότι τα διανύσματα $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,-1)$, *και* $(0,0,1,-1)$ *είναι γεννήτορες του υπόχωρου* $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\,\rangle$. *Το σύνολο* $\big\{(1,0,0,1),\ (0,1,0,-1),\ (0,0,1,-1)\big\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο διότι*

$$\kappa(1,0,0,1) + \lambda(0,1,0,-1) + \mu(0,0,1,-1) = (0,0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \kappa = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,0,0,1)$, $\vec{\beta} = (0,1,0,-1)$, *και* $\vec{\gamma} = (0,0,1,-1)$ *είναι μια βάση του υπόχωρου* $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\,\rangle$, *και επομένως:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\,\rangle = 3$$

(5) Αναζητούμε ένα διάνυσμα $\vec{\delta} \in \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\big\{\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma},\ \vec{\delta}\big\}$ *να είναι βαση του* $\mathbb{R}^4$. *Ισοδύναμα αναζητούμε γραμμή η οποία να συμπληρώνει τον* 3×4 *πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

σε έναν αντιστρέψιμο 4×4 *πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος προφανώς είναι αντιστρέψιμος. Επομένως θέτοντας $\vec{\delta} = (0,0,0,1)$ *έπεται ότι το σύνολο διανυσμάτων*

$$\Big\{\vec{\alpha} = (1,0,0,1),\ \vec{\beta} = (0,1,0,-1),\ \vec{\gamma} = 0,0,1,-1),\ \vec{\delta} = (0,0,0,1)\Big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$ *η οποία επεκτείνει τη βάση* $\big\{\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}\big\}$ *του υπόχωρου* $\mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\,\rangle$.

(6) Θέτουμε

$$\mathcal{U} = \langle (0,0,0,1)\,\rangle = \big\{(0,0,0,\kappa) \in \mathbb{R}^4 \mid \kappa \in \mathbb{R}\big\}$$

Τότε από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Άσκηση 10. *Έστω* $\lambda \in \mathbb{K}$ *και θεωρούμε τα διανύσματα του* $\mathbb{K}_2[x]$:

$$P(x) = -1 + x + 3x^2, \quad Q(x) = 5 - 2x + 9x^2, \quad R(x) = 1 - \lambda x + 2\lambda x^2$$

Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου

$$\big\langle P(x),\ Q(x),\ R(x)\big\rangle$$

η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{K}_2[x]$.

Λύση. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 9 \\ 1 & -\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

ο οποίος προκύπτει από τις συνιστώσες των πολυωνύμων στην κανονική βάση $\mathcal{B} = \{1,\, x,\, x^2\}$ *του* $\mathbb{K}_2[x]$.

Θα έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 9 \\ 1 & -\lambda & 2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 5\Gamma_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 24 \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda+3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_1 \to -\Gamma_1]{\Gamma_3 \to (1-\lambda)\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 10\lambda - 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{5}\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Έστω ότι* $\lambda \neq \frac{1}{2}$. *Τότε:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2\lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{2\lambda-1}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 - 8\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τα πολυώνυμα τα οποία προκύπτουν από τον τελευταίο πίνακα: 1, x, *και* x^2, *δηλαδή τα πολυώνυμα της κανονικής βάσης του* $\mathbb{K}_2[x]$. *Τότε γνωρίζουμε ότι*

$$\big\langle P(x),\, Q(x),\, R(x) \big\rangle = \big\langle 1,\, x,\, x^2 \big\rangle = \mathbb{K}_2[x]$$

Επομένως, αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$, *έπεται ότι η κανονική βάση* $\{1,\, x,\, x^2\}$ *είναι ήδη μια βάση του* $\big\langle P(x),\, Q(x),\, R(x) \big\rangle = \mathbb{K}_2[x]$.

(2) *Έστω ότι* $\lambda = \frac{1}{2}$. *Τότε ο τελευταίος πίνακας γράφεται:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τα πολυώνυμα τα οποία προκύπτουν από τον τελευταίο πίνακα: $A(x) = 1 - 3x^2$ *και* $B(x) = x + 8x^2$, *και γνωρίζουμε τότε ότι:*

$$\big\langle P(x),\, Q(x),\, R(x) \big\rangle = \big\langle A(x),\, B(x) \big\rangle$$

Τα πολυώνυμα $A(x)$, $B(x)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι αν* $k_1 A(x) + k_2 B(x) = 0$, *τότε:*

$$k_1(1 - 3x^2) + k_2(x + 8x^2) = 0 \implies k_1 + k_2 x + (8k_2 - 3k_1)x^2 = 0 \implies$$

$$\implies k_1 = 0 = k_2$$

Επομένως τα πολυώνυμα $A(x), B(x)$ *αποτελούν μια βάση του υπόχωρου* $\big\langle P(x),\, Q(x),\, R(x) \big\rangle$.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $C(x) = x^2$. *Τότε ο πίνακας ο οποίος προκύπτει από τις συνιστώσες των πολυωνύμων* $A(x), B(x), C(x)$ *ως προς την κανονική βάση του* $\mathbb{K}_2[x]$ *είναι ο*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επειδή $|M| = 1$, *έπεται ότι ο* M *είναι αντιστρέψιμος και άρα, αν* $\lambda = \frac{1}{2}$, *το σύνολο πολυωνύμων* $\{A(x), B(x), C(x)\}$ *αποτελεί μια βάση του* $\mathbb{K}_2[x]$ *η οποία συμπληρώνει τη βάση* $\{A(x), B(x)\}$ *του* $\big\langle P(x),\, Q(x),\, R(x) \big\rangle$.

Άσκηση 11. *Έστω P ένας σταθερός αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο:*

$$\mathcal{V}(P) = \big\{ A \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid \text{ο πίνακας } \ P^{-1}AP \ \text{ είναι διαγώνιος} \big\}$$

Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{V}(P)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ και ακολούθως να βρείτε μια βάση του.

Λύση. *Έστω $A \in \mathcal{V}(P)$, δηλαδή*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) P^{-1} \\ &= \alpha \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right) + \beta \left(P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right) + \gamma \left(P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \end{aligned}$$

και άρα έπεται ότι

$$\mathcal{V}(P) = \left\langle P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right\rangle$$

Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{V}(P)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_3(\mathbb{R})$, και τα διανύσματα

$$\vec{\Gamma} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \vec{\Delta} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \vec{\Sigma} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

παράγουν τον υπόχωρο $\mathcal{V}(P)$. Έστω $\lambda_1\vec{\Gamma} + \lambda_2\vec{\Delta} + \lambda_3\vec{\Sigma} = \vec{0}$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Τότε

$$P \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \right) P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση από αριστερά με P^{-1} και δεξιά με P έχουμε

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

'ρα, τα διανύσματα $\vec{\Gamma}$, $\vec{\Delta}$, $\vec{\Sigma}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αφού παράγουν τον $\mathcal{V}(P)$ συνεπάγεται ότι το σύνολο $\big\{\vec{\Gamma}, \vec{\Delta}, \vec{\Sigma}\big\}$ αποτελεί βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}(P)$.

Άσκηση 12. *Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις:*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \sin(x), \qquad f_3(x) = \cos(x)$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο συναρτήσεων $\big\{f_1, \ f_2, \ f_3\big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λύση. *Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι:*

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \mathsf{0}$$

όπου $\mathsf{0}$ *είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε θα έχουμε:*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(x) = \mathsf{0}(x) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad \lambda_1 x + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(x) = 0 \qquad (*)$$

Η σχέση (*) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x *και επομένως:*

(1) *Για* $x = 0$, *έπεται ότι:*

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \sin(0) + \lambda_3 \cos(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_3 = 0$$

(2) *Για* $x = \frac{\pi}{2}$, *χρησιμοποιώντας ότι* $\lambda_3 = 0$, *έπεται ότι:*

$$\lambda_1 \cdot \frac{\pi}{2} + \lambda_2 \sin(\frac{\pi}{2}) + \lambda_3 \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 \frac{\pi}{2} + \lambda_2 = 0$$

(3) *Για* $x = \pi$, *χρησιμοποιώντας ότι* $\lambda_3 = 0$, *έπεται ότι:*

$$\lambda_1 \cdot \pi + \lambda_2 \sin(\pi) + \lambda_3 \cos(\pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 \pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ *και επομένως το σύνολο συναρτήσεων* $\{f_1, f_2, f_3\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Άσκηση 13. *Στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *όλων των συναρτήσεων* $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$, *θεωρούμε τις συναρτήσεις:*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad \cdots, \quad f_n(x) = x^n$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο συναρτήσεων $\{f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Να συμπεράνετε ότι ο $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *έχει άπειρη διάσταση.*

Λύση. *Έστω* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *και υποθέτουμε ότι:*

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = \mathsf{0}$$

όπου $\mathsf{0}$ *είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε θα έχουμε:*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad (\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots \lambda_n f_n)(x) = \mathsf{0}(x) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0 \qquad (1)$$

(1) *(Πρώτος Τρόπος) Επειδή η σχέση (1) ισχύει για κάθε προαγματικό αριθμό* x, *θα έχουμε:*

(α΄) *Θέτοντας* $x = 0$ *στην (1) έπεται ότι:*

$$\lambda_0 = 0$$

(β΄) *Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) και λαμβάνοντα υπ΄ όψιν ότι* $\lambda_0 = 0$, *θα έχουμε:*

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 x + 3\lambda x^2 \cdots + n\lambda_n x^{n-1} = 0 \qquad (2)$$

Επειδή η σχέση (2) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, *θέτοντας* $x = 0$ *στην (2), θα έχουμε:*

$$\lambda_1 = 0$$

(γ΄) *Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) και λαμβάνοντα υπ΄ όψιν ότι* $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, *θα έχουμε:*

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad 2\lambda_2 + 6\lambda_3 x + \cdots + n(n-1)\lambda_n x^{n-2} = 0 \qquad (3)$$

Επειδή η σχέση (3) ισχύει για κάθε προαγματικό αριθμό x, *θέτοντας* $x = 0$ *στην (3), θα έχουμε:*

$$2\lambda_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_2 = 0$$

$$\vdots$$

(δ΄) *Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, μετά από* n *βήματα θα καταλήξουμε ότι* $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ *και στη σχέση*

$$n!\lambda_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_n = 0$$

Επομένως $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ *και άρα το σύνολο συναρτήσεων* $\{f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

(2) (Δεύτερος Τρόπος) Όπως και στον Πρώτο Τρόπο έπεται άμεσα ότι $\lambda_0 = 0$. Επιλέγουμε n το πλήθος θετικούς πραγματικούς αριθμούς ρ_i, $1 \le i \le n$, έτσι ώστε $\rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_n$. Τότε θέτοντας $x = \rho_i$, $1 \le i \le n$ στη σχέση (1), έπεται ότι:

$$\begin{aligned} \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_1^2 + \cdots + \lambda_n\rho_1^n &= 0 \\ \lambda_1\rho_2 + \lambda_2\rho_2^2 + \cdots + \lambda_n\rho_2^n &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1\rho_n + \lambda_2\rho_n^2 + \cdots + \lambda_n\rho_n^n &= 0 \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι λύση του παραπάνω ομογενούς γραμμικού συστήματος (Σ), το οποίος έχει ως πίνακα συντελεστών τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^n \\ \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^n \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$|A| = \rho_1\rho_2\cdots\rho_n \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1^{n-1} \\ 1 & \rho_2 & \cdots & \rho_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \cdots & \rho_n^{n-1} \end{vmatrix} = \rho_1\rho_2\cdots\rho_n \prod_{1\le j<i\le n}^{n} (\rho_i - \rho_j) \neq 0$$

διότι $0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_n$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον γνωστό υπολογισμό της ορίζουσας Vandermonde. Επειδή η ορίζουσα των συντελεστών του (Σ) είναι διάφορη του μηδενός, έπεται ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Επομένως $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ και άρα το σύνολο συναρτήσεων $\{f_0,\, f_1,\, f_2,\, \cdots,\, f_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ έχει άπειρη διάσταση. Πραγματικά, αν $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = n < \infty$, τότε γνωρίζουμε ότι $n+1$ το πλήθος διανύσματα του $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα. Αυτό είναι άτοπο διότι δείξαμε ότι $\forall n \ge 1$, το σύνολο $\{f_0,\, f_1,\, f_2,\, \cdots,\, f_n\}$, το οποίο αποτελείται από $n+1$ διανύσματα, είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ έχει άπειρη διάσταση.

Παρατήρηση. Έστω $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ το οποίο αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε τότε ότι το $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ έχει άπειρη διάσταση, όπως μποριούμε να δούμε από την παραπάνω Άσκηση διότι, $\forall n \ge 1$, το σύνολο συνεχών συναρτήσεων $\{f_0,\, f_1,\, f_2,\, \cdots,\, f_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Άσκηση 14. Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ όλων των συναρτήσεων $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_1(x) = e^x, \qquad f_2(x) = e^{2x}, \qquad f_3(x) = e^{3x}$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο συναρτήσεων $\{f_1,\, f_2,\, f_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λύση. Έστω $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \mathsf{0}$$

όπου $\mathsf{0}$ είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε θα έχουμε:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(x) = \mathsf{0}(x) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{3x} = 0 \qquad (1)$$

Θέτοντας στην (1) διαδοχικά: $x = 0, 1, -1$, *προκύπτουν οι σχέσεις:*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 e + \lambda_2 e^2 + \lambda_3 e^3 = 0 \\ \lambda_1 e^{-1} + \lambda_2 e^{-2} + \lambda_3 e^{-3} = 0 \end{cases} \tag{Σ}$$

Θεωρούμε το παραπάνω ως ένα ομογενές γραμμικό σύστημα (Σ) *με αγνώστους τα* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. *Ο πίνακας των συντελεστών του* (Σ) *είναι ο*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e & e^2 & e^3 \\ e^{-1} & e^{-2} & e^{-3} \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε:

$$|A| = e^2 - 2e - e^{-2} + 2e^{-1} = (e^2 - e^{-2}) - 2(e - e^{-1}) = (e^2 - \frac{1}{e^2}) - 2(e - \frac{1}{e}) = \frac{e^4 - 1}{e^2} - 2\frac{e^2 - 1}{e} =$$

$$= \frac{e^2 - 1}{e}\left(\frac{e^2 + 1}{e} - 2\right) = \frac{e^2 - 1}{e^2}\big(e^2 - 2e + 1\big) = \frac{e^2 - 1}{e^2}\big(e - 1\big)^2 \neq 0$$

διότι $e \neq \pm 1$. *Επομένως το ομογενές γραμμικό σύστημα* (Σ) *έχει μονο τη μηδενική λύση* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. *Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο συναρτήσεων* $\big\{f_1,\ f_2,\ f_3\big\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Άσκηση 15. *Έστω* M *ένας σταθερός* 2×2 *πίνακας πραγματικών αριθμών. Να δείξετε ότι το σύνολο*

$$\mathcal{V}(M) = \big\{A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\big\}$$

όλων των 2×2 *πινάκων οι οποίοι μετατίθενται με τον* M *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$. *Αν*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρείτε μια βάση του $\mathcal{V}(M)$.

Λύση. *Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι το σύνολο*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(M) &= \big\{A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\big\} \\ &= \big\{A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AM - MA = 0\big\} \end{aligned}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Έχουμε:*

(1) *Το σύνολο* $\mathcal{V}(M) \neq \emptyset$ *αφού ο μηδενικός πίνακας* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}(M)$.

(2) *Έστω* $A_1, A_2 \in \mathcal{V}(M)$. *Τότε*

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)M - M(A_1 + A_2) &= A_1 M + A_2 M - M A_1 - M A_2 \\ &= (A_1 M - M A_1) + (A_2 M - M A_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

και άρα $A_1 + A_2 \in \mathcal{V}(M)$.

(3) *Έστω* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και* $A \in \mathcal{V}(M)$. *Τότε*

$$\begin{aligned} (\lambda A)M - M(\lambda A) &= \lambda AM - \lambda MA \\ &= \lambda(AM - MA) \\ &= \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

και άρα $\lambda A \in \mathcal{V}(M)$.

Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{V}(M)$ *είναι* $\mathbb{R}$*-υπόχωρος του* $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Στην συνέχεια θα βρούμε μια βάση του* $\mathcal{V}(M)$ *στην περίπτωση που* $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. *Έστω* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *έτσι ώστε*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3b+2c & -2a+2d \\ 3d-3a & -2c-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = d \\ b = -\frac{2}{3}c \end{cases}$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(M) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = d,\ b = -\frac{2}{3}c \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -\frac{2}{3}c \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a,\ c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a,\ c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

και άρα έχουμε ότι οι πίνακες $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *και* $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *παράγουν τον υπόχωρο* $\mathcal{V}(M)$. *Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο* $\{\Gamma, \Delta\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του* $\mathcal{V}(M)$.

Άσκηση 16. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (1,1,1,a), \quad \vec{y} = (1,0,1,b), \quad \vec{z} = (-2,2,-2,c) \ \in \ \mathbb{R}^4$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Λύση. (1) *(Πρώτος Τρόπος)* *Έστω* $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{z} = \vec{0}$ *με* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\begin{aligned} \lambda_1(1,1,1,a) + \lambda_2(1,0,1,b) + \lambda_3(-2,2,-2,c) &= (0,0,0,0) \\ \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c) &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

και λύνοντας βρίσκουμε ότι $\lambda_2 = -2\lambda_1$ *και* $\lambda_1 = -2\lambda_3$. *'ρα, θέτοντας* $\lambda_3 = k$ *με* $k \in \mathbb{R}$ *έχουμε τη γενική λύση* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-2k, 4k, k)$. *Τότε έχουμε* $-2ka + 4kb + kc = 0 \implies k(-2a + 4b + c) = 0$.

Διακρίνουμε τις παρακάτω δυο περιπτώσεις:

(α΄) *Έστω* $-2a + 4b + c \neq 0$. *Τότε* $k = 0$ *και άρα* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. *Συνεπώς, το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί βάση του* $\mathcal{V}$. *Επομένως* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 3$.

(β΄) *Έστω* $-2a + 4b + c = 0$. *Τότε* $k \in \mathbb{R}$ *και τα διανύσματα* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα. Για* $k = 1$ *έχουμε τη σχέση γραμμικής εξάρτησης:* $-2\vec{x} + 4\vec{y} + \vec{z} = \vec{0} \implies \vec{z} = -2\vec{x} + 4\vec{y}$. *Τότε*

$$\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad \implies \quad \mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Εύκολα δείχνουμε ότι το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί βάση του* $\mathcal{V}$. *Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή έχουμε* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$.

(2) *(Δεύτερος Τρόπος)* *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ -2 & 2 & -2 & c \end{pmatrix}$$

ο οποίος προκύπτει από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, *και* $\vec{z}$, *και θα έχουμε*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ -2 & 2 & -2 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 4 & 0 & c+2a \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to -\Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a+4b \end{pmatrix} := A$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω δυο περιπτώσεις:

(α') *Έστω $c-2a+4b\neq 0$. Τότε θα έχουμε:*

$$\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&1&0&a-b\\0&0&0&c-2a+4b\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2]{\Gamma_3\to\frac{1}{c-2a+4b}\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&0&1&b\\0&1&0&a-b\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Επομένως

$$\mathcal{V}=\big\langle(1,0,1,b),\,(0,1,0,a-b),\,(0,0,0,1)\big\rangle$$

Εύκολα προκύπτει ότι τα διανύσματα $(1,0,1,b)$, $(0,1,0,a-b)$, $(0,0,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του $\mathcal{V}$.

(β') *Έστω $c-2a+4b=0$. Τότε ο πίνακας A είναι ο εξής*

$$\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&1&0&a-b\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

και επομένως

$$\mathcal{V}=\big\langle(1,0,1,b),\,(0,1,0,a-b)\big\rangle$$

Εύκολα προκύπτει ότι τα διανύσματα $(1,0,1,b)$, $(0,1,0,a-b)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του $\mathcal{V}$.

Άσκηση 17. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}=\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle$ ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα*

$$\vec{u}=(0,1,2),\quad \vec{v}=(0,-1,2),\quad \vec{w}=(0,3,4)$$

η οποία να επεκταθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Λύση. (1) (Πρώτος Τρόπος) *Έστω $\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}+\lambda_3\vec{w}=\vec{0}$ με $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$. Τότε*

$$\begin{aligned}\lambda_1(0,1,2)+\lambda_2(0,-1,2)+\lambda_3(0,3,4)&=(0,0,0)\\ \Longrightarrow\quad (0,\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3,2\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3)&=(0,0,0)\end{aligned}$$

και άρα καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}$$

όπου βρίσκουμε ότι $\lambda_1=-\frac{5}{2}\lambda_3$ και $\lambda_2=\frac{1}{2}\lambda_3$. Συνεπώς, θέτοντας $\lambda_3=k$ με $k\in\mathbb{R}$ έχουμε τη γενική λύση $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(-\frac{5}{2}k,\frac{1}{2}k,k)$ και άρα τα διανύσματα $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Για $k=2$ έχουμε $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=2$. 'ρα μια σχέση γραμμικής εξάρτησης είναι $-5\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}=5\vec{u}-2\vec{w}$. Τότε

$$\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle\quad\Longrightarrow\quad\mathcal{V}=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle$$

Εύκολα δείχνουμε ότι το σύνολο $\{\vec{u},\vec{w}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και αφού παράγει τον $\mathcal{V}$ έπεται ότι αποτελεί βάση του $\mathcal{V}$. Επομένως $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}=2$.

Στην συνέχεια θέλουμε να επεκτείνουμε τη βάση του $\mathcal{V}$ που βρήκαμε σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Αφού $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}=2$ ψάχνουμε ένα διάνυσμα $\vec{x}=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{u},\vec{w},\vec{x}\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θέτουμε $\vec{x}=(1,0,0)$. Τότε

$$\begin{vmatrix}0&1&2\\0&3&4\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

και άρα, από το (4) το σύνολο $\{\vec{u},\vec{w},\vec{x}\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

(2) <u>(Δεύτερος Τρόπος)</u> *Θα μπορούσαμε να εργασθούμε και ως εξής:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_2]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{10}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{4}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\mathcal{V} = \big\langle (0,1,0),\ (0,0,1) \big\rangle$$

Επειδή προφανώς τα διανύσματα $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι αποτελούν μια βάση του* $\mathcal{V}$. *Στην συνέχεια θέλουμε να επεκτείνουμε τη βάση του* $\mathcal{V}$ *που βρήκαμε σε μια βάση του* $\mathbb{R}^3$. *Αυτό είναι άμεσο επιλέγοντας να προσθέσουμε στη βάση του* $\mathcal{V}$ *το διάνυσμα* $(1,0,0)$.

Άσκηση 18. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Υποθέτουμε ότι το σύνολο*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n\}$$

είναι βάση του $\mathcal{E}$.

(1) *Να δείξετε ότι τότε το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i + \lambda\vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_n\big\}$$

είναι βάση του $\mathcal{E}$, *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{K}$ *και* $i \neq j$.

(2) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α') *Το σύνολο*

$$\mathcal{D} = \big\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \cdots,\ \vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n,\ \vec{e}_n + \vec{e}_1\big\}$$

είναι βάση του $\mathcal{E}$.

(β') *Το* n *είναι περιττός.*

Λύση. (1) *Το σύνολο* $\mathcal{C}$ *είναι βάση του* $\mathcal{E}$ *αν το* $\mathcal{C}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο διότι* $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$. *Έστω*

$$\begin{aligned} \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\vec{e}_{i-1} + \lambda_i(\vec{e}_i + \lambda\vec{e}_j) + \lambda_{i+1}\vec{e}_{i+1} + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n &= \vec{0} \\ \Longrightarrow \quad \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\vec{e}_{i-1} + \lambda_i\vec{e}_i + \lambda_{i+1}\vec{e}_{i+1} + \cdots + (\lambda_j + \lambda_i\lambda)\vec{e}_j + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n &= \vec{0} \end{aligned}$$

και αφού το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο έχουμε*

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{i-1} = \lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_j + \lambda_i\lambda = \cdots = \lambda_n = 0$$

και άρα έπεται ότι $\lambda_i = 0$ *για κάθε* $i = 1, \cdots, n$. *Συνεπώς, το σύνολο* $\mathcal{C}$ *είναι βάση του* $\mathcal{E}$.

(2) *Εξετάζουμε πότε το σύνολο* $\mathcal{D}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω*

$$\begin{aligned} \lambda_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \lambda_2(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \cdots + \lambda_{n-1}(\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n) + \lambda_n(\vec{e}_n + \vec{e}_1) &= \vec{0} \\ \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_n)\vec{e}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{e}_2 + \cdots + (\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1})\vec{e}_{n-1} + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)\vec{e}_n &= \vec{0} \end{aligned}$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \qquad \vdots \\ \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} = 0 \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad \lambda_n = -\lambda_1 = (-1)^2\lambda_2 = \cdots = (-1)^{n-1}\lambda_{n-1} = (-1)^n\lambda_n$$

Επομένως έχουμε $\lambda_n = (-1)^n\lambda_n$.

- $(\beta') \implies (\alpha')$: *Αν το* n *είναι περιττός, τότε* $\lambda_n = -\lambda_n \Rightarrow \lambda_n = 0$ *και άρα* $\lambda_i = 0$ *για κάθε* $i = 1, \cdots, n$. *Συνεπώς, το σύνολο* $\mathcal{D}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα βάση του* $\mathcal{E}$.

- $(\alpha') \implies (\beta')$: *Υποθέτουμε ότι το* n *είναι άρτιος. Τότε* $\lambda_n = \lambda_n$ *και άρα για* $\lambda_1 = k \in \mathbb{R}$ *έχουμε τη γενική λύση του* (Σ):

$$\lambda_1 = k, \lambda_2 = -k, \lambda_3 = k, \cdots, \lambda_{n-1} = k, \lambda_n = -k$$

και άρα για $k = 1$ *έχουμε την ακόλουθη σχέση γραμμικής εξάρτησης:*

$$1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + (-1)(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \cdots + 1(\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n) + (-1)(\vec{e}_n + \vec{e}_1) = \vec{0}$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι αν το n *είναι άρτιος τότε το σύνολο* $\mathcal{D}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένο και άρα έχουμε το ζητούμενο.*

Άσκηση 19. *Έστω τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 0, \cdots, 0), \quad \vec{x}_2 = (0, 1, 1, 0 \cdots, 0), \quad \cdots, \quad \vec{x}_n = (1, 0 \cdots, 0, 1)$$

Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}}\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ *του υπόχωρου ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

Λύση. *Έστω*

$$\begin{aligned}\lambda_1(1,1,0,\cdots,0) + \lambda_2(0,1,1,0,\cdots,0) + \cdots + \lambda_{n-1}(0,0,\cdots,1,1) + \lambda_n(1,0,\cdots,0,1) &= (0,\cdots,0)\\ \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_n, \lambda_2 + \lambda_3, \cdots, \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1} + \lambda_n) &= (0,\cdots,0)\end{aligned}$$

και άρα έχουμε το σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_n = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \qquad \vdots \\ \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} = 0 \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \end{cases}$$

Από την 'σκηση 18 έχουμε ότι το σύστημα (Σ) *έχει μόνο τη μηδενική λύση αν και μόνο αν το* n *είναι περιττός. 'ρα, αν το* n *είναι περιττός, τότε το σύνολο* $\{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα από το ΘΑ 4 αποτελεί βάση του* $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. *Συνεπώς στην περίπτωση που το* n *είναι περιττός έχουμε* $\dim_{\mathbb{R}}\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle = n$ *και άρα* $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \mathbb{R}^n$, *δηλαδή το σύνολο* $\{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathbb{R}^n$.

Αν το n *είναι άρτιος, τότε η γενική λύση του* (Σ) *είναι:*

$$\lambda_1 = k, \lambda_2 = -k, \cdots, \lambda_{n-1} = k, \lambda_n = -k$$

και άρα για $k = 1$ *έχουμε τη παρακάτω σχέση γραμμικής εξάρτησης:*

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3 - \cdots + \vec{x}_{n-1} - \vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_n = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3 - \cdots + \vec{x}_{n-1}$$

Συνεπώς έχουμε

$$\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{n-1} \rangle$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{n-1}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο* $\{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{n-1}\}$ *αποτελεί βάση του* $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ *και άρα* $\dim_{\mathbb{R}}\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle = n - 1$.

Άσκηση 20. *Έστω* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *και*

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\big\}$$

Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$.

Λύση. *Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:*

(1) *Αν τα* $\alpha_i = 0$ *για κάθε* $i = 1, 2, \cdots, n$ *τότε προφανώς* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ *και άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n$.

(2) *Έστω ότι* $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$. *Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι* $\alpha_1 \neq 0$ *και τότε* $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n$. *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \left\{(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{x_2(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \cdots, 0) + x_3(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \cdots, 0) + \cdots + x_n(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\langle(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \cdots, 0),\ (-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \cdots, 0),\ \cdots,\ (-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \cdots, 0, 1)\right\rangle
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\vec{\epsilon}_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \cdots, 0\right), \quad \vec{\epsilon}_2 = \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \cdots, 0\right), \quad \cdots, \quad \vec{\epsilon}_{n-1} = \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \cdots, 0, 1\right)$$

'ρα από την παραπάνω περιγραφή του $\mathcal{V}$ *έχουμε ότι τα διανύσματα* $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}$ *παράγουν τον* $\mathcal{V}$. *Έστω* $\lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\vec{\epsilon}_{n-1} = \vec{0}$ *με* $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\vec{\epsilon}_{n-1} = \vec{0} \implies \left(-\frac{\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_3 + \cdots + \lambda_{n-1}a_n}{a_1},\ \lambda_1,\ \lambda_2, \cdots,\ \lambda_{n-1}\right) = (0, 0, \cdots, 0)$$

και άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$, *δηλαδή τα διανύσματα* $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο* $\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathcal{V}$ *και άρα* $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = n - 1$.

Άσκηση 21. *Έστω* $\vec{x} = (2, 1, 4, 3), \vec{y} = (2, 1, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$. *Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων* $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και να βρεθούν δύο διανύσματα* $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ *να αποτελεί βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Λύση. *Έστω* $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{0}$ *με* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\begin{aligned}
\lambda_1(2, 1, 4, 3) + \lambda_2(2, 1, 1, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\
\implies (2\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, 4\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1) &= (0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

και άρα άμεσα θα έχουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *Επομένως, το σύνολο διανυσμάτων* $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Επειδή $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4 = 4$, *αναζητούμε δυο διανύσματα* $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ *να είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα βάση του* $\mathbb{R}^4$. *Αν* $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ *και* $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ *τότε θα πρέπει*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Θέτουμε $\vec{z} = (1, 0, 0, 0)$ *και* $\vec{w} = (0, 1, 0, 0)$. *Τότε*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Συνεπώς από το (4) το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 22. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\langle A, B, \Gamma, \Delta\rangle$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, *και ακολούθως η βάση αυτή να συμπληρωθεί σε μια βάση του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

Λύση. *Έστω $\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 \Gamma + \lambda_4 \Delta = 0$ με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 & 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα προκύπτει το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 4\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_3 = \lambda_4, \quad \lambda_2 = 2\lambda_3, \quad \lambda_1 = -2\lambda_3$$

Θέτουμε $\lambda_3 = k \in \mathbb{R}$. Τότε η γενική λύση του (Σ) είναι $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-2k, 2k, k, k)$. Επομένως, για $k = 1$ έχουμε τη παρακάτω σχέση γραμμικής εξάρτησης:

$$-2A + 2B + \Gamma + \Delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = B + \frac{1}{2}\Gamma + \frac{1}{2}\Delta$$

και άρα επειδή το A είναι γραμμικός συνδυασμός των B, Γ, Δ, έπεται ότι τα B, Γ, Δ παράγουν τον ίδιο υπόχωρο με τα A, B, Γ, Δ:

$$\langle A, B, \Gamma, \Delta \rangle = \langle B, \Gamma, \Delta \rangle$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα B, Γ, Δ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα το σύνολο $\{B, \Gamma, \Delta\}$ αποτελεί βάση του υπόχωρου $\langle A, B, \Gamma, \Delta \rangle$. Συνεπώς έχουμε

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \langle A, B, \Gamma, \Delta \rangle = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \langle B, \Gamma, \Delta \rangle = 3$$

Στη συνέχεια θέλουμε να συμπληρώσουμε τη παραπάνω βάση του υπόχωρου $\langle B, \Gamma, \Delta \rangle$ σε μια βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$. *Επομένως, χρειάζομαστε άλλον ένα πίνακα X έτσι ώστε το σύνολο $\{X, B, \Gamma, \Delta\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θεωρούμε το πίνακα $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και έστω $\lambda_1 X + \lambda_2 B + \lambda_3 \Gamma + \lambda_4 \Delta = 0$, με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $\lambda_2 = 0$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία έχουμε $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ και άρα από την πρώτη έπεται ότι $\lambda_1 = 0$. Συνεπώς έχουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ και άρα το σύνολο $\{X, B, \Gamma, \Delta\}$ αποτελεί βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

Άσκηση 23. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου*

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\big\}$$

η οποία περιέχει το διάνυσμα $(1, 0, 1, 0)$ ηαι η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{K}^4$.

Αν $\mathcal{W}$ είναι ο υπόχωρος

$$\mathcal{W} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\big\}$$

ποιά είναι η διάσταση των υπόχωρων $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\mathcal{V} + \mathcal{W}$;

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$\begin{aligned}\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\big\} &= \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_3 = x_1 + 2x_2 - 2x_4\big\} = \\ &= \big\{(x_1, x_2, x_1 + 2x_2 - 2x_4, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, 4\big\} = \\ &= \big\{x_1(1, 0, 1, 0) + x_2(0, 1, 2, 0) + x_4(0, 0, -2, 1) \in \mathbb{K}^4 \mid x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, 4\big\} = \\ &= \big\langle \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\big\rangle\end{aligned}$$

όπου

$$\vec{x} = (1, 0, 1, 0), \qquad \vec{y} = (0, 1, 2, 0), \qquad \vec{z} = (0, 0, -2, 1)$$

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{z} = \vec{0}$. Τότε θα έχουμε:

$$\lambda_1(1, 0, 1, 0), +\lambda_2(0, 1, 2, 0) + \lambda_3(0, 0, -2, 1) = (0, 0, 0, 0) \quad\Longrightarrow\quad \big(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3,\ \lambda_3\big) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

και επομένως τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του $\mathcal{V}$, η οποία περιέχει το διάνυσμα $\vec{x} = (1, 0, 1, 0)$. Ιδιαίτερα έπεται ότι:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 3$$

Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

έπεται ότι αν θέσουμε $\vec{w} = (0, 0, 0, 1)$, το σύνολο διανυσμάτων

$$\big\{\vec{x} = (1, 0, 1, 0), \qquad \vec{y} = (0, 1, 2, 0), \qquad \vec{z} = (0, 0, -2, 1), \qquad \vec{w} = (0, 0, 0, 1)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}^4$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\big\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\big\}$ του $\mathcal{V}$.

Για τον $\mathcal{W}$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{W} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\big\} &= \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_2 = 2x_3 - x_4\big\} = \\ &= \big\{(x_1, 2x_3 - x_4, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 3, 4\big\} = \\ &= \big\{x_1(1, 0, 0, 0) + x_3(0, 2, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1) \in \mathbb{K}^4 \mid x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 3, 4\big\} = \\ &= \big\langle \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\big\rangle\end{aligned}$$

όπου

$$\vec{a} = (1, 0, 0, 0), \qquad \vec{b} = (0, 2, 1, 0), \qquad \vec{c} = (0, -1, 0, 1)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του $\mathcal{W}$. Ιδιαίτερα έπεται ότι:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{W} = 3$$

Ο υπόχωρος $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \ \text{ και } \ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\big\}$$

Δηλαδή $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$ είναι ο χώρος λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\ \qquad\ \ x_2-2x_3+x_4=0\end{cases}$$

του οποίου ο πίνακας συντελεστών είναι ο

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

Δίνοντας αυθαίρετες τιμές $x_3=t$, και $x_4=s$, έπεται ότι η γενική λύση του (Σ) είναι η

$$x_1=-3t+4s,\quad x_2=2t-s,\quad x_3=t,\quad x_4=s\quad (t,s\in\mathbb{K})$$

Επομένως

$$\mathcal{V}\cap\mathcal{W}=\big\{(-3t+4s,\,2t-s,\,t,\,s)\in\mathbb{K}^4\mid t,s\in\mathbb{K}\big\}=\big\{t(-3,2,1,0)+s(4,-1,0,1)\mid t,s\in\mathbb{K}\big\}=$$
$$=\big\langle(-3,2,1,0),\ (4,-1,0,1)\big\rangle$$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα διανύσματα $(-3,2,1,0)$, $(4,-1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. Ιδιαίτερα έπεται ότι:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})=2$$

Από την εξίσωση διαστάσεων

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W})=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{W}-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})$$

θα έχουμε:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W})=3+3-2=4$$

Επειδή ο $\mathcal{V}+\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^4$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W})=4=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}^4$, έπεται οτι:

$$\mathcal{V}+\mathcal{W}=\mathbb{K}^4$$

Άσκηση 24. *Έστω $\mathcal{V}=\big\langle\vec{x}_1,\,\vec{x}_2,\,\vec{x}_3,\,\vec{x}_4,\,\vec{x}_5\big\rangle$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{x}_1=(1,0,0,-1),\quad \vec{x}_2=(2,1,1,0),\quad \vec{x}_3=(1,1,1,1),\quad \vec{x}_4=(1,2,3,4),\quad \vec{x}_5=(0,1,2,3)$$

Να βρεθεί ένας υπόχωρος $\mathcal{U}$ του $\mathbb{R}^4$ έτσι ώστε:

$$\mathbb{R}^4=\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}$$

Λύση. *Θα προσδιορίσουμε πρώτα μια βάση του $\mathcal{V}$, βρίσκοντας ένα οικονομικότερο σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$. Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\2&1&1&0\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\0&1&2&3\end{pmatrix}$$

οι γραμμές του οποίου αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}_1,\,\vec{x}_2,\,\vec{x}_3,\,\vec{x}_4,\,\vec{x}_5$ και βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\2&1&1&0\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\0&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1,\ \Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&1&1&2\\0&2&3&5\\0&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-2\Gamma_2,\ \Gamma_5\to\Gamma_5-\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_4]{\Gamma_5\to\Gamma_5-\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\Gamma(A)$$

Θέτουμε

$$\vec{y}_1 = (1,0,0,-1), \quad \vec{y}_2 = (0,1,0,1), \quad \vec{y}_3 = (0,0,1,1)$$

Τότε γνωρίσουμε ότι $\mathcal{V} = \langle \vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \vec{y}_3 \rangle$. *Αν* $\lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \lambda_3\vec{y}_3 = \vec{0}$, *τότε θα έχουμε:*

$$\lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \lambda_3\vec{y}_3 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1(1,0,0,-1) + \lambda_2(0,1,0,1) + \lambda_3(0,0,1,1) = (0,0,0,0) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}' = \{\vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \vec{y}_3\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως είναι μια βάση του* $\mathcal{V}$.

Αναζητούμε δύο διάνυσμα $\vec{y}_4 = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{\vec{y}_4\}$ *να είναι βάση του* $\mathbb{R}^4$. *Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές σχηματίζονται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{y}_1,\ \vec{y}_2, \vec{y}_3$, *αναζητούμε μια τετράδα αριθμών* (a,b,c,d) *έτσι ώστε ο πίνακας*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $|X| \neq 0$. *Επιλέγοντας* $(a,b,c,d) = (0,0,0,1)$ *προκύπτει εύκολα ότι:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και επομένως, θέτοντας $\vec{y}_4 = (0,0,0,1)$ *έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^4$ *η οποία περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων* $\mathcal{B}'$.

Θέτοντας $\mathcal{U} = \langle \vec{y}_4 \rangle = \{k\vec{y}_4 \in \mathbb{R}^4 \mid k \in \mathbb{R}\} = \{(0,0,0,k) \in \mathbb{R}^4 \mid k \in \mathbb{R}\}$, *έπεται ότι*

$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Άσκηση 25. *Έστω* $\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,\ \vec{x}_4,\ \vec{x}_5 \rangle$ *ο υπόχωρος του* $\mathbb{R}^5$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{x}_1 = (1,1,1,1,0), \quad \vec{x}_2 = (1,1,-1,-1,-1), \quad \vec{x}_3 = (2,2,0,0,-1), \quad \vec{x}_4 = (1,1,5,5,2), \quad \vec{x}_5 = (1,-1,-1,0,0)$$

Να βρεθεί ένας υπόχωρος $\mathcal{U}$ *του* $\mathbb{R}^5$ *έτσι ώστε:*

$$\mathbb{R}^5 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Λύση. *Θα προσδιορίσουμε πρώτα μια βάση του* $\mathcal{V}$, *βρίσκοντας ένα οικονομικότερο σύνολο γεννητόρων του* $\mathcal{V}$. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

οι γραμμές του οποίου αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,\ \vec{x}_4,\ \vec{x}_5$ *και βρίσκουμε την ισχυρά* γ-*κλιμακωτή μορφή του:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1,\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to -\Gamma_2 - \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_3]{\Gamma_5 \leftrightarrow \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to -\frac{1}{2}\Gamma_4,\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_4]{\Gamma_2 \to -\frac{1}{2}\Gamma_2,\ \Gamma_3 \to \frac{1}{4}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2]{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Θέτουμε

$$\vec{y}_1 = \left(1, 0, 0, -\frac{3}{2}, -1\right), \quad \vec{y}_2 = \left(0, 1, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \vec{y}_3 = \left(0, 0, 1, 1, \frac{1}{2}\right)$$

Τότε γνωρίσουμε ότι $\mathcal{V} = \langle \vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \vec{y}_3 \rangle$. *Αν* $\lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \lambda_3\vec{y}_3 = \vec{0}$, *τότε θα έχουμε:*

$$\lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \lambda_3\vec{y}_3 = \vec{0} \implies \lambda_1\left(1, 0, 0, -\frac{3}{2}, -1\right) + \lambda_2\left(0, 1, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + \lambda_3\left(0, 0, 1, 1, \frac{1}{2}\right) = (0, 0, 0, 0, 0) \implies$$

$$\implies \left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3\right) = (0, 0, 0, 0, 0) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}' = \{\vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \vec{y}_3\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως είναι μια βάση του* $\mathcal{V}$.

Αναζητούμε δύο διανύσματα $\vec{y}_4 = (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)$, $\vec{y}_5 = (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2) \in \mathbb{R}^5$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{\vec{y}_4,\ \vec{y}_5\}$ *να είναι βάση του* $\mathbb{R}^5$. *Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές σχηματίζονται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \vec{y}_3$, *αναζητούμε δύο τετράδες αριθμών* $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)$, $(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2)$ *έτσι ώστε ο πίνακας*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \end{pmatrix}$$

$(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) = (0, 0, 0, 1, 0)$ *και* $(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2) = (0, 0, 0, 0, 1)$ *προκύπτει εύκολα ότι:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και επομένως, θέτοντας $\vec{y}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ *και* $\vec{y}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$, *έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^5$ *η οποία περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων* $\mathcal{B}'$.

Θέτοντας $\mathcal{U} = \langle \vec{y}_4, \vec{y}_5 \rangle = \{\kappa\vec{y}_4 + \lambda\vec{y}_5 \in \mathbb{R}^5 \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, 0, \kappa, \lambda) \in \mathbb{R}^5 \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$, *έπεται ότι*

$$\mathbb{R}^5 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Άσκηση 26. *Στον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_4[x]$ θεωρούμε τον υπόχωρο*

$$\mathcal{V} = \big\langle P(x),\, Q(x),\, R(X)\big\rangle$$

όπου:

$$P(x) = x + x^2 + x^4, \quad Q(x) = x + 2x^2 - x^4, \quad R(x) = 2x + 6x^4$$

Να βρεθεί μια βάση του $\mathcal{V}$ η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{K}_4[x]$.

Λύση. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ο οποίος προκύπτει από τις συνιστώσες των $P(x)$, $Q(x)$, και $R(X)$ στην κανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{1, x, x^2, x^3, x^4\big\}$ του $\mathbb{K}_4[x]$. Θα έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to -\frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to -\frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τα πολυώνυμα τα οποία προκύπτουν από τις δύο πρώτες γραμμές του τελευταίου πίνακα:

$$A(x) = x + 3x^4 \quad \text{και} \quad B(x) = x^2 - 2x^4$$

και τότε θα έχουμε:

$$\mathcal{V} = \big\langle A(x),\, B(x)\big\rangle$$

Αν $\lambda_1 A(x) + \lambda_2 B(x) = 0$, τότε θα έχουμε:

$$\lambda_1(x + 3x^4) + \lambda_2(x^2 - 2x^4 = 0 \implies \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + (3\lambda_1 - 2\lambda_2)x^4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Άρα τα διανύσματα $A(x)$ και $B(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του $\mathcal{V}$. Ιδιαίτερα προκύπτει ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 2$$

Αναζητούμε πολυώνυμα $G(X), D(X), E(X) \in \mathbb{K}_4[x]$ έτσι ώστε το σύνολο $\big\{A(x), B(x), G(X), D(X), E(X)\big\}$ να είναι βάση του $\mathbb{K}_4[x]$. Ισοδύναμα αναζητούμε τρεις γραμμές για να συμπληρώσουμε τις γραμμές $(0\,1\,0\,0\,3)$ και $(0\,0\,1\,0\,-2)$ σε έναν 5×5 αντιστρέψιμο πίνακα. Θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι αντιστρέψιμος και από τον οποίο προκύπτουν τα πολυώνυμα:

$$G(x) = 1, \quad D(x) = x^3, \quad E(x) = x^4$$

Τότε το σύνολο

$$\big\{G(x) = 1,\;\; A(x) = x + 3x^4,\;\; B(x) = x^2 - 2x^4,\;\; D(x) = x^3,\;\; E(x) = x^4\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_4[x]$ η οποία συμπληρώνειν τη βάση $\big\{A(x), B(x)\big\}$ του $\mathcal{V}$.

Άσκηση 27. *Έστω $\mathcal{B}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}}\langle\vec{A}_1,\vec{A}_2,\vec{A}_3,\vec{A}_4\rangle$ του υπόχωρου ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{A}_1=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-4\vec{e}_3+3\vec{e}_4+\vec{e}_5\ ,$$
$$\vec{A}_2=2\vec{e}_1+5\vec{e}_2-3\vec{e}_3+4\vec{e}_4+8\vec{e}_5\ ,$$
$$\vec{A}_3=6\vec{e}_1+17\vec{e}_2-7\vec{e}_3+10\vec{e}_4+22\vec{e}_5\ ,$$
$$\vec{A}_4=\vec{e}_1+3\vec{e}_2-3\vec{e}_3+2\vec{e}_4\ .$$

η οποία στη συνέχεια να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^5$.

Λύση. *Θέτουμε $\mathcal{V}=\langle\vec{A}_1,\vec{A}_2,\vec{A}_3,\vec{A}_4\rangle$. Θεωρούμε τον πίνακα*

$$\begin{pmatrix}1&2&-4&3&1\\2&5&-3&4&8\\6&17&-7&10&22\\1&3&-3&2&0\end{pmatrix}$$

των συνιστωσών των διανυσμάτων $\vec{A}_1,\vec{A}_2,\vec{A}_3,\vec{A}_4$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, και θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix}1&2&-4&3&1\\2&5&-3&4&8\\6&17&-7&10&22\\1&3&-3&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-6\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&2&-4&3&1\\0&1&5&-2&6\\0&5&17&-8&16\\1&3&-3&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&2&-4&3&1\\0&1&5&-2&6\\0&5&17&-8&16\\0&1&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-5\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&2&-4&3&1\\0&1&5&-2&6\\0&0&-8&2&-14\\0&0&-4&1&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\frac{1}{2}\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&2&-4&3&1\\0&1&5&-2&6\\0&0&-8&2&-14\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_1\to\Gamma_1-2\Gamma_2]{\Gamma_3\to-\frac{1}{8}\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-14&7&-11\\0&1&5&-2&6\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_3]{\Gamma_1\to\Gamma_1+14\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{7}{2}&-\frac{29}{2}\\0&1&0&-\frac{3}{4}&-\frac{11}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Επομένως, θεωρώντας τα διανύσματα

$$\vec{X}=\vec{e}_1+\frac{7}{2}\vec{e}_4-\frac{29}{2}\vec{e}_5$$
$$\vec{Y}=\vec{e}_2-\frac{3}{4}\vec{e}_4-\frac{11}{4}\vec{e}_5$$
$$\vec{Z}=\vec{e}_3-\frac{1}{4}\vec{e}_4+\vec{e}_5\frac{7}{4}$$

τα οποία προκύπτουν από τις τρεις πρώτες γραμμές

$$(1,\,0,\,0,\,\frac{7}{2},\,-\frac{29}{2}),\qquad(0,\,1,\,0,\,-\frac{3}{4},\,-\frac{11}{4}),\qquad(0,\,0,\,1,\,-\frac{1}{4},\,\frac{7}{4})$$

του τελευταίου πίνακα, έπεται ότι θα έχουμε:

$$\mathcal{V}=\big\langle\vec{X},\,\vec{Y},\,\vec{Z}\big\rangle$$

Τα διανύσματα $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι

$$\lambda_1\vec{X}+\lambda_2\vec{Y}+\lambda_3\vec{Z}=\vec{0}\implies\Big(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3,\,\frac{7}{2}\lambda_1-\frac{3}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}\lambda_3,\,-\frac{29}{2}\lambda_1-\frac{11}{4}\lambda_2+\frac{7}{4}\lambda_3\Big)=(0,0,0,0,0)\implies$$
$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Άρα τα διανύσματα $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του $\mathcal{V}$. Ιδιαίτερα:

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V}=3$$

Θεωρώντας τα διανύσματα

$$\vec{U}=(0,\,0,\,0,\,1,\,0)\quad\text{και}\quad\vec{V}=(0,\,0,\,0,\,0,\,1)$$

παρατηρούμε ότι η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{29}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι ίση με 1 *και επομένως τα διανύσματα*

$$\left\{\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, \vec{U}, \vec{V}\right\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{R}^5$ *η οποία συμπληρώνει τη βάση* $\{\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\}$ *του* $\mathcal{V} = \langle \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4 \rangle$.

Άσκηση 28. *Να προσδιορισθεί μια βάση του χώρου* $\Lambda(\Sigma)$ *των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος:*

$$(\Sigma)\ \begin{cases} 4x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Λύση. *Θεωρούμε τον πίνακα* A *των συντελεστλων του* (Σ):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -7 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 9 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

και τότε:

$$\Lambda(\Sigma) = \left\{X \in \mathbb{K}_4 \mid A \cdot X = 0\right\}$$

Θα έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -7 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 9 & -2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_2]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \frac{1}{4}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 4 & 12 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{4}\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \frac{1}{4}\Gamma_1,\ \Gamma_2 \to 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 \frac{7}{4}\Gamma_2,\ \Gamma_2 \to 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{4}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 + 2\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι ο πίνακας των συντελεστών του συτήματος

$$(\Sigma')\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ)*. Έτσι*

$$\Lambda(\Sigma) = \Lambda(\Sigma') = \left\{X \in \mathbb{K}_4 \mid A' \cdot X = 0\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_4 \mid x_3 = x_4 = 0 \ \textit{και}\ x_1 + 3x_2 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -3x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_4 \mid x_2 \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_4 \mid x_2 \in \mathbb{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως μια βάση του υπόχωρου των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος (Σ) *είναι το διάνυσμα-στήλη*

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 29. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο* $\mathcal{E}$ *μπορεί να θεωρηθεί και ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος των* $\mathbb{R}$ *των πραγματικών αριθμών.*

(2) *Αν* $\mathrm{dim}_{\mathbb{C}}\mathcal{E} = n$, *να δειχθεί ότι* $\mathrm{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = 2n$.

Λύση. (1) *Θεωρούμε το σώμα* $\mathbb{R}$ *των πραγματικών αριθμών ως υποσύνολο του σώματος* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών:* $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, *ταυτίζοντας τον πραγματικό αριθμό* $a \in \mathbb{R}$ *με τον* $a + 0i \in \mathbb{C}$.

Χρησιμοποιώντας τις πράξεις πρόσθεσης «+» και βαθμωτού πολλαπλασιασμού «·» με τις οποίες το σύνολο $\mathcal{E}$ *είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του* $\mathbb{C}$, *και διατηρώντας τα ίδια σύμβολα, ορίζουμε πράξεις:*

$$+ : \ \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$$

$$\cdot : \ \mathbb{R} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (a, \vec{x}) = a \cdot \vec{x} = (a + 0i) \cdot \vec{x}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathcal{E}$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του* $\mathbb{R}$.

(2) *Έστω* $\mathrm{dim}_{\mathbb{C}}\mathcal{E} = n$ *και έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$ *υπεράνω του* $\mathbb{C}$. *Έστω* $\vec{x} \in \mathcal{E}$. *Επειδή το σύνολο* $\mathcal{B}$ *αποτελεί μια βάση του* $\mathcal{E}$ *υπεράνω του* $\mathbb{C}$, *υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί*

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i, \ \cdots, \ z_n = a_n + b_n i$$

έτσι ώστε:

$$\vec{x} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + \cdots + z_n\vec{e}_n$$

Τότε θα έχουμε:

$$\vec{x} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + \cdots + z_n\vec{e}_n = (a_1 + b_1 i)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2 i)\vec{e}_2 + \cdots + (a_n + b_n i)\vec{e}_n =$$

$$= a_1\vec{e}_1 + b_1 i\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_2 i\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n + b_n i\vec{e}_n =$$

$$= a_1\vec{e} + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n + b_1 i\vec{e}_1 + b_2 i\vec{e}_2 + \cdots + b_n i\vec{e}_n$$

Επειδή $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, *έπεται ότι το σύνολο διανυσμάτων του* $\mathcal{E}$

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \ \cdots, \ \vec{e}_n, \ i\vec{e}_1, \ i\vec{e}_2, \ \cdots, \ i\vec{e}_n\}$$

είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{E}$ *όταν ο* $\mathcal{E}$ *θεωρηθεί ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του* $\mathbb{R}$.

Αν $r_i, s_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, *και αν*

$$r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2 + \cdots + r_n\vec{e}_n + s_1 i\vec{e}_1 + s_2 i\vec{e}_2 + s_n i\vec{e}_n = \vec{0}$$

τότε θα έχουμε:

$$(r_1 + s_1 i)e_1 + (r_2 + s_2 i)\vec{e}_2 + \cdots + (r_n + s_n i)\vec{e}_n = \vec{0}$$

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *είναι βάση του διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$ *υπεράνω του σώματος* $\mathcal{C}$, *έπεται ότι:*

$$r_1 + s_1 i = \cdots = r_n + s_n i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r_1 = \cdots = r_n = s_1 = \cdots = s_n = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως υποσύνολο του* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$ *και επομένως αποτελεί βάση. Ιδιαίτερα προκύπτει ότι:*

$$\mathrm{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = |\mathcal{C}| = 2n = 2\mathrm{dim}_{\mathbb{C}}\mathcal{E}$$

Άσκηση 30. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$. *Έστω*

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{x}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ \vec{x}_m &= a_{1m}\vec{e}_1 + a_{2m}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nm}\vec{e}_n \end{aligned}$$

m *το πλήθος διανύσματα του* $\mathcal{E}$, *όπου* $m \leq n$, *και υποθέτουμε ότι:*

$$a_{ij} = 0, \ \forall i > j, \quad 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n \quad \text{και} \quad a_{ii} \neq 0, \ 1 \leq i \leq m$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Λύση. *Επειδή* $a_{ij} = 0, \ \forall i > j, \quad 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n$, *έπεται ότι θα έχουμε:*

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{x}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{x}_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \\ &\vdots \\ \vec{x}_m &= a_{1m}\vec{e}_1 + a_{2m}\vec{e}_2 + \cdots + a_{mm}\vec{e}_m \end{aligned}$$

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ *και υποθέτουμε ότι*

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m = \vec{0}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\lambda_1(a_{11}\vec{e}_1) + \lambda_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) + \lambda_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) + \cdots + \lambda_m(a_{1m}\vec{e}_1 + a_{2m}\vec{e}_2 + \cdots + a_{mm}\vec{e}_m) = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \quad (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_m a_{1m})\vec{e}_1 + (\lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{23} + \cdots + \lambda_m a_{2m})\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_m a_{mm}\vec{e}_m = \vec{0}$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m$ *είναιν γραμμικά ανεξάρτητα, ως υποσύνολο της βάσης* $\mathcal{B}$, *έπεται ότι θα έχουμε:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_m a_{1m} &= 0 \\ \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{23} + \cdots + \lambda_m a_{2m} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{m-1} a_{m-1m-1} + \lambda_m a_{m-1m} &= 0 \\ \lambda_{mm} a_{mm} &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή $a_{mm} \neq 0$, *από την τελευταία εξίσωση έπεται ότι* $\lambda_m = 0$. *Τότε η προτελευταία εξίσωση γράφεται* $\lambda_{m-1} a_{m-1m-1} = 0$ *και επειδή* $a_{m-1m-1} \neq 0$, *έπεται ότι* $\lambda_{m-1} = 0$. *Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, τελικά προκύπτει ότι:*

$$\lambda_m = \lambda_{m-1} = \cdots = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$$

Επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*