ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ **Β′** (Μ-Ω)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 2 Δεκεμβρίου 2022

Άσκηση 1. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων υπεράνω ενίος σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική αν και μόνον αν, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $f(\vec{x}+\lambda\vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$.*

Λύση. *Αν η f είναι γραμμική, τότε: $f(\vec{x}+\lambda\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\lambda\vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$.*

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $f(\vec{x}+\lambda\vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$. Θέτοντας $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$ και $\lambda = 1$, έχουμε:

$$f(\vec{0}+\vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0}) \implies f(\vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0}) \implies f(\vec{0}) = \vec{0}$$

Επιπλέον, θέτοντας $\lambda = 1$, έχουμε:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad \text{και} \quad f(\lambda\vec{x}) = f(\vec{0}+\lambda\vec{x}) = f(\vec{0}) + \lambda f(\vec{x}) = \vec{0} + \lambda f(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

Άρα η f είναι γραμμική.

Άσκηση 2. *Έστω $\mathbb{C}$ το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ όταν θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{C}$ και θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ όταν θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$.*

(1) *Η απεικόνιση:*
$$f\colon \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \overline{z}$$
δεν είναι γραμμική.

(2) *Η απεικόνιση:*
$$f\colon \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \quad f(z) = \overline{z}$$
είναι γραμμική.

Παραπάνω $\overline{z}$ συμβολίζει τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z = a+bi$, δηλαδή $\overline{z} = a - bi$.

Λύση. (1) *Αν $z = a+bi$, $w = c+di$, και $\lambda = x+yi$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε:*

$$f\big(z+w\big) = f\big((a+bi)+(c+di)\big) = f\big((a+c)+(b+d)i\big) = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = f(z)+f(w)$$

$$f(\lambda z) = f\big((x+yi)(a+bi)\big) = f\big((xa-yb)+(xb+ya)i\big) = (xa-yb)-(xb+ya)i$$

$$\lambda f(z) = (x+yi)(a-bi) = (xa+yb)+(ya-xb)i$$

Επειδή γενικά[1] $(xa-yb)-(xb+ya)i \neq (xa+yb)+(ya-xb)i$, *έπεται ότι γενικά: $f(\lambda z) \neq \lambda f(z)$.*

Άρα η f δεν είναι γραμμική.

[1]Για παράδειγμα: θέτοντας $\lambda = i$ και $z = i$, θα έχουμε:

$$f(\lambda z) = f(i^2) = f(-1) = -f(1) = -1 \quad \text{και} \quad \lambda f(z) = i f(i) = i\cdot(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(2) *Αν $z = a + bi$ και $w = c + di$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:*

$$f\big(z+w\big) = f\big((a+bi)+(c+di)\big) = f\big((a+c)+(b+d)i\big) = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = f(z)+f(w)$$

$$f(\lambda z) = f\big(\lambda(a+bi)\big) = f\big((\lambda a)+(\lambda b)i\big) = (\lambda a)-(\lambda b)i = \lambda(a-bi) = \lambda f(z)$$

Άρα η f είναι γραμμική.

Παρατήρηση. *Η παραπάνω Άσκηση δείχνει ότι η έννοια της γραμμικής απεικόνισης μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων εξαρτάται από το σώμα επί του οποίου είναι ορισμένοι οι διανυσματικοί χώροι.*

Υπενθυμίζουμε ότι οι γραμμικές απεικονίσεις $f\colon \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$ είναι της μορφής

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = (x_1, x_2, \cdots, x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \big(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m,\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m,\ \cdots,\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m\big) =$$

$$= {}^tX \cdot A, \qquad \text{όπου} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

και A είναι ένας $m \times n$ με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.

Δηλαδή μια απεικόνιση $f\colon \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$ είναι γραμμική αν και μόνον αν υπάρχουν $a_{ij} \in \mathbb{K}$, όπου $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$, έτσι ώστε η f να είναι της παραπάνω μορφής. Τα στοιχεία a_{ij} προκύπτουν ως εξής: Θεωρούμε την κανονική βάση $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m\big\}$, όπου $\vec{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, m)$ και το 1 είναι στην i-συνιστώσα, $1 \leq i \leq m$. Τότε:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= f(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) \\ f(\vec{e}_2) &= f(0, 1, \cdots, 0) = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ f(\vec{e}_m) &= f(0, 0, \cdots, 1) = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned}$$

Ιδιαίτερα:

(1) οι γραμμικές απεικονίσεις $f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι της μορφής

$$f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

όπου $a_i = f(\vec{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$, και $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$.

(2) οι γραμμικές απεικονίσεις $f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ είναι της μορφής

$$f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad f(x) = x(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

όπου $f(1) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Άσκηση 3. *Να εξεταστεί ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές.*

(1) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (2x - y, x, \lambda)$, *όπου* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) $f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (d - b) - (b - c)x + ax^3$.

(3) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \textit{αν}\ y \neq 0 \\ 0, & \textit{αν}\ y = 0 \end{cases}$

(4) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 1, -y)$.

(5) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}[x],\ \ f(r) = rx + 1$.

(6) $f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \ f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \big(2a-1, b, c+d\big)$.

(7) $f\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{C}),\ \ f(z,w) = \begin{pmatrix} z & \overline{w} \\ 0 & z+iw \end{pmatrix}$, *όπου οι εμπλεκόμενοι διανυσματικοί χώροι θεωρούνται υπεράνω του* $\mathbb{C}$.

(8) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (ax+by+cz)(a,b,c)$, *όπου* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(9) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (ax+by+cz)(x,y,z)$, *όπου* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(10) $f\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $f(A) = |A|$, $\ g\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $g(A) = \mathsf{Tr}(A)$.

Λύση. (1) *Αν η f είναι γραμμική, τότε θα πρέπει $f(0,0) = (0,0,0)$ και επομένως $(0,0,\lambda) = (0,0,0)$ απόμόπου προκύπτει ότι $\lambda = 0$. Αντίστροφα, αν $\lambda = 0$, εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (2x-y, x, 0)$ είναι γραμμική. Άρα η f είναι γραμμική αν και μόνον αν $\lambda = 0$.*

(2) *Όπως μπορούμε να δούμε εύκολα με τον ορισμό, η f είναι γραμμική. Με διαφορετικό τρόπο: έστω*

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

η κανονική βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ και έστω τα πολυώνυμα: $\big\{x^3, -1-x, x, 1\big\}$. Τότε, από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f'\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ έτσι ώστε:

$$f'(E_{11}) = x^3, \quad f'(E_{12}) = -1-x, \quad f'(E_{21}) = x, \quad f'(E_{22}) = 1$$

και τότε, $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$:

$$f'\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\left(aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}\right) = ax^3 + (-1-b)x + cx + d = (d-b) - (b-c)x + ax^3$$

δηλαδή η f' είναι ίση με τη f και άρα η f είναι γραμμική.

(3) *Θα έχουμε:*

$$f(1,0) = 0 \quad \text{και} \quad f(0,1) = \frac{0^2}{1} = 0 \quad \text{και} \quad f\big((1,0)+(0,1)\big) = f(1,1) = \frac{1^2}{1} = 1$$

Αν η f ήταν γραμμική θα έπρεπε: $1 = f\big((1,0)+(0,1)\big) = f(1,0) = 0 + f(0,1) = 0$ το οποίο δεν ισχύει. Άρα η f δεν είναι γραμμική.

(4) *Αν η f είναι γραμμική, τότε θα πρέπει $f(0,0) = (0,0,0)$. Όμως $f(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$. Άρα η f δεν είναι γραμμική.*

(5) *Παρόμοια, αν η f είναι γραμμική, τότε θα πρέπει $f(0) = 0$. Όμως $f(0) = 1$ και άρα η f δεν είναι γραμμική.*

(6) *Παρόμοια, αν η f είναι γραμμική, τότε θα πρέπει $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0)$. Όμως $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1,0,0) \neq (0,0,0)$, και άρα η f δεν είναι γραμμική.*

(7) *Αν η f είναι γραμμική θα πρέπει $f(i(0,1)) = if(0,1)$. Επειδή:*

$$f(i(0,1)) = f(0,i) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{i} \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad if(0,1) = i\begin{pmatrix} 0 & \overline{1} \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

έχουμε $f(i(0,1)) \neq if(0,1)$, και άρα η f δεν είναι γραμμική. Σημειώνουμε ότι αν οι εμπλεκόμενοι χώροι θεωρούνται ως διανυσματικοί χ.ωροι υπεράνω του $\mathbb{R}$, τότε η f είναι γραμμική[2].

(8) *Η απεικόνιση f είναι γραμμική, διότι, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y,z), (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$:*

$$f\big((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\big) = f\big((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)\big) = \big(a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)\big)(a,b,c) =$$
$$= \big(ax_1+by_1+cz_1+ax_2+by_2+cz_2)\big)(a,b,c) = (ax_1+by_1+cz_1)(a,b,c) + (ax_2+by_2+cz_2)(a,b,c) =$$
$$= f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2)$$

και

$$f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \big(a\lambda x + b\lambda y + c\lambda z)(a,b,c) = \big)\lambda(ax+by+cz)(a,b,c) = \lambda f(x,y,z)$$

[2] Δείξτε το σαν Άσκηση.

(9) *Η f δεν είναι γραμμική διότι, για παράδειγμα:*

$$f(2(1,0,0)) = f(2,0,0) = 2a(2,0,0) = (4a,0,0) \neq (2a,0,0) = 2(a,0,0) = 2f((1,0,0)$$

(10) *Η απεικόνιση f δεν είναι γραμμική διότι, αν*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{τότε:} \quad A+B = I_n, \quad |A| = 0 = |B|, \quad |A+B| = |I_n| = 1$$

και επομένως

$$f(A+B) = |A+B| = |I_n| = 1 \neq 0 = |A| + |B| = f(A) + f(B)$$

Αντίθετα η απεικόνιση g είναι γραμμική όπως προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες ίχνους πίνακα:

$$g(A+B) = \mathsf{Tr}(A+B) = \mathsf{Tr}(A) + \mathsf{Tr}(B) = g(A) + g(B) \quad \text{και} \quad g(\lambda A) = \mathsf{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathsf{Tr}(A) = \lambda g(A)$$

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα $\mathbb{R}^3$*

$$\vec{e}_1 = (0,1,1), \quad \vec{e}_2 = (1,0,1), \quad \vec{e}_3 = (1,1,0)$$

και τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$

$$\vec{y}_1 = (-2,3), \quad \vec{y}_2 = (3,-1), \quad \vec{y}_3 = (4,5)$$

Να βρεθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ έτσι ώστε:

$$\forall i = 1,2,3: \quad f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$$

Ακολούθως να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα και μια βάση για την εικόνα της f.

Λύση. *Δείχνουμε πρώτα ότι τα διανύσματα του συνόλου $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι, επειδή*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και τότε από γνωστό κριτήριο έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$, έπεται ότι έχουμε μοναδική γραφή του (x,y,z) ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$:

$$(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (b+c, a+c, a+b) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} b+c = x \\ a+c = y \\ a+b = z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{-x+y+z}{2} \\[2ex] b = \dfrac{x-y+z}{2} \\[2ex] c = \dfrac{x+y-z}{2} \end{cases}$$

Άρα θα έχουμε:

$$(x,y,z) \;=\; \frac{-x+y+z}{2}\,\vec{e}_1 \;+\; \frac{x-y+z}{2}\,\vec{e}_2 \;+\; \frac{x+y-z}{2}\,\vec{e}_3$$

Θέτουμε

$$f(x,y,z) = \frac{-x+y+z}{2}\vec{y}_1 \;+\; \frac{x-y+z}{2}\vec{y}_2 \;+\; \frac{x+y-z}{2}\vec{y}_3 =$$

$$= \frac{-x+y+z}{2}(-2,3) \;+\; \frac{x-y+z}{2}(3,-1) \;+\; \frac{x+y-z}{2}(4,5) =$$

$$= \left(\frac{2x - 2y - 2z + 3x - 3y + 3z + 4x + 4y - 4z}{2}, \ \frac{-3x + 3y + 3z - x + y - z + 5x + 5y - 5z}{2} \right) =$$

$$= \left(\frac{9x - y - 3z}{2}, \ \frac{x + 9y - 3z}{2} \right)$$

Επομένως η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *έτσι ώστε* $f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$, $\forall i = 1, 2, 3$, *είναι η γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = \left(\frac{9x - y - 3z}{2}, \ \frac{x + 9y - 3z}{2} \right)$$

Θεωρούμε τον υπόχωρο $\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$ *του* $\mathbb{R}^2$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα* $\vec{y}_i$, $\forall i = 1, 2, 3$. *Επειδή*

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα είναι βάση του* $\mathbb{R}^2$, *διότι* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$. *Τότε προφανώς θα έχουμε* $\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle = \mathbb{R}^2$. *Επειδή* $f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$, $\forall i = 1, 2, 3$, *έπεται ότι* $\operatorname{Im}(f) = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle = \mathbb{R}^2$, *δηλαδή η* f *είναι επιμορφισμός και τότε μια βάση της* $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^2$.

Έστω $(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f)$, *δηλαδή* $f(x, y, z) = (0, 0)$. *Τότε θα έχουμε*

$$f(x, y, z) = (0, 0) \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{9x - y - 3z}{2}, \ \frac{x + 9y - 3z}{2} \right) = (0, 0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 9x - y - 3z = 0 \\ x + 9y - 3z = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 8x - 10y = 0 \\ x + 9y - 3z = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} y \\ \\ z = \dfrac{41}{12} y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x, y, z) = \left(\frac{5}{4} y, \ y, \ \frac{41}{12} y \right) = y \left(\frac{5}{4}, \ 1, \ \frac{41}{12} \right)$$

Επομένως $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ y \left(\frac{5}{4}, \ 1, \ \frac{41}{12} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(\frac{5}{4}, \ 1, \ \frac{41}{12} \right) \right\rangle$, *και άρα το διάννυσμα* $\left(\frac{5}{4}, \ 1, \ \frac{41}{12} \right)$ *είναι μια βάση του* $\operatorname{Ker}(f)$.

Άσκηση 5. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ* $\mathbb{K}$*-διανυσματικών χώρων. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\Phi\colon \mathcal{E} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{F}, \quad \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y} - f(\vec{x}))$$

είναι ισομορφισμός και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Λύση. (1) *Πρώτα δείχνουμε ότι η* Φ *είναι γραμμική. Έστω* $(\vec{x}_1, \vec{y}_1), (\vec{x}_2, \vec{y}_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ *και* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Τότε:*

$$\Phi\big((\vec{x}_1, \vec{y}_1) + (\vec{x}_2, \vec{y}_2)\big) = \Phi\big(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2\big) = \big(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 - f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)\big) =$$

$$= \big(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 - f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)\big) = \big(\vec{x}_1, \vec{y}_1 - f(\vec{x}_1)\big) + \big(\vec{x}_2, \vec{y}_2 - f(\vec{x}_2)\big) = \Phi\big(\vec{x}_1, \vec{y}_1\big) + \Phi\big(\vec{x}_2, \vec{y}_2\big)$$

$$\Phi\big(\lambda(\vec{x}, \vec{y})\big) = \Phi\big(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y}\big) = \big(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y} - f(\lambda\vec{x})\big) = \big(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y} - \lambda f(\vec{x})\big) = \lambda\big(\vec{x}, \vec{y} - f(\vec{x})\big) = \lambda\Phi\big(\vec{x}, \vec{y}\big)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι η Φ *είναι γραμμική απεικόνιση.*

(2) *Έστω* $(\vec{x}, \vec{y}) \in \operatorname{Ker}(\Phi)$. *Τότε:*

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}_{\mathcal{E} \times \mathcal{F}} \quad \Longrightarrow \quad (\vec{x}, \vec{y} - f(\vec{x})) = (\vec{0}_{\mathcal{E}}, \vec{0}_{\mathcal{F}}) \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}_{\mathcal{E}} \ \text{ και } \ f(\vec{x}) = \vec{y} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}_{\mathcal{E}} \ \text{ και } \ \vec{y} = \vec{0}_{\mathcal{F}}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\operatorname{Ker}(\Phi) = \left\{ \vec{0}_{\mathcal{E} \times \mathcal{F}} = (\vec{0}_{\mathcal{E}}, \vec{0}_{\mathcal{F}}) \right\}$ *και άρα η* Φ *είναι μονομορφισμός.*

(3) *Έστω $(\vec{z}, \vec{w}) \in E \times \mathcal{F}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ έτσι ώστε: $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{z}, \vec{w})$. Τότε: $(\vec{x}, \vec{y} - f(\vec{x})) = (\vec{z}, \vec{w})$ και άρα $\vec{z} = \vec{x}$ και $\vec{w} = \vec{y} - f(\vec{x})$. Η τελευταία σχέση δίνει ότι $\vec{y} = \vec{w} + f(\vec{x}) = \vec{y} + f(\vec{z})$. Αντίστροφα:*

$$\Phi\big(\vec{z}, \vec{w} + f(\vec{z})\big) = \big(\vec{z}, \vec{w} + f(\vec{z}) - f(\vec{z})\big) = \big(\vec{z}, \vec{w}\big)$$

Άρα η Φ είναι επιμορφισμός.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η Φ είναι ισομορφισμός. Προφανώς η αντίστροφή της είναι η γραμμική απεικόνιση

$$\Phi^{-1} \colon \mathcal{E} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{F}, \quad \Phi(\vec{z}, \vec{w}) = (\vec{z}, \vec{w} + f(\vec{z}))$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, όπου ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε οι υπόχωροι $\mathrm{Ker}(f)$ και $\mathrm{Im}(f)$ έχουν πεπερασμένη διάσταση και ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων:

(1) $$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)}$$

Η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$ καλείται η **βαθμίδα** της f και συμβολίζεται με:

$$\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$$

Αν $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, τότε:

$$\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \big\langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_n)\big\rangle$$

Προφανώς, όπως προκύπτει από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων (1):

$$\mathbf{r}(f) \;\leq\; \min\big\{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E},\, \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}\big\}$$

Άσκηση 6. *Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η οποία ορίζεται από τη σχέση:*

$$f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, 2x + 4y)$$

Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ και μια βάση της εικόνας $\mathrm{Im}(f)$ της f. Ποιά είναι η βαθμίδα της f;

Λύση. *Έστω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε: $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$ αν και μόνον αν:*

$$f(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (x + 2y, y - z, 2x + 4y) = (0, 0, 0) \iff x = -2y \;\text{ και }\; y = z$$

Συνεπώς ο πυρήνας της f είναι

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y \;\text{ και }\; y = z\} \\ &= \{(-2y, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(-2, 1, 1)\rangle \end{aligned}$$

και αφού $(-2, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$ έπεται ότι το διάνυσμα $(-2, 1, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως το σύνολο $\{(-2, 1, 1)\}$ αποτελεί βάση του $\mathrm{Ker}(f)$.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0),\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\big\}$, ως βάση του $\mathbb{R}^3$, παράγει τον $\mathbb{R}^3$, έπεται ότι το σύνολο $f(\mathcal{B}) = \big\{f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2),\ f(\vec{e}_3)\big\}$ παράγει την εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ της f. Έτσι:

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\rangle = \langle(1, 0, 2), (2, 1, 4), (0, -1, 0)\rangle$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \longrightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς

$$\mathrm{Im}\, f = \langle(1, 0, 2),\ (2, 1, 4),\ (0, -1, 0)\rangle = \langle(1, 0, 2),\ (0, 1, 0)\rangle$$

Διαφορετικά: *εξετάζουμε αν τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω*

$$\kappa(1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 4) + \mu(0, -1, 0) = (0, 0, 0) \quad\Longrightarrow\quad \kappa + 2\lambda = 0 \;\text{ και }\; \lambda - \mu = 0$$

Το σύστημα αυτό έχει ως γενική λύση όλες τις τριάδες της μορφής: $(-2\lambda, \lambda, \lambda)$ *και επομένως, για* $\lambda = 1$, *θα έχουμε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης:*

$$-2(1,0,2) + (2,1,4) + (0,-1,0) = (0,0,0)$$

από την οποία βλέπουμε ότι $(2,1,4) \in \langle (1,0,2),\ (0,1,0)\rangle$ *και άρα όπως και παραπάνω έχουμε:* $\mathrm{Im}(f) = \langle (1,0,2),\ (2,1,4),\ (0,-1,0)\rangle = \langle (1,0,2),\ (0,1,0)\rangle$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $(1,0,2), (0,1,0)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα (αν* $\lambda_1(1,0,2) + \lambda_2(0,1,0) = (0,0,0)$, *τότε* $(\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1) = (0,0,0)$ *από όπου προφανώς:* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). *Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο* $\{(1,0,2),(0,1,0)\}$ *αποτελεί βάση της εικόνας* $\mathrm{Im}(f)$ *της* f, *και επομένως η βαθμίδα της* f *είναι ίση με* $\mathbf{r}(f) = 2$.

Άσκηση 7. *Να εξεταστεί αν η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

είναι ισομορφισμός.

Λύση. *Για να είναι η γραμμική απεικόνιση* f *ισομορφισμός πρέπει να είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός. Δηλαδή πρέπει* $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ *και* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$. *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (0, 0, \cdots, 0)\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0,\ x_1 + x_2 = 0, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\} \\
&= \{(0, \cdots, 0)\}
\end{aligned}$$

και άρα η γραμμική απεικόνιση f *είναι μονομορφισμός. Έστω* $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Τότε υπάρχει το διάνυσμα* $(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \cdots, y_n - y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ *έτσι ώστε*

$$\begin{aligned}
f(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \cdots, y_n - y_{n-1}) &= (y_1, y_1 + y_2 - y_1, \cdots, y_1 + y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + \cdots y_n - y_{n-1}) \\
&= (y_1, y_2, \cdots, y_n)
\end{aligned}$$

και άρα η f *είναι επιμορφισμός. Συνεπώς, η γραμμική απεικόνιση* f *είναι ισομορφισμός.*

Άσκηση 8. *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$D \colon \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x], \quad D(P(x)) = P(x)'$$

η οποία στέλνει ένα πολυώνυμο $P(x)$ *στην παράγωγό του* $P(x)'$, *δηλαδή:*

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση* D *είναι γραμμική, και επάγει μια γραμμική απεικόνιση*

$$D \colon \mathbb{K}_n[x] \longrightarrow \mathbb{K}_n[x], \quad D(P(x)) = P(x)'$$

(2) *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της* D *όταν η* D *θεωρηθεί ως γραμμική απεικόνιση*

$$D \colon \mathbb{K}_n[x] \longrightarrow \mathbb{K}_n[x], \quad D(P(x)) = P(x)'$$

Ποιά είναι τότε η βαθμίδα της D;

(3) *Να δειχθεί ότι* $D^{n+1} = 0$.

Λύση. (1) *Έστω* $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *και* $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^m$ *τυχόντα στοιχεία του* $\mathbb{K}[x]$ *και* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Χωρίς βλάβη της γενικότητα, υποθέτουμε ότι* $n \le m$. *Τότε*

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_mx^m$$

$$\lambda P(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \cdots + (\lambda a_n)x^n$$

και θα έχουμε:

$$D\big(P(x) + Q(x)\big) =$$

$$= D\big((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_mx^m\big) =$$
$$= (a_1+b_1)+(2a_2+2b_2)x+\cdots+(na_n+nb_n)x^{n-1}+(n+1)b_{n+1}x^n+\cdots+mb_mx^{m-1} =$$
$$= \big(a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}\big)+\big(b_1+2b_2x+\cdots+nb_nx^{n-1}+(n+1)b_{n+1}x^n+\cdots+mb_mx^{m-1}\big) =$$
$$= D\big(P(x)\big)+D\big(Q(x)\big)$$
$$D\big(\lambda P(x)\big) = D\big((\lambda a_0)+(\lambda a_1)x+(\lambda a_2)x^2+\cdots+(\lambda a_n)x^n\big) =$$
$$= (\lambda a_1)+(2\lambda a_2)x+\cdots+(n\lambda a_n)x^{n-1} =$$
$$= \lambda(a_1)+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1} = \lambda D\big(P(x)\big)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι η απεικόνιση D είναι γραμμική.

Επειδή για κάθε πολυώνυμο $P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$, δηλαδή $\deg P(x) \leq n$, το πολυώνυμο $D(P(x))$ είναι βαθμού $\deg D(P(x)) \leq n-1 < n$, και άρα ανήκει στον υπόχωρο $\mathbb{K}_{n-1}[x] \subseteq \mathbb{K}_n[x]$, έπεται ότι η D επάγει μια γραμμική απεικόνιση, η οποία συμβολίζεται με το ίδιο σύμβολο, $D\colon \mathbb{K}_n[x] \longrightarrow \mathbb{K}_n[x]$, $D(P(x)) = P(x)'$.

(2) *Αν $\deg P(x) = k$, τότε προφανώς $D(P(x)) = k-1$. Επομένως $\forall P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$: $D(P(x)) \in \mathbb{K}_{n-1}[x]$. Άρα $\mathrm{Im}(D) \subseteq \mathbb{K}_{n-1}[x]$. Αντίστροφα, αν $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{K}_{n-1}[x]$, τότε θέτοντας $P(x) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n \in \mathbb{K}_n[x]$, προκύπτει ότι $D(P(x)) = Q(x)$, και άρα $\mathbb{K}_{n-1}[x] \subseteq \mathrm{Im}(D)$. Συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{Im}\,D = \mathbb{K}_{n-1}[x]$, και επομένως $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Im}(D) = n = \mathbf{r}(D)$. Μια βάση της $\mathrm{Im}(D)$ είναι επομένως το σύνολο πολυωνύμων $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$.*

Από τη Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για την D, έχουμε τότε ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_n[x] = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(D) + \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Im}(D) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad n+1 = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(D) + \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_{n-1}[x] = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(D) + n \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(D) = 1$$

Θεωρούμε το σταθερό πολυώνυμο 1. Τότε προφανώς $D(1) = 0$ και άρα $1 \in \mathrm{Ker}(D)$. Το μονοσύνολο $\{1\}$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητο (επειδή $1 \neq 0$), και άρα αποτελεί βάση του $\mathrm{Ker}(D)$ διότι $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(D) = 1$.

(3) *Είδαμε παραπάνω ότι $D(\mathbb{K}_n[x]) = \mathbb{K}_{n-1}[x]$. Γενικότερα, εύκολα προκύπτει ότι, $\forall k \geq 0$:*

$$D^k(\mathbb{K}_n[x]) = \mathbb{K}_{n-k}[x]$$

Ιδιαίτερα: $D^n(\mathbb{K}_n[x]) = \mathbb{K}_0[x]$ είναι ο υπόχωρος των σταθετών πολυωνύμων. Προφανώς, επειδή η παράγωγος ενός σταθερού πολυωνύμου είναι το μηδενικό πολυώνυμο, έχουμε: $D^{n+1}(\mathbb{K}_n[x]) = \{0\}$, δηλαδή $D^{n+1} = 0$.

Παρατήρηση. *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δυο $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε έχουμε την Θεμελιώδη Εξίσωση των Διαστάσεων:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Im}(f)}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$. Τότε έχουμε τα ακόλουθα:

(1)

$$f:\ \text{μονομορφισμός} \quad \Longrightarrow \quad f:\ \text{ισομορφισμός}$$

Πράγματι, επειδή η f είναι μονομορφισμός έχουμε $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f) = 0$. Επομένως από την εξίσωση των διαστάσεων έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Im}(f)$. 'ρα έχουμε

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Im}(f) \\ \mathrm{Im}(f)\ :\ \text{υπόχωρος του } \mathcal{F} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad f\ :\ \text{επιμορφισμός}$$

Συνεπώς η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομορφισμός.

(2)

$$f:\ \text{επιμορφισμός} \quad \Longrightarrow \quad f:\ \text{ισομορφισμός}$$

Πράγματι, επειδή η f είναι επιμορφισμός έχουμε $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{F}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$. 'ρα από την εξίσωση των διαστάσεων έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$ και $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$. Επομένως $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f) = 0$, δηλαδή $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. 'ρα η f είναι μονομορφισμός και άρα ισομορφισμός.

Επομένως στην προηγούμενη άσκηση αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι είτε μονομορφισμός ή επιμορφισμός. Τότε έπεται ότι η f είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 9. *Έστω $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_n$ ανά δύο διαφορετικά στοιχεία ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση:*

$$f\colon \mathbb{K}_n[x] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}, \quad f(P(x)) = \big(P(\rho_0),\, P(\rho_1),\, \cdots,\, P(\rho_n)\big)$$

είναι ισομορφισμός.

Λύση. *Η απεικόνιση f είναι γραμμική διότι, αν $P(x), Q(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε:*

$$f(P(x)+Q(x)) = \big((P+Q)(\rho_0),\, (P+Q)(\rho_1),\, \cdots,\, (P+Q)(\rho_n)\big) =$$

$$= \big(P(\rho_0)+Q(\rho_0),\, P(\rho_1)+Q(\rho_1),\, \cdots,\, P(\rho_n)+Q(\rho_n)\big) =$$

$$= \big(P(\rho_0),\, P(\rho_1),\, \cdots,\, P(\rho_n)\big) + \big(Q(\rho_0),\, Q(\rho_1),\, \cdots,\, Q(\rho_n)\big) = f(P(x)) + f(Q(x))$$

$$f(\lambda P(x)) = \big((\lambda P)(\rho_0),\, (\lambda P)(\rho_1),\, \cdots,\, (\lambda P)(\rho_n)\big) = \big(\lambda P(\rho_0),\, \lambda P(\rho_1),\, \cdots,\, \lambda P(\rho_n)\big) =$$

$$= \lambda\big(P(\rho_0),\, P(\rho_1),\, \cdots,\, P(\rho_n)\big) = \lambda f(P(x))$$

Αν $f(P(x)) = 0$, τότε:

$$\big(P(\rho_0),\, P(\rho_1),\, \cdots,\, P(\rho_n)\big) = (0,0,0,\cdots,0) \quad\Longrightarrow\quad P(\rho_0) = P(\rho_1) = \cdots = P(\rho_n) = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ως ρίζες τα στοιχεία $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_n$. Επειδή τα στοιχεία αυτά είναι ανά δύο διαφορετικά, έπεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει (τουλάχιστον) $n+1$ το πλήθος ρίζες. Αν το $P(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε το $P(x)$ έχει βαθμό, έστω m και προφανώς $\deg P(x) = m \leq n$. Όμως γνωρίζουμε ότι ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο βαθμού m έχει το πολύ m ρίζες. Συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό: $P(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, δηλαδή η f είναι μονομορφισμός. Από την Παρατήρηση 2, έπεται τότε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 10. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

(1) *Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, να δειχθεί ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$\operatorname{Ker}(f) = \mathcal{V}$$

(2) *Αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, να δειχθεί ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$\operatorname{Im}(g) = \mathcal{W}$$

Λύση. (1) *Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = m \leq n$. Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{V}$ την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{0}, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{0}, \quad \cdots, \quad f(\vec{e}_m) = \vec{0}, \quad f(\vec{e}_{m+1}) = \vec{e}_{m+1}, \quad f(\vec{e}_{m+2}) = \vec{e}_{m+2}, \quad \cdots, \quad f(\vec{e}_n) = \vec{y}_n$$

Προφανώς $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m \in \operatorname{Ker}(f)$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, έπεται ότι $\mathcal{V} \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$, και έστω $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_m\vec{e}_m + x_{m+1}\vec{e}_{m+1} + \cdots + x_n\vec{e}_n$ η μοναδική γραφή του $\vec{x}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$. Τότε

$$f(\vec{x}) = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_m\vec{e}_m + x_{m+1}\vec{e}_{m+1} + \cdots + x_n\vec{e}_n) = \vec{0} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_m f(\vec{e}_m) + x_{m+1} f(\vec{e}_{m+1}) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) = \vec{0} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad x_{m+1}\vec{e}_{m+1} + \cdots + x_n\vec{e}_n) = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε διότι τα $\vec{e}_{m+1}, \cdots, \vec{e}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ως διανύσματα μιας βάσης του $\mathcal{E}$). Τότε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_m\vec{e}_m \in \mathcal{V}$ και άρα $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}$. Συμπεραίνουμε ότι:

$$\operatorname{Ker}(f) = \mathcal{V}$$

(2) *Έστω* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. *Τότε* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = m \leq n$. *Έστω* $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m\}$ *μια βάση του* $\mathcal{W}$ *την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$ *του* $\mathcal{E}$. *Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση* $g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, *έτσι ώστε:*

$$g(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad g(\vec{e}_2) = \vec{e}_2, \quad \cdots, \quad g(\vec{e}_m) = \vec{e}_m, \quad g(\vec{e}_{m+1}) = \vec{0}, \quad g(\vec{e}_{m+2}) = \vec{0}, \quad \cdots, \quad g(\vec{e}_n) = \vec{0}$$

Προφανώς $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m \in \mathrm{Im}(g)$ *και επειδή το σύνολο* $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m\}$ *μια βάση του* $\mathcal{W}$, *έπεται ότι* $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Im}(g)$. *Έστω* $\vec{y} \in \mathrm{Im}(g)$. *Τότε υπάρχει* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:* $\vec{y} = g(\vec{x})$. *Έστω* $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_m\vec{e}_m + x_{m+1}\vec{e}_{m+1} + \cdots + x_n\vec{e}_n$ *η μοναδική γραφή του* $\vec{x}$ *ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{B}$. *Τότε*

$$\vec{y} = g(\vec{x}) = g(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_m\vec{e}_m + x_{m+1}\vec{e}_{m+1} + \cdots + x_n\vec{e}_n) =$$

$$= x_1 g(\vec{e}_1) + x_2 g(\vec{e}_2) + \cdots + x_m g(\vec{e}_m) + x_{m+1} g(\vec{e}_{m+1}) + \cdots + x_n g(\vec{e}_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_m\vec{e}_m$$

Τότε $\vec{y} \in \mathcal{W}$, *και άρα* $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathcal{W}$. *Συμπεραίνουμε ότι:*

$$\mathrm{Im}(g) = \mathcal{W}$$

Άσκηση 11. *Έστω* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου ο* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathcal{E}$ *έχει πεπερασμένη διάσταση.*

(1) *Να δείξετε ότι η* f *είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν η* f *στέλνει γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων σε γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων:*

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\} : \text{ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο } \Longrightarrow$$

$$f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_k)\} : \text{ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο}$$

(2) *Να δείξετε ότι η* f *είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν η* f *στέλνει τυχούσα βάση του* $\mathcal{E}$ *σε βάση του* $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\} : \text{ βάση του } \mathcal{E} \quad \Longrightarrow \quad f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_n)\} : \text{ βάση του } \mathcal{E}$$

Λύση. (1) (α΄) ($\Longrightarrow$) *Υποθέτουμε ότι η γραμμική απεικόνιση* f *είναι μονομορφισμός και έστω* $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_k\}$ *ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Θα δείξουμε ότι το σύνολο* $f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_k)\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω*

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_k f(\vec{e}_k) = \vec{0} & & \\
\Longrightarrow \quad & f(\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{e}_k) = \vec{0} & & f \colon \text{γραμμική} \\
\Longrightarrow \quad & \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{e}_k \in \mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\} & & f \colon \text{μονομορφισμός} \\
\Longrightarrow \quad & \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{e}_k = 0 & & \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_k\} \colon \text{γραμμικά ανεξάρτητο} \\
\Longrightarrow \quad & \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0 & &
\end{aligned}$$

Άρα το σύνολο $f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_k)\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

(β΄) ($\Longleftarrow$) *Υποθέτουμε ότι η* f *στέλνει γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων σε γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων, δηλαδή αν* $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_k\}$ *είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων τότε το σύνολο* $f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_k)\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θα δείξουμε ότι η* f *είναι μονομορφισμός. Έστω* $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, f$, *δηλαδή* $f(\vec{x}) = \vec{0}$. *Αν το διάνυσμα* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *τότε το σύνολο* $\{\vec{x}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα από την υπόθεση έπεται ότι το σύνολο* $\{f(\vec{x})\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα* $f(\vec{x}) \neq 0$. *Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το διάνυσμα* $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, f$. *'ρα δείξαμε ότι αν* $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, f$ *τότε* $\vec{x} = \vec{0}$. *Συνεπώς* $\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$, *δηλαδή η* f *είναι μονομορφισμός.*

(2) (α΄) ($\Longrightarrow$) *Υποθέτουμε ότι η γραμμική απεικόνιση* f *είναι ισομορφισμός, δηλαδή η* f *είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός. Έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$. *Θα δείξουμε ότι το σύνολο* $f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)\}$ *είναι βάση του* $\mathcal{E}$. *Αφού η* f *είναι μονομορφισμός, έπεται από το* (1) *παραπάνω ότι το σύνολο* $f(\mathcal{B})$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω* $y \in \mathcal{E}$. *Τότε αφού η* f *είναι*

επιμορφισμός υπάρχει ένα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, άρα το $\vec{x}$ γράφεται $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$. Τότε

$$\begin{aligned} & \vec{y} = f(\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{e}_k) = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{e}_n) \\ \Longrightarrow\ & \vec{y} \in \langle f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)\rangle \\ \Longrightarrow\ & \mathcal{E} = \langle f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)\rangle = \langle f(\mathcal{B})\rangle \end{aligned}$$

και άρα δείξαμε ότι το σύνολο $f(\mathcal{B})$ παράγει τον $\mathcal{E}$. Επομένως το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι βάση του $\mathcal{E}$.

Διαφορετικά: έχοντας δείξει ότι το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι βάση του $\mathcal{E}$ ως εξής: Επειδή f είναι ισομορφισμός, έπεται ότι: $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Από την άλλη πλευρά $|f(\mathcal{B})| = n$ (διότι διαφορετικά υπάρχουν $1 \leq i \neq j \leq n$ έτσι ώστε: $f(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_j)$. Τότε όμως $\vec{e}_i = \vec{e}_j$ επειδή η f είναι μονομορφισμός, κάτι το οποίο είναι άτοπο διότι το $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$). Από γνωστό Θεώρημα: $f(\mathcal{B})$ γραμμικά ανεξάρτητο και $|f(\mathcal{B})| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} \implies f(\mathcal{B})$ είναι βάση του $\mathcal{F}$.

(β΄) *($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι αν $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ τότε το σύνολο $f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_n)\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ισομορφισμός.*

- *Η f είναι μονομορφισμός: Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$ και $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$. Τότε:*

$$\begin{aligned} & f(\vec{x}) = \vec{0} \implies f(\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n) = \vec{0} \\ \Longrightarrow\ & \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{e}_n) = \vec{0} && (\textit{επειδή } f: \textit{γραμμική}) \\ \Longrightarrow\ & \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 && (\textit{επειδή } \{f(\mathcal{B})\}: \textit{γραμμικά ανεξάρτητο}) \\ \Longrightarrow\ & \vec{x} = \vec{0} \\ \Longrightarrow\ & \operatorname{Ker} f = \vec{0} \\ \Longrightarrow\ & f: \textit{μονομορφισμός} \end{aligned}$$

- *Η f είναι επιμορφισμός: Έστω $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Αφού το σύνολο $f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_n)\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, τότε*

$$\vec{y} = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{e}_n) = f(\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n) = f(\vec{x})$$

όπου $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n \in \mathcal{E}$. Συνεπώς η f είναι επιμορφισμός.
Επομένως έχουμε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Διαφορετικά: έχοντας δείξει ότι η f είναι μονομορφισμός, θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι η f είναι επιμορφισμός ως εξής: Επειδή το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι βάση του $\mathcal{F}$ έπεται ότι: $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Από την άλλη πλευρά η Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων δίνει ότι: $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$. Επειδή $\operatorname{Im} f$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{F}$ και $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$, από γνωστό Θεώρημα έπεται ότι $\operatorname{Im} f = \mathcal{F}$, δηλαδή η f είναι επιμορφισμός.

Παρατήρηση. *Η παραπάνω Άσκηση 11 μπορεί να διατυπωθεί και για γραμμικές απεικονίσεις $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια.*

Υπεθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, τότε το σύνολο

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \big\{f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \mid f: \text{ γραμμική}\big\}$$

είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με πράξεις, $\forall f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$f + g: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}, \quad (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \qquad \text{(πρόσθεση)}$$

$$\lambda \cdot f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}, \quad (\lambda \cdot f)(\vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \qquad \text{(βαθμωτός πολλαπλασιασμός)}$$

Αν $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζονται οι γραμμικές απεικονίσεις $f^n: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $\forall n \geq 0$, όπου $f^0 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, και $f^n(\vec{x}) = (f \circ f \circ \cdots \circ f)(\vec{x})$ (σύνθεση της f με τον εαυτό της n-φορές).

Τέλος, αν $f, f_1, f_2: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ και $g, g_1, g_2: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε:

$$f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2 \qquad \text{και} \qquad (f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$$

Άσκηση 12. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Να δειχθεί ότι:*

$$\{\vec{0}\} \subseteq \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2) \subseteq \mathrm{Ker}(f^3) \subseteq \cdots\cdots \subseteq \mathrm{Ker}(f^k) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \subseteq \cdots\cdots \subseteq \mathcal{E}$$

και υπάρχει $r \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1}) = \mathrm{Ker}(f^{r+2}) = \cdots$$

Λύση. *Προφανώς τα σύνολα $\mathrm{Ker}(f^k)$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{E}$, $\forall k \geq 0$. Παρατηρούμε ότι $f^0 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ και άρα $\mathrm{Ker}(f^0) = \{\vec{0}\}$. Έστω k ένας μη-αρνητικός ακέραιος, και έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f^k)$. Τότε $f^k(\vec{x}) = \vec{0}$ και τότε $f(f^k(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, δηλαδή $f^{k+1}(\vec{x}) = (\vec{0})$ και άρα $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{Ker}(f^k) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, $\forall k \geq 0$.*

Θεωρώντας διαστάσεις, προκύπτει η εξής αύξουσα ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών:

$$0 \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^2) \leq \cdots\cdots \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^k) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \leq \cdots\cdots \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

Αν, για κάθε $k \geq 0$, η ανισότητα $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^k) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ δεν είναι ποτέ ισότητα, τότε η παραπάνω ακολουθία είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία μη-αρνητικών ακεραίων. Όμως, επειδή ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, και όλοι οι αριθμοί $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^k)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι από τον αριθμό $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$, καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, υπάρχει $k \geq 0$ έτσι ώστε: $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^k) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, και έστω r ο μικρότερος μη-αρνητικός ακέραιος με αυτή την ιδιότητα, δηλαδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^r) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^{r+1})$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^k) < \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, αν $k < r$. Επειδή ο $\mathrm{Ker}(f^r)$ είναι υπόχωρος του $\mathrm{Ker}(f^{r+1})$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^r) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^{r+1})$, έπεται ότι: $\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1})$.

Τότε: $\forall m \geq r$: $\mathrm{Ker}(f^m) = \mathrm{Ker}(f^{m+1})$. Πράγματι, έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f^{m+1})$, δηλαδή $f^{m+1}(\vec{x}) = \vec{0}$. Επειδή $r \leq m$, μπορούμε να γράψουμε: $f^{m+1} = f^{r+1}(f^{m-r})$ και άρα $\vec{0} = f^{m+1}(\vec{x}) = f^{r+1}(f^{m-r}(\vec{x}))$. Αυτό σημαίνει ότι $f^{m-r}(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(f^{r+1})$. Επειδή $\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1})$, έπεται ότι $f^{m-r}(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(f^r)$, δηλαδή $f^{m-r}(f^r(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $f^m(\vec{x}) = \vec{0}$ και άρα $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f^m)$. Επομένως $\mathrm{Ker}(f^{m+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(f^m)$ και αρα: $\mathrm{Ker}(f^m) = \mathrm{Ker}(f^{m+1})$, $\forall m \geq r$. Αυτό σημαίνει ότι: $\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1}) = \mathrm{Ker}(f^{r+2}) = \cdots$.

Άσκηση 13. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E} \supseteq \mathrm{Im}(f) \supseteq \mathrm{Im}(f^2) \supseteq \mathrm{Im}(f^3) \supseteq \cdots\cdots \supseteq \mathrm{Im}(f^k) \supseteq \mathrm{Im}(f^{k+1}) \supseteq \cdots\cdots \supseteq \{\vec{0}\}$$

και υπάρχει $s \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Im}(f^s) = \mathrm{Im}(f^{s+1}) = \mathrm{Im}(f^{s+2}) = \cdots$$

Λύση. *Προφανώς τα σύνολα $\mathrm{Im}(f^k)$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{E}$, $\forall k \geq 0$. Παρατηρούμε ότι $f^0 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ και άρα $\mathrm{Im}(f^0) = \mathcal{E}$. Έστω k ένας μη-αρνητικός ακέραιος, και έστω $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$. Τότε υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f^{k+1}(\vec{y}) = \vec{x}$, και τότε $f^k(f(\vec{y})) = \vec{x}$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f^k)$. Συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(f^k)$, $\forall k \geq 0$.*

Θεωρώντας διαστάσεις, προκύπτει η εξής φθίνουσα ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \geq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) \geq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^2) \geq \cdots\cdots \geq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^k) \geq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^{k+1}) \geq \cdots\cdots \geq 0$$

Αν, για κάθε $k \geq 0$, η ανισότητα $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^k) \geq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^{k+1})$ δεν είναι ποτέ ισότητα, τότε η παραπάνω ακολουθία είναι μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία μη-αρνητικών ακεραίων. Όμως, επειδή ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, και όλοι οι αριθμοί $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^k)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι από τον αριθμό $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$, καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, υπάρχει $k \geq 0$ έτσι ώστε: $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^k) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^{k+1})$, και έστω s ο μικρότερος μη-αρνητικός ακέραιος με αυτή την ιδιότητα, δηλαδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^s) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^{s+1})$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^k) > \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^{k+1})$, αν $k < s$. Επειδή ο $\mathrm{Ker}(f^s)$ είναι υπόχωρος του $\mathrm{Ker}(f^{s+1})$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^s) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^{s+1})$, έπεται ότι: $\mathrm{Im}(f^s) = \mathrm{Im}(f^{s+1})$.

Τότε: $\forall m \geq s$: $\mathrm{Im}(f^m) = \mathrm{Im}(f^{m+1})$. Πράγματι, έστω $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f^m)$, δηλαδή $f^m(\vec{y}) = \vec{x}$, για κάποιο $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Επειδή $s \geq m$, μπορούμε να γράψουμε: $f^m = f^{m-s}(f^s)$ και άρα $\vec{x} = f^m(\vec{y}) = f^{m-s}(f^s(\vec{y}))$. Επειδή $f^s(\vec{y}) \in \mathrm{Im}(f^s)$ και $\mathrm{Im}(f^s) = \mathrm{Im}(f^{s+1})$, έπεται ότι $f^s(\vec{y}) \in \mathrm{Im}(f^{s+1})$ και άρα υπάρχει $\vec{z} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f^{s+1}(\vec{z}) = f^s(\vec{y})$. Τότε θα έχουμε: $\vec{x} = f^m(\vec{y}) = f^{m-s}(f^s(\vec{y})) = f^{m-s}(f^{s+1}(\vec{z}) = f^{m+1}(\vec{z})$ και επομένως $\mathrm{Im}(f^m) \subseteq \mathrm{Im}(f^{m+1})$ και άρα $\mathrm{Im}(f^m) = \mathrm{Im}(f^{m+1})$, $\forall m \geq s$. Αυτό σημαίνει ότι: $\mathrm{Im}(f^s) = \mathrm{Im}(f^{s+1}) = \mathrm{Im}(f^{r+2}) = \cdots$.

Άσκηση 14. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, και έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$.

(1) *Υποθέτουμε ότι:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \quad \cdots, \quad f(\vec{e}_{n-1}) = \vec{e}_n, \quad f(\vec{e}_n) = \vec{e}_1$$

Να δειχθεί ότι: $f^n = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, *η* f *είναι ισομορφισμός και να βρεθεί η αντίστροφή της.*

(2) *Υποθέτουμε ότι:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \quad \cdots, \quad f(\vec{e}_{n-1}) = \vec{e}_n, \quad f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$

Να δειχθεί ότι: $f^n = 0$ *και να βρεθεί η βαθμίδα της* f.

Λύση. (1) *Θα έχουμε:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 \implies f^2(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \implies f^3(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_3) = \vec{e}_4, \;\cdots\; f^{n-1}(\vec{e}_1) = \vec{e}_n \implies$$
$$f^n(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_n) = \vec{e}_1$$
$$f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3 \implies f^2(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_3) = \vec{e}_4, \implies f^4(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_4) = \vec{e}_5, \;\cdots\; f^{n-1}(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \implies$$
$$f^n(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$$
$$\vdots$$
$$f(\vec{e}_{n-1}) = \vec{e}_n \implies f^2(\vec{e}_{n-1}) = f(\vec{e}_n) = \vec{e}_1, \implies f^3(\vec{e}_{n-1}) = f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \;\cdots\; f^{n-1}(\vec{e}_1) = \vec{e}_{n-2} \implies$$
$$f^n(\vec{e}_{n-1}) = f(\vec{e}_{n-2}) = \vec{e}_{n-1}$$
$$f(\vec{e}_n) = \vec{e}_1 \implies f^2(\vec{e}_n) = f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \implies f^3(\vec{e}_n) = f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \;\cdots\; f^{n-1}(\vec{e}_n) = \vec{e}_{n-1} \implies$$
$$f^n(\vec{e}_n) = f(\vec{e}_{n-1}) = \vec{e}_n$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι: $f^n(\vec{e}_k) = \vec{e}_k$, $1 \leq k \leq n$. *Επειδή το σύνολο* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *είναι μια βάση του* $\mathcal{E}$, *έπεται ότι* $f^n = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. *Πράγματι, έστω* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *και έστω* $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ *η μοναδική γραφή του* $\vec{x}$ *ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{B}$. *Τότε:* $f^n(\vec{x}) = f^n(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f^n(\vec{e}_1) + x_2 f^n(\vec{e}_2) + \cdots + x_n f^n(\vec{e}_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \vec{x} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x})$. *Επομένως* $f^n = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ *και τότε:*

$$f^n = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \implies f \circ f^{n-1} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f^{n-1} \circ f$$

Συμπεραίνουμε ότι η f *είναι ισομορφισμός με αντίστροφη:* $f^{-1} = f^{n-1}$.

(2) *Θα έχουμε:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 \implies f^2(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \implies f^3(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_3) = \vec{e}_4, \;\cdots\; f^{n-1}(\vec{e}_1) = \vec{e}_n \implies$$
$$f^n(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$
$$f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3 \implies f^2(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_3) = \vec{e}_4, \implies f^4(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_4) = \vec{e}_5, \;\cdots\; f^{n-2}(\vec{e}_2) = \vec{e}_n \implies$$
$$f^{n-1}(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$
$$\vdots$$
$$f(\vec{e}_{n-1}) = \vec{e}_n \implies f^2(\vec{e}_{n-1}) = f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$
$$f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι: $f^n(\vec{e}_k) = \vec{0}, 1 \leq k \leq n$. *πειδή το σύνολο* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *είναι μια βάση του* $\mathcal{E}$, *έπεται ότι* $f^n = 0$. *Πράγματι, έστω* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *και έστω* $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ *η μοναδική γραφή του* $\vec{x}$ *ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{B}$. *Τότε:* $f^n(\vec{x}) = f^n(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f^n(\vec{e}_1) + x_2 f^n(\vec{e}_2) + \cdots + x_n f^n(\vec{e}_n) = x_1\vec{0} + x_2\vec{0} + \cdots + x_n\vec{0} = \vec{0} = 0(\vec{x})$. *Επομένως* $f^n = 0$.

Η βαθμίδα της f *είναι η διάσταση του υπόχωρου*

$$\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_{n-1}), f(\vec{e}_n) \rangle = \dim_{\mathbb{K}} \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_n, \vec{0} \rangle =$$
$$= \dim_{\mathbb{K}} \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_n \rangle = n - 1$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε διότι το σύνολο $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως υποσύνολο του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου* $\mathcal{B}$.

Άσκηση 15. *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\mathrm{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\mathrm{Im}(f)$ *της γραμμικής απεικόνισης:*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+2y, y-x, x+2z)$$

Είναι η f ισομορφισμός· Αν η f είναι ισομορφισμός, να βρεθεί η f^{-1}.

Λύση. *Έστω* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Τότε:* $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$ *αν και μόνον αν:*

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \iff (x+2y, y-x, x+2z) = (0,0,0) \iff x = y = z = 0$$

Συνεπώς $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ *και άρα η f είναι μονομορφισμός και άρα το κενό σύνολο* $\{\emptyset\}$ *είναι βάση του πυρήνα* $\mathrm{Ker}(f)$ *της f.*

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$, *ως βάση του* $\mathbb{R}^3$, *παράγει τον* $\mathbb{R}^3$, *έπεται ότι το σύνολο* $f(\mathcal{B}) = \big\{f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2),\ f(\vec{e}_3)\big\}$ *παράγει την εικόνα* $\mathrm{Im}(f)$ *της f. Έτσι:*

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle (1,-1,1), (2,1,0), (0,0,2)\rangle$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

και άρα τα διανύσματα $(1,-1,1), (2,1,0), (0,0,2)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο των διανυσμάτων* $\{(1,-1,1), (2,1,0), (0,0,2)\}$ *αποτελεί βάση της εικόνας* $\mathrm{Im}(f)$ *της f. Να σημειώσουμε ότι από την Παρατήρηση 2 έπεται ότι η f είναι ισομορφισμός. Για να βρούμε την αντίστροφη f^{-1} της f εργαζόμαστε ως εξής: έστω* $f(x,y,z) = (a,b,c)$ *και επομένως* $f^{-1}(a,b,c) = (x,y,z)$. *Τότε* $(x+2y, y-x, x+2z) = (a,b,c)$ *και επομένως:*

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ y - x = b \\ x + 2z = c \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{a-2b}{3} \\[2ex] y = \dfrac{a+b}{3} \\[2ex] z = \dfrac{-a+2b+3c}{6} \end{cases}$$

Επομένως

$$f^{-1} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f^{-1}(a,b,c) = \left(\frac{a-2b}{3}, \frac{a+b}{3}, \frac{-a+2b+3c}{6}\right)$$

Άσκηση 16. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση:*

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z,w) = (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w)$$

(1) *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\mathrm{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\mathrm{Im}(f)$ *της f.*
(2) *Να δειχθεί ότι το διάνυσμα* $(1,3,\kappa) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \kappa = 5$.
(3) *Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα* $a, b \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $(1,a,1,b) \in \mathrm{Ker}(f)$;

Λύση. (1) *Έστω* $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$. *Τότε:* $(x,y,z,w) \in \mathrm{Ker}(f)$ *αν και μόνον αν:*

$$f(x,y,z,w) = (0,0,0) \iff (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w) = (0,0,0) \iff \begin{cases} x - z + 2w = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \\ y + 4w = 0 \end{cases}$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \longrightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} x - z + 2w = 0 \\ y + 4w = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = z - 2w \\ y = -4w \end{cases}$$

Συνεπώς ο πυρήνας της f είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,w)=(0,0,0)\}\\ &= \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid x=z-2w \ \text{ και } \ y=-4w\}\\ &= \{(z-2w,-4w,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid z,w\in\mathbb{R}\}\\ &= \{z(1,0,1,0)+w(-2,-4,0,1)\in\mathbb{R}^4 \mid z,w\in\mathbb{R}\}\\ &= \langle(1,0,1,0),(-2,-4,0,1)\rangle\end{aligned}$$

Έστω $\lambda_1(1,0,1,0)+\lambda_2(-2,-4,0,1)=(0,0,0,0)$. *Τότε*

$$(\lambda_1-2\lambda_2,-4\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)=(0,0,0,0) \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=0$$

και άρα τα διανύσματα $(1,0,1,0),(-2,-4,0,1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως το σύνολο* $\{(1,0,1,0),(-2,-4,0,1)\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathrm{Ker}(f)$.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}=\big\{\vec{e}_1=(1,0,0,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0,0),\ \vec{e}_3=(0,0,1,0),\ \vec{e}_4=(0,0,0,1)\big\}$, *ως βάση του* $\mathbb{R}^4$, *παράγει τον* $\mathbb{R}^4$, *έπεται ότι το σύνολο* $f(\mathcal{B})=\big\{f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2),\ f(\vec{e}_3),\ f(\vec{e}_4)\big\}$ *παράγει την εικόνα* $\mathrm{Im}(f)$ *της* f. *Έτσι:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \langle f(1,0,0,0),f(0,1,0,0),f(0,0,1,0),f(0,0,0,1)\rangle\\ &= \langle(1,-2,0),(0,1,1),(-1,2,0),(2,0,4)\rangle\\ &= \big\langle(1,-2,0),\ (0,1,1),\ (2,0,4)\big\rangle\end{aligned}$$

Έστω $\kappa(1,-2,0)+\lambda(0,1,1)+\mu(2,0,4)=(0,0,0)$. *Τότε*

$$(\kappa+2\mu,-2\kappa+\lambda,\lambda+4\mu)=(0,0,0)\longrightarrow\begin{cases}\kappa+2\mu=0\\ -2\kappa+\lambda=0\\ \lambda+4\mu=0\end{cases}\longrightarrow\quad \kappa=-2\mu \ \text{ και } \ \lambda=-4\mu$$

Το σύστημα αυτό έχει ως γενική λύση: $(-2\mu,-4\mu,\mu)$ *όπου* $\mu\in\mathbb{R}$ *και επομένως, για* $\mu=1$, *θα έχουμε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης:*

$$-2(1,-2,0)-4(0,1,1)+(2,0,4)=(0,0,0)\longrightarrow(2,0,4)\in\langle(1,-2,0),\ (0,1,1)\rangle$$

Συνεπώς

$$\mathrm{Im}(f)=\langle(1,-2,0),\ (0,1,1)\rangle$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $(1,-2,0),(0,1,1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. ’ρα το σύνολο* $\{(1,-2,0),(0,1,1)\}$ *αποτελεί βάση της εικόνας* $\mathrm{Im}(f)$ *της* f.

(2) *Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι το σύνολο* $\{(1,-2,0),(0,1,1)\}$ *αποτελεί βάση της εικόνας* $\mathrm{Im}(f)$ *της* f. *Συνεπώς το διάνυσμα* $(1,3,\kappa)\in\mathrm{Im}(f)$ *αν και μόνο αν υπάρχουν* $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ *έτσι ώστε*

$$\lambda_1(1,-2,0)+\lambda_2(0,1,1)=(1,3,\kappa)\quad\Longrightarrow\quad(\lambda_1,-2\lambda_1+\lambda_2,\lambda_2)=(1,3,\kappa)$$

’ρα έχουμε $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\kappa$ *και*

$$-2\lambda_1+\lambda_2=3\quad\Longrightarrow\quad\lambda_2=3+2\lambda_1=5\quad\Longrightarrow\quad\kappa=5$$

Επομένως δείξαμε ότι $(1,3,\kappa)\in\mathrm{Im}(f)$ *αν και μόνο αν* $\kappa=5$.

(3) *Από το ερώτημα (1) γνωρίζουμε ότι το σύνολο* $\{(1,0,1,0),(-2,-4,0,1)\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathrm{Ker}(f)$. *Επομένως το διάνυσμα* $(1,a,1,b)\in\mathrm{Ker}(f)$ *αν και μόνο αν υπάρχουν* $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ *έτσι ώστε*

$$\begin{aligned}\lambda_1(1,0,1,0)+\lambda_2(-2,-4,0,1)=(1,a,1,b)\quad&\Longrightarrow\quad(\lambda_1-2\lambda_2,-4\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)=(1,a,1,b)\\ &\Longrightarrow\quad a=b=0\end{aligned}$$

Άρα για $a=b=0$ *το διάνυσμα* $(1,a,1,b)\in\mathrm{Ker}(f)$.

Άσκηση 17. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=(x+3z,\ 3y+z,\ -x+6y-z)$$

(1) *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\mathrm{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\mathrm{Im}(f)$ *της* f.
(2) *Να βρεθούν οι υπόχωροι* $f(\mathcal{V})$ *και* $f^{-1}(\mathcal{W})$, *όπου:*

$$\mathcal{V}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+2z=0\big\}\qquad\text{και}\qquad\mathcal{W}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 2x-5y+z=0\big\}$$

Λύση. (1) *Έστω* $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$. *Τότε:*

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \implies (x+3z, 3y+z, -x+6y-z) = (0,0,0) \implies \begin{cases} x+3z=0, \\ 3y+z=0 \\ -x+6y-z=0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x=-3z, \\ z=-3y \\ -x+6y-z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=9y, \\ y\in\mathbb{R} \\ z=-3y \end{cases} \implies (x,y,z) = y(9,1,-3), \ \ y \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$\mathrm{Ker}(f) = \big\{ y(9,1,-3) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \big\} = \big\langle (9,1,-3) \big\rangle$$

Έτσι το διάνυσμα $\vec{\epsilon}_1 = (9,1,-3)$ *είναι βάση του* $\mathrm{Ker}(f)$ *και άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) = 1$.

Γνωρίζουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = 3 - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) = 3-1 = 2$. *Συμπληρώνουμε τη βάση* $\vec{\epsilon}_1 = (9,1,-3)$ *του* $\mathrm{Ker}(f)$ *σε μια βάση του* $\mathbb{R}^3$. *Μια προφανής επιλογή είναι τα διανύσματα*

$$\vec{\epsilon}_1 = (9,1,-3), \quad \vec{e}_2 = (0,1,0), \quad \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

διότι

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Γνωρίζουμε τότε ότι:

$$\mathrm{Im}(f) = \big\langle f(0,1,0),\ f(0,0,1) \big\rangle = \big\langle (0,3,6),\ (3,1,-1) \big\rangle = \big\langle (0,1,2),\ (3,1,-1) \big\rangle$$

Αν $\lambda_1(0,1,2) + \lambda_2(3,1,-1) = (0,0,0)$, *τότε:* $(3\lambda_2, \lambda_1+\lambda_2, 2\lambda_1 - 2\lambda_2) = (0,0,0)$, *από όπου προκύπτει ότι* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *Επομένως το σύνολο* $\big\{(0,1,2),\ (3,1,-1)\big\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί βάση της* $\mathrm{Im}(f)$.

(2) *Θα έχουμε:*

$$\mathcal{V} = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0 \big\} = \big\{ (y-2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R} \big\} =$$
$$= \big\{ y(1,1,0) + z(-2,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R} \big\} = \big\langle (1,1,0),\ (-2,0,1) \big\rangle$$

Τότε

$$f(\mathcal{V}) = f\big(\big\langle (1,1,0),\ (-2,0,1) \big\rangle\big) = \big\langle f(1,1,0),\ f(-2,0,1) \big\rangle = \big\langle (1,3,5),\ (1,1,1) \big\rangle$$

Παρόμοια

$$\mathcal{W} = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-5y+z=0 \big\} = \big\{ (x,y,-2x+5y) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R} \big\} =$$
$$= \big\{ x(1,0,-2) + y(0,1,5) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R} \big\} = \big\langle (1,0,-2),\ (0,1,5) \big\rangle$$

Έστω $(a,b,c) \in f^{-1}(\mathcal{W})$. *Τότε* $f(a,b,c) = (a+3c, 3b+c, -a+6b-c) \in \mathcal{W} = \big\langle (1,0,-2),\ (0,1,5) \big\rangle = \big\{ (x,y,-2x+5y) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R} \big\}$. *Τότε θα έχουμε:*

$$\begin{cases} a+3c = x \\ 3b+c = y \\ -a+6b-c = -2x+5y \end{cases} \implies -a+6b-c = -2(a+3c) + 5(3b+c) \implies$$

$$\implies -a+9b = 0 \implies a = 9b$$

Άρα αν $(a,b,c) \in f^{-1}(\mathcal{W})$, *τότε* $(a,b,c) = (9b,b,c) = b(9,1,0) + c(0,0,1) \in \langle (9,1,0), (0,0,1) \rangle$. *Επομένως*

$$f^{-1}(\mathcal{W}) \subseteq \big\langle (9,1,0),\ (0,0,1) \big\rangle$$

Αντίστροφα, έστω $(a,b,c) \in \big\langle (9,1,0),\ (0,0,1) \big\rangle$. *Τότε υπάρχουν* $x,y \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε:* $(a,b,c) = x(9,1,0) + y(0,0,1) = (9x,x,y)$. *Τότε* $f(a,b,c) = f(9x,x,y) = (9x+3y, 3x+y, -9x+6x-y) = (9x+3y, 3x+y, -3x-y) = (3x+y)(3,1,-1)$. *Επειδή* $(3,1,-1) = (1,0,-2) + (0,1,5) \in \mathcal{W}$ *προκύπτει ότι* $f(a,b,c) \in \mathcal{W}$ *και άρα* $(a,b,c) \in f^{-1}(\mathcal{W})$. *Επομένως*

$$\big\langle (9,1,0),\ (0,0,1) \big\rangle \subseteq f^{-1}(\mathcal{W})$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$f^{-1}(\mathcal{W}) \,=\, \big\langle (9,1,0),\, (0,0,1) \big\rangle$$

Άσκηση 18. *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. *Έστω ότι* $f^n = 0$ *και* $f^{n-1} \neq 0$. *Αν* $\vec{x} \in \mathcal{E}$, *να δείξετε ότι* $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$ *αν και μόνο αν το σύνολο*

$$\big\{ \vec{x},\ f(\vec{x}),\ \cdots,\ f^{n-1}(\vec{x}) \big\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λύση. *Αν το σύνολο* $\big\{ \vec{x},\ f(\vec{x}),\ \cdots,\ f^{n-1}(\vec{x}) \big\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο τότε έχουμε ότι*[3] $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε* $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$. *Θα δείξουμε ότι το σύνολο* $\big\{ \vec{x},\ f(\vec{x}),\ \cdots,\ f^{n-1}(\vec{x}) \big\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω* $\lambda_0\vec{x} + \lambda_1 f(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0}$. *Εφαρμόζοντας διαδοχικά την* f *στην παραπάνω σχέση και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι* $f^n = 0$ *και* $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$, *θα έχουμε:*

$$\begin{aligned}
& \lambda_0\vec{x} + \lambda_1 f(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0} \qquad (*) \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f(\vec{x}) + \lambda_1 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-2} f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_{n-1} f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f(\vec{x}) + \lambda_1 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-2} f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f^2(\vec{x}) + \lambda_1 f^3(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-3} f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_{n-2} f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f^2(\vec{x}) + \lambda_1 f^3(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-3} f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f^3(\vec{x}) + \lambda_1 f^4(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-4} f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_{n-3} f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f^3(\vec{x}) + \lambda_1 f^4(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-4} f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
& \vdots \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f^{n-2}(\vec{x}) + \lambda_1 f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_2 f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f^{n-2}(\vec{x}) + \lambda_1 f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_1 f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_0 = 0 \quad \textit{αφού} \quad f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}
\end{aligned}$$

'ρα από τη σχέση $(*)$ *έχουμε*

$$\lambda_1 f(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0}$$

και αν επαναλάβουμε ξανά την παραπάνω διαδικασία τότε

$$\begin{cases} \lambda_1 f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0} \\ f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 0$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο έπεται ότι $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ *και άρα το σύνολο* $\big\{ \vec{x}, f(\vec{x}), \cdots, f^{n-1}(\vec{x}) \big\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Άσκηση 19. *Θεωρούμε τον* 2×2 *πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \longrightarrow\ \mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \qquad f(M) = AM - MA$$

Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\operatorname{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\operatorname{Im}(f)$ *της* f.

---

[3] Το μηδενικό διάνυσμα ενός διανυσματικού χώρου είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένο και ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο δεν περιέχει γραμμικά εξαρτημένα υποσύνολα.

Λύση. *Έστω* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$. *Τότε*

$$f(M) = AM - MA \quad \Longrightarrow \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a+d & -b \end{pmatrix}$$

Τότε: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$ *αν και μόνον αν:*

$$f(M) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a+d & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = d \end{cases}$$

και άρα ο πυρήνας της f *είναι*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid b = 0 \text{ και } a = d \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *και* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα* A, B *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα το σύνολο* $\{A, B\}$ *είναι βάση του πυρήνα* $\mathrm{Ker}(f)$ *της* f. *Για την εικόνα της* f *έχουμε:*

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Θέτουμε $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *και* $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Τότε αφού τα διανύσματα* Γ, Δ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι το σύνολο* $\{\Gamma, \Delta\}$ *είναι βάση της εικόνας* $\mathrm{Im}(f)$ *της* f.

Άσκηση 20. *Θεωρούμε τη βάση*

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = t, \vec{e}_3 = t^2\}$$

του $\mathbb{R}_2[t]$ *και τα διανύσματα*

$$\vec{w}_1 = 1 + t, \;\; \vec{w}_2 = 3 - t^2, \;\; \vec{w}_3 = 4 + 2t - 3t^2$$

του $\mathbb{R}_2[t]$. *Να προσδιορισθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ *έτσι ώστε:* $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq 3$. *Ακολούθως να εξετασθεί αν η* f *είναι ισομορφισμός. Αν η* f *δεν είναι ισομορφισμός να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\mathrm{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\mathrm{Im}(f)$ *της* f.

Λύση. *Έστω* $P(t) = a + bt + ct^2 \in \mathbb{R}_2[t]$. *Τότε έχουμε*

$$\begin{aligned} f(a+bt+ct^2) &= af(1) + bf(t) + cf(t^2) \\ &= a(1+t) + b(3-t^2) + c(4+2t-3t^2) \\ &= a + at + 3b - bt^2 + 4c + 2ct - 3ct^2 \\ &= (a+3b+4c) + (a+2c)t + (-b-3c)t^2 \end{aligned}$$

Επομένως η f *ορίζεται ως ακολούθως:*

$$f\colon\ \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t], \quad a+bt+ct^2 \longmapsto f(a+bt+ct^2) = (a+3b+4c) + (a+2c)t + (-b-3c)t^2$$

Έστω $P(t) = a + bt + ct^2 \in \mathbb{R}_2[t]$. *Τότε:* $P(t) \in \operatorname{Ker}(f)$ *αν και μόνον αν:*

$$f(P(t)) = 0 \iff (a+3b+4c) + (a+2c)t + (-b-3c)t^2 = 0 + 0t + 0t^2 \iff \begin{cases} a+3b+4c = 0 \\ a+2c = 0 \\ -b-3c = 0 \end{cases}$$

Τότε $b = -3c$, $a = -2c$ *και άρα* $-2c + 3(-3c) + 4c = 0 \longrightarrow c = 0$. *Επομένως έχουμε* $a = b = c = 0$. *Συνεπώς ο πυρήνας της* f *είναι* $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ *και άρα η γραμμική απεικόνιση* f *είναι μονομορφισμός. Από την εξίσωση των διαστάσεων έχουμε:*

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[t] = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f &\implies 3 = 0 + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f \implies \begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 3 \\ \operatorname{Im} f \ :\ \textit{υπόχωρος του } \mathbb{R}_2[t] \end{cases} \\ &\implies \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_2[t] \\ &\implies f \ :\ \textit{επιμορφισμός} \end{aligned}$$

Επομένως η γραμμική απεικόνιση f *είναι ισομορφισμός.*

Άσκηση 21. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *μια γραμμική απεικόνιση. Αν* $\mathbf{r}(f) = r$, *να δειχθεί ότι υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις* $f_i\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, *έτσι ώστε* $\mathbf{r}(f_i) = 1$, $1 \leq i \leq r$, *και:*

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$$

Λύση. *Επειδή* $\mathbf{r}(f) = r$, *έπεται ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f) = r$ *και επομένως υπάρχει μια βάση της εικόνας* $\operatorname{Im}(f)$ *της μορφής* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_r\}$. *Τότε για κάθε* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *θα έχουμε ότι υπάρχουν μοναδικά στοιχεία*[4] $\lambda_1(\vec{x}), \lambda_2(\vec{x}), \cdots, \lambda_r(\vec{x})$ *από το σώμα* $\mathbb{K}$ *έτσι ώστε:*

$$f(\vec{x}) = \lambda_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \lambda_2(\vec{x})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\vec{x})\vec{e}_r \tag{$*$}$$

Τότε, αν έχουμε $\vec{y} \in \mathcal{E}$ *και* $\lambda \in \mathbb{K}$, *έπεται ότι:*

$$f(\vec{y}) = \lambda_1(\vec{y})\vec{e}_1 + \lambda_2(\vec{y})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\vec{y})\vec{e}_r$$

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda\big(\lambda_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \lambda_2(\vec{x})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\vec{x})\vec{e}_r\big) = \lambda\lambda_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \lambda\lambda_2(\vec{x})\vec{e}_2 + \cdots \lambda\lambda_r(\vec{x})\vec{e}_r$$

Τότε για το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y}$, *θα έχουμε*

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda_1(\vec{x}+\vec{y})\vec{e}_1 + \lambda_2(\vec{x}+\vec{y})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\vec{x}+\vec{y})\vec{e}_r$$

Επειδή $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ *έπεται ότι:*

$$\lambda_1(\vec{x}+\vec{y})\vec{e}_1 + \lambda_2(\vec{x}+\vec{y})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\vec{x}+\vec{y})\vec{e}_r = \lambda_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \lambda_2(\vec{x})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\vec{x})\vec{e}_r + \lambda_1(\vec{y})\vec{e}_1 + \lambda_2(\vec{y})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\vec{y})\vec{e}_r$$

δηλαδή

$$\lambda_1(\vec{x}+\vec{y})\vec{e}_1 + \lambda_2(\vec{x}+\vec{y})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\vec{x}+\vec{y})\vec{e}_r = \big(\lambda_1(\vec{x}) + \lambda_1(\vec{y})\big)\vec{e}_1 + \big(\lambda_2(\vec{x}) + \lambda_2(\vec{y})\big)\vec{e}_2 + \cdots + \big(\lambda_r(\vec{x}) + \lambda_r(\vec{y})\big)\vec{e}_r$$

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_r\}$ *είναι μια βάση της* $\operatorname{Im}(f)$, *έπεται ότι:*

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n: \qquad \lambda_i(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda_i(\vec{x}) + \lambda_i(\vec{y}) \tag{$\dagger$}$$

Παρόμοια, για το διάνυσμα $\lambda\vec{x}$, *θα έχουμε:*

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda_1(\lambda\vec{x})\vec{e}_1 + \lambda_2(\lambda\vec{x})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\lambda\vec{x})\vec{e}_r$$

[4] Γράφουμε $\lambda_i(\vec{x})$ αντί λ_i για να τονίσουμε ότι τα στοιχεία αυτά εξαρτώνται μοναδικά από το διάνυσμα $\vec{x}$.

και

$$\lambda f(\vec{x}) = \lambda\lambda_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \lambda\lambda_2(\vec{x})\vec{e}_2 + \cdots \lambda\lambda_r(\vec{x})\vec{e}_r$$

Επειδή $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$, *έπεται ότι*

$$\lambda_1(\lambda\vec{x})\vec{e}_1 + \lambda_2(\lambda\vec{x})\vec{e}_2 + \cdots \lambda_r(\lambda\vec{x})\vec{e}_r = \lambda\lambda_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \lambda\lambda_2(\vec{x})\vec{e}_2 + \cdots \lambda\lambda_r(\vec{x})\vec{e}_r$$

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_r\}$ *είναι μια βάση της* $\mathrm{Im}(f)$, *έπεται ότι:*

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n: \qquad \lambda_i(\lambda\vec{x}) = \lambda\lambda_i(\vec{x}) \tag{††}$$

Ορίζουμε απεικονίσεις

$$f_i\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}, \quad f_i(\vec{x}) = \lambda_i(\vec{x})\vec{e}_i$$

Τότε για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{K}$ *όπως παραπάνω, και για κάθε* $i = 1, 2, \cdots, r$, *χρησιμοποιώντας τις σχέσεις* (†) *και* (††), *θα έχουμε:*

$$f_i(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda_i(\vec{x} + \vec{y})\vec{e}_i = \big(\lambda_i(\vec{x}) + \lambda_i(\vec{y})\big)\vec{e}_i = \lambda_i(\vec{x})\vec{e}_i + \lambda_i(\vec{y})\vec{e}_i = f_i(\vec{x}) + f_i(\vec{y})$$

$$f_i(\lambda\vec{x}) = \lambda_i(\lambda\vec{x})\vec{e}_i = \lambda\lambda_i(\vec{x})\vec{e}_i = \lambda f_i(\vec{x})$$

Επομένως, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, r$, *η απεικόνιση* f_i *είναι γραμμική, και τότε,* $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\big(f_1 + f_2 + \cdots + f_r\big)(\vec{x}) = f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + \cdots + f_r(\vec{x}) = \lambda_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \lambda_2(\vec{x})\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_r(\vec{x})\vec{e}_r = f(\vec{x})$$

Επομένως $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$.

Τέλος δείχνουμε ότι, $\forall i = 1, 2, \cdots, r$: $\mathbf{r}(f_i) = 1$. *Πράγματι, θα έχουμε:*

$$\mathrm{Im}(f_i) = \{f_i(\vec{x}) \in \mathcal{F} \mid \vec{x} \in \mathcal{E}\} = \{\lambda_i(\vec{x})\vec{e}_i \in \mathcal{F} \mid \vec{x} \in \mathcal{E}\} \subseteq \langle \vec{e}_i \rangle$$

Αν $\mathrm{Im}(f_i) \neq \langle \vec{e}_i \rangle$, *τότε θα έχουμε* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f_i) < \dim_{\mathbb{K}}\langle \vec{e}_i \rangle = 1$ *και επομένως* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f_i) = 0$. *Ισοδύναμα* $\mathrm{Im}(f_i) = \{\vec{0}\}$, *δηλαδή* $f_i = 0$. *Τότε,* $f = f_1 + \cdots + f_{i-1} + f_{i+1} + \cdots f_r$ *και άρα* $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $f(\vec{x}) = \lambda_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \cdots \lambda_{i-1}(\vec{x})\vec{e}_{i-1} + \lambda_{i+1}(\vec{x})\vec{e}_{i+1} + \cdots \lambda_r(\vec{x})\vec{e}_r$. *Αυτό σημαίνει ότι ο υπόχωρος* $\mathrm{Im}(f)$ *παράγεται από τα διανύσματα* $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \cdots, \vec{e}_r$ *και άρα* $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) \leq n - 1$, *το οποίο είναι άτοπο. Άρα* $\mathrm{Im}(f_i) = \langle \vec{e}_i \rangle$ *και επομένως* $\mathbf{r}(f_i) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f_i) = \dim_{\mathbb{K}}\langle \vec{e}_i \rangle = 1$.

Άσκηση 22. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ένας* $m \times n$ *πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Αν* $\mathbf{r}(A) = r$, *να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες* $A_1, A_2, \cdots, A_r \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r, \qquad \text{όπου} \qquad \mathbf{r}(A_i) = 1, \;\; 1 \leq i \leq r$$

Λύση. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f_A\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = AX$$

Είναι γνωστό από τη Θεωρία ότι $\mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(A)$. *Από την προηγούμενη Άσκηση έπεται ότι υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις* $f^1, f^2, \cdots, f^r\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_m$ *έτσι ώστε*

$$f_A = f^1 + f^2 + \cdots + f^r, \qquad \text{όπου} \qquad \mathbf{r}(f^i) = 1, \;\; 1 \leq i \leq r$$

Γνωρίζουμε όμως ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $\mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_m$ *είναι της μορφής* $X \longrightarrow MX$, *όπου* $M \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *είναι κατάλληλος πίνακας. Άρα υπάρχουν πίνακες* $A_1, A_2, \cdots, A_r \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$f^i = f^i_A, \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{και άρα} \quad f_A = f^1_A + f^2_A + \cdots + f^r_A$$

Αυτό σημαίνει ότι, $\forall X \in \mathbb{K}_n$:

$$f_A(X) = (f^1_A + f^2_A + \cdots + f^r_A)(X) \quad \Longrightarrow \quad AX = A_1X + A_2X + \cdots + A_rX = (A_1 + A_2 + \cdots + A_r)X$$

Θέτοντας διαδοχικά $X = E_1, E_2, \cdots, E_n$, *τα διανύσματα της κανονικής βάσης του* $\mathbb{K}_n$, *και χρησιμοποιώντας ότι αν* A *είναι ένας* $m \times n$ *πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$, *τότε* AE_i *είναι η* i*-οστή στήλη του πίνακα* A, *έπεται ότι*

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$$

και προφανώς $\mathbf{r}(A_i) = \mathbf{r}(f^i_A) = \mathbf{r}(f^i) = 1$, $1 \leq i \leq r$.

Άσκηση 23. *Έστω $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου οι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ έχουν πεπερασμένη διάσταση, και $\lambda \in \mathbb{K}$. Να δειχθούν τα εξής:*

(1)
$$\mathbf{r}(\lambda f) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \lambda = 0 \\ \mathbf{r}(f), & \text{αν } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

(2)
$$|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \ \leq \ \mathbf{r}(f+g) \ \leq \ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$$

Λύση. (1) *Αν $\lambda = 0$, τότε προφανώς λf είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση και τότε $\mathbf{r}(\lambda f) = 0$.*
Έστω $\lambda \neq 0$. Τότε $\mathrm{Im}(\lambda f) = \mathrm{Im}(f)$. Πράγματι, αν $\vec{x} \in \mathrm{Im}(\lambda f)$, τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $(\lambda f)(\vec{x}) = \vec{y}$, δηλαδή $\lambda f(\vec{x}) = \vec{y}$ και άρα $f(\lambda\vec{x}) = \vec{y}$. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$ και άρα $\mathrm{Im}(\lambda f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$. Αντίστροφα, αν $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$, τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{y}$, και τότε, επειδή $\lambda \neq 0$: $\vec{y} = f(\lambda\lambda^{-1}\vec{x}) = \lambda f(\lambda^{-1}\vec{x}) = (\lambda f)(\lambda^{-1}\vec{x}) \in \mathrm{Im}(\lambda f)$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(\lambda f)$. Συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\lambda f)$ και επομένως: $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(\lambda f) = \mathbf{r}(\lambda f)$.

(2) *Δείχνουμε πρώτα ότι: $\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Πράγματι, αν $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f+g)$, τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $(f+g)(\vec{x}) = \vec{y}$ και τότε $\vec{y} = (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{y}) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Θεωρώντας διαστάσεις, προκύπτει τότε ότι:*

$$\mathbf{r}(f+g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f+g) \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \ =$$

$$= \ \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(g) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(g) \ = \ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$$

Επομένως:

$$\mathbf{r}(f+g) \ \leq \ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \tag{†}$$

Επειδή $f = (f+g) + (-g)$, εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα για τις απεικονίσεις $f+g$ και $-g$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι, σύμφωνα με το μέρος (1), $\mathbf{r}(g) = \mathbf{r}(-g)$, θα έχουμε:

$$\mathbf{r}(f) \ = \ \mathbf{r}\big((f+g) + (-g)\big) \ \leq \ \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(g) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g) \ \leq \ \mathbf{r}(f+g)$$

Παρόμοια, χρησιμοποιώντας ότι $g = (f+g) + (-f)$ και $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(-f)$, θα έχουμε:

$$\mathbf{r}(g) \ = \ \mathbf{r}\big((f+g) + (-f)\big) \ \leq \ \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(f) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{r}(g) - \mathbf{r}(f) \ \leq \ \mathbf{r}(f+g)$$

Συνοψίζοντας δείξαμε ότι

$$|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \ \leq \ \mathbf{r}(f+g) \tag{††}$$

Από τις σχέσεις (†) και (††) προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκηση 24. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ και $g\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι:*

(1) $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(g)$.

(2)
$$\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \big(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)\big)$$

Ιδιαίτερα: $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(f)$.

(3)
$$\mathbf{r}(g \circ f) \ \leq \ \min\big\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)\big\}$$

(4) *Αν η g είναι μονομορφισμός, τότε:* $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g \circ f)$.

(5) *Αν η f είναι επιμορφισμός, τότε:* $\mathbf{r}(g) = \mathbf{r}(g \circ f)$.

Λύση. (1) *Ισχύει ότι $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$. Πράγματι, έστω $\vec{y} \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $(g \circ f)(\vec{x}) = \vec{y}$, δηλαδή $\vec{y} = g(f(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(g)$. Άρα πράγματι $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$. Θεωρώντας διαστάσεις, έχουμε:*

$$\mathbf{r}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(g \circ f) \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(g) = \mathbf{r}(g)$$

(2) *Από τις θεμελιώδη Εξίσωση Διαστλασεων για τις γραμμικές απεικονίσεις f και $g\circ f$, έχουμε:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) + \mathbf{r}(f) \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(g\circ f) + \mathbf{r}(g\circ f)$$

Επομένως:

$$\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g\circ f) = -\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(g\circ f) \tag{$\dagger$}$$

Αν $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$, τότε $g(f\vec{x})) = \vec{0}$ και άρα $f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}(g)$. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε γραμμική απεικόνιση

$$f' \colon \operatorname{Ker}(g\circ f) \longrightarrow \operatorname{Ker}(g), \quad f'(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Θα δείξουμε ότι:

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f') \quad \text{και} \quad \operatorname{Im}(f') = \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$$

(α') *Αν $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$, τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και άρα $g(f(\vec{x})) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$. Έτσι $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(g\circ f)$. Αν $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f')$, τότε $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$ και $f'(\vec{x}) = f(\vec{x}) = \vec{0}$. Δηλαδή $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$ και άρα $\operatorname{Ker}(f') \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Αντίστροφα, αν $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$, τότε $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$ και $f(\vec{x}) = f'(\vec{x}) = \vec{0}$. Δηλαδή $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f')$ και άρα $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f')$. Συμπεραίνουμε ότι: $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f')$.*

(β') *Έστω $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f')$. Τότε υπ0άρχει $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$ έτσι ώστε $f'(\vec{x}) = \vec{y}$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{y}$ και άρα $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f)$. Επιπλέον $\vec{0} = g(f(\vec{x})) = g(\vec{y})$, και άρα $\vec{y} \in \operatorname{Ker}(g)$. Επομένως $\operatorname{Im}(f') \subseteq \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$. Αντίστροφα, αν $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$, τότε $g(\vec{y}) = \vec{0}$ και υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Τότε $g(f(\vec{x})) = g(\vec{y}) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$, και επομένως $f(\vec{x}) = f'(\vec{x}) = \vec{y} \in \operatorname{Im}(f')$. Έτσι $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) \subseteq \operatorname{Im}(f')$ και επομένως συμπεραίνουμε ότι: $\operatorname{Im}(f') = \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$.*

Από τη Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για την f':

$$\operatorname{Ker}(g\circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f') + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f') \implies \operatorname{Ker}(g\circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \big(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)\big)$$

$$\implies -\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(g\circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \big(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)\big) \tag{$\dagger\dagger$}$$

Από τις σχέσεις ($\dagger$) και ($\dagger\dagger$), έπεται ότι: $\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g\circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \big(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)\big)$. Ιδιαίτερα, έπεται ότι $\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g\circ f) \geq 0$, δηλαδή $\mathbf{r}(g\circ f) \leq \mathbf{r}(f)$.

(3) *Από τα μέρη (1) και (2), έπεται ότι: $\mathbf{r}(g\circ f) \leq \min\big\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)\big\}$.*

(4) *Αν η g είναι μονομορφισμός, τότε $\operatorname{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$, και άρα $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$. Προφανώς τότε $0 = \dim_{\mathbb{K}} \big(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)\big) = \mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g\circ f)$, δηλαδή $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g\circ f)$.*

(5) *Αν η f είναι επιμορφισμός, τότε $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{F}$ και επομένως $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(g)$. Ιδιαίτερα θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f) = \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ και $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(g)$. Από τη σχέση του μέρους (2) προκύπτει ότι:*

$$\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g\circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} - \mathbf{r}(g) \implies \mathbf{r}(g\circ f) = \mathbf{r}(g)$$

Άσκηση 25. *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $f^2 = 0$. Να δειχθούν τα ακόλουθα:*

(1) $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.

(2) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \leq 2\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f)$.

(3) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 2\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f)$ *αν και μόνον αν* $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.

(4) *Αν η διάσταση του $\mathcal{E}$ είναι περιττός αριθμός, τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.*

(5) *Δεν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathsf{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $(\Sigma) :\ AX = 0$ να είναι το*

$$\Lambda(\Sigma) = \big\{AX \in \mathbb{K}_{2n+1} \mid X \in \mathbb{K}_{2n+1}\big\}$$

Λύση. (1) *Επειδή $f^2 = 0$, δηλαδή $f\circ f = 0$, έπεται ότι $(f\circ f)(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $f(f(\vec{x})) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$. Αυτό σημαίνει ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}(f)$. Αν τώρα $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f)$, τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $\vec{y} = f(\vec{x})$, και άρα $\vec{y} \in \operatorname{Ker}(f)$. Επομένως $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.*

(2) *Από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για την f, έχουμε:* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$. *Επειδή από το μέρος* (1) *έχουμε* $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, *προκύπτει ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$. *Άρα:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) \ \leq\ \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = 2\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \ \geq\ \frac{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}}{2}$$

(3) (α΄) *Αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \ =\ \dfrac{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}}{2}$, *τότε από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για την f, έχουμε:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = 2\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$$

Τότε:

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \\ \mathrm{Im}(f) : \textit{υπόχωρος του } \mathrm{Ker}(f) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$$

(β΄) *Αν* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$, *τότε προφανώς* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$ *και τότε από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων προκύπτει ότι:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = 2\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \ =\ \frac{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}}{2}$$

(4) *Αν η διάσταση του $\mathcal{E}$ είναι περιττή και υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$, *τότε* $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$ *έχουμε* $f(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(f)$ *και επομένως,* $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $f(f(\vec{x})) = \vec{0}$. *Αυτό σημαίνει ότι* $f^2 = 0$, *και τότε από το μέρος* (3) *προκύπτει ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 2\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$ *και αυτό είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γραμμική απεικόνιση.*

(5) *Θεωρούμε τη γραμμική αεπικόνιση*

$$f_A \colon \mathbb{K}_{2n+1} \longrightarrow \mathbb{K}_{2n+1}, \quad f_A(X) = AX$$

Προφανώς

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \Lambda(\Sigma) \qquad \textit{και} \qquad \mathrm{Im}(f_A) = \big\{ AX \in \mathbb{K}_{2n+1} \mid X \in \mathbb{K}_{2n+1} \big\}$$

και τότε το συμπέρασμα προκύπτει από το μέρος (4) *διότι η διάσταση* $2n+1$ *του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{K}_{2n+1}$ *είναι περιττός αριθμός.*

Άσκηση 26. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σωματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
(2) $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^2)$.
(3) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
(4) $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^2)$.
(5) $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
(6) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}$.

Αν ισχύει μια από τις παραπάνω ισοδύναμες συνθήκες, τότε:

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

Λύση. *Δείχνουμε πρώτα ότι:*

$$\mathrm{Im}(f^2) \subseteq \mathrm{Im}(f) \qquad \textit{και} \qquad \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2) \tag{$\dagger$}$$

Πράγματι, αν $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f^2)$, *τότε υπάρχει* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:* $\vec{y} = f^2(\vec{x})$. *Επειδή* $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) \in \mathrm{Im}(f)$, *έχουμε ότι* $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$ *και επομένως:* $\mathrm{Im}(f^2) \subseteq \mathrm{Im}(f)$. *Παρόμοια, έστω* $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ *και άρα* $f(\vec{x}) = \vec{0}$. *Τότε* $f(f(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, *και άρα* $f^2(\vec{x}) = \vec{0}$, *δηλαδή* $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f^2)$. *Αυτό σημαίνει ότι* $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2)$.

(i) *(1)* $\Longleftrightarrow$ *(2) Προφανώς αν* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, *τότε* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^2)$.
Αντίστροφα, έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^2)$. *Επειδή, από τη σχέση* $(\dagger)$, *ο* $\mathrm{Im}(f^2)$ *είναι υπόχωρος του* $\mathrm{Im}(f)$ *προκύπτει ότι* $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.

(ii) *(3)* $\Longleftrightarrow$ *(4) Παρόμοια, αν* $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, *τότε* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^2)$.
Αντίστροφα, αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^2)$, *τότε επειδή ο* $\mathrm{Ker}(f)$ *είναι υπόχωρος του* $\mathrm{Ker}(f^2)$, *θα έχουμε ότι:* $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2$.

(iii) *(2) $\Longleftrightarrow$ (4) Θεωρούμε τις Θεμελιώδεις Εξισώσεις Διαστάσεων για τις γραμμικές απεικονίσεις f και f^2:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$$

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^2) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^2)$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f^2) \;=\; \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^2) - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει άμεσα ότι η συνθήκη (2) είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη (4).

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι οι τέσσερις πρώτες συνθήκες είναι ισοδύναμες.

(v) *(3) $\Longleftrightarrow$ (6) Έστω ότι $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}$, και έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f^2)$, και άρα $f^2(\vec{x}) = \vec{0}$. Τότε $f(f(\vec{x})) = \vec{0}$ και άρα $f(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(f)$. Επειδή προφανώς $f(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f)$, έπεται ότι $f(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}$. Άρα $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και αυτό σημαίνει ότι $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Έτσι δείξαμε ότι $\mathrm{Ker}(f^2) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ και επομένως από την $(\dagger)$ προκύπτει ότι $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.*

Αντίστροφα, έστω ότι $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, και έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $\vec{x} = f(\vec{y})$. Τότε: $\vec{0} = f(\vec{x}) = f(f(\vec{y}))$ και άρα $\vec{y} \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Επειδή $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, προκύπτει ότι $\vec{y} \in \mathrm{Ker}(f)$, δηλαδή $\vec{x} = f(\vec{y}) = \vec{0}$. Άρα $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}$.

(iv) *(1) $\Longleftrightarrow$ (5) Υποθέτουμε ότι: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε $f(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f)$ και τότε $f(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f^2)$. Επομένως υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f^2(\vec{y}) = f(\vec{x})$. Τότε:*

$$f^2(\vec{y}) = f(\vec{x}) \quad \Longrightarrow \quad f^2(\vec{y}) - f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad f\big(f(\vec{y}) - \vec{x}\big) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{y}) - \vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$$

Θέτοντας $\vec{z} = f(\vec{y}) - \vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, έπεται ότι:

$$\vec{x} = \vec{z} + f(\vec{y}), \quad \text{όπου} \quad \vec{z} \in \mathrm{Ker}(f) \;\; \text{και} \;\; f(\vec{y}) \in \mathrm{Im}(f)$$

Έτσι δείξαμε ότι κάθε διάνυσμα του $\mathcal{E}$ γράφεται ως άθροισμα ενός διανύσματος του $\mathrm{Ker}(f)$ και ενός διανύσματος του $\mathrm{Im}(f)$. Επομένως: $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

Αντίστροφα, έστω $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ και έστω $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$. Τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $\vec{y} = f(\vec{x})$. Επειδή $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$, έπεται ότι υπάρχουν διανύσματα $\vec{z} \in \mathrm{Ker}(f)$ και $\vec{w} \in \mathrm{Im}(f)$, και άρα $\vec{w} = f(\vec{\omega})$ για κάποιο διάνυσμα $\vec{\omega} \in \mathcal{E}$, έτσι ώστε: $\vec{x} = \vec{z} + f(\vec{\omega})$. Τότε $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{z}) + f(f(\vec{\omega})) = f^2(\vec{\omega}) \in \mathrm{Im}(f^2)$. Επομένως $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f^2)$ και τότε, λόγω της $(\dagger)$, έχουμε: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Αν μία από τις ισοδύναμες συνθήκες (1)-(6) είναι αληθής, τότε από τις (5) και (6) προκύπτει ότι:

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

Παρατήρηση. (1) *Τετριμμένο παράδειγμα απεικονίσεων οι οποίες ικανοποιούν τις ισοδύναμες συνθήκες της Άσκησης 26 είναι οι απεικονίσεις $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f^2 = f$. Αυτές οι απεικονίσεις καλούνται* **προβολές**. *Αν η απεικόνιση f είναι προβολή, τότε και η απεικόνιση $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f$ είναι προβολή, και ισχύει:*

$$\mathrm{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \mathrm{Im}(f) \quad \text{και} \quad \mathrm{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \mathrm{Ker}(f)$$

Αν $m \leq n$, τότε η απεικόνιση

$$f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

είναι προβολή. Τα παραπάνω να δειχθούν σαν Άσκηση.

(2) *Προσεκτική παρατήρηση της απόδειξης της παραπάνω Άσκησης δείχνει ότι αν εξαιρέσουμε τις συνθήκες (2) και (4), τότε το συμπέρασμα της Άσκησης 26 ισχύει και για διανυσματικούς χώρους άπειρης διάστασης.*

Άσκηση 27. *Έστω $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικόνισεις, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σωματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$f \circ g = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

Ισχύει το συμπέρασμα αν ο διανυσματικός χώρος έχει άπειρη διάσταση;

Λύση. *Έστω* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$ *και έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$g(\mathcal{B}) = \{g(\vec{e}_1), g(\vec{e}_2), \cdots, g(\vec{e}_n)\}$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $g(\mathcal{B})$ *είναι μια βάση του* $\mathcal{E}$.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *και έστω* $\lambda_1 g(\vec{e}_1) + \lambda_2 g(\vec{e}_2) + \cdots + \lambda_n g(\vec{e}_n) = \vec{0}$. *Εφαρμόζοντας τη γραμμική απεικόνιση* f *και χρησιμοποιώντας ότι* $f \circ g = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, *έχουμε:*

$$\lambda_1 g(\vec{e}_1) + \lambda_2 g(\vec{e}_2) + \cdots + \lambda_n g(\vec{e}_n) = \vec{0} \implies f\big(\lambda_1 g(\vec{e}_1) + \lambda_2 g(\vec{e}_2) + \cdots + \lambda_n g(\vec{e}_n)\big) = f(\vec{0}) \implies$$

$$\implies \lambda_1 f(g(\vec{e}_1)) + \lambda_2 f(g(\vec{e}_2)) + \cdots + \lambda_n f(g(\vec{e}_n)) = \vec{0} \implies \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0} \implies$$

$$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Άρα το σύνολο $g(\mathcal{B})$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επειδή* $|g(\mathcal{B})| = n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$, *έπεται ότι το σύνολο* $g(\mathcal{B})$ *είναι βάση του* $\mathcal{E}$.

Ιδιαίτερα αυτό σημαίνει ότι η γραμμική απεικόνιση g *στέλνει βάσεις σε βάσεις και άρα από την Άσκηση 11 έπεται ότι η* g *είναι ισομορφισμός, δηλαδή υπάρχει η αντίτροφή της γραμμική απεικόνιση* $g^{-1} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. *Τότε*

$$f \circ g = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \implies (f \circ g) \circ g^{-1} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \circ g^{-1} \implies f \circ (g \circ g^{-1}) = g^{-1} \implies f \circ \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = g^{-1} \implies f = g^{-1}$$

και άρα: $g \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

<u>Διαφορετικά</u>: *(Χωρίς τη χρήση της Άσκησης 11) Έστω* $\vec{y} \in \mathcal{E}$. *Επειδή το σύνολο* $g(\mathcal{B})$ *είναι βάση του* $\mathcal{E}$, *έπεται ότι υπάρχουν* $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n \in \mathbb{K}$ *έτσι ώστε:* $\vec{y} = \kappa_1 g(\vec{e}_1) + \kappa_2 g(\vec{e}_2) + \cdots + \kappa_n g(\vec{e}_n)$ *και τότε:*

$$\vec{y} = \kappa_1 g(\vec{e}_1) + \kappa_2 g(\vec{e}_2) + \cdots + \kappa_n g(\vec{e}_n) = g(\kappa_1 \vec{e}_1 + \kappa_2 \vec{e}_2 + \cdots + \kappa_n \vec{e}_n)$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση g *είναι «επί». Αν* $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(g)$, *τότε* $g(\vec{x}) = \vec{0}$ *και θα έχουμε:*

$$g(\vec{x}) = \vec{0} \implies f(g(\vec{x})) = f(\vec{0}) \implies (f \circ g)(\vec{x}) = \vec{0} \implies \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0}$$

Άρα $\operatorname{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$ *και αυτό σημαίνει ότι η* g *είναι ισομορφισμός. Τότε όπως και παραπάνω* $f = g^{-1}$ *και επομένως* $g \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

Θεωρούμε τον $\mathbb{K}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ *των ακολουθιών με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{A}(\mathbb{K}) = \{\mathsf{a} = (a_n)_{n \geq 0} \mid a_n \in \mathbb{K},\ \forall n \geq 0\}$$

όπου οι πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται ως εξής, $\forall \mathsf{a} = (a_n)_{n\geq 0}, \mathsf{b} = (b_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} = \mathsf{c}, \quad \text{όπου} \quad \mathsf{c} = (c_n)_{n \geq 0}, \quad \text{και} \quad c_n = a_n + b_n,\ \forall n \geq 0$$

$$\lambda \cdot \mathsf{a} = \mathsf{c}, \quad \text{όπου} \quad \mathsf{c} = (c_n)_{n \geq 0}, \quad \text{και} \quad c_n = \lambda a_n,\ \forall n \geq 0$$

Ο $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ *έχει άπειρη διάσταση. Πράγματι, αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$, *τότε κάθε σύνολο διανυσμάτων του* $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ *με περισσότερα από* n *το πλήθος στοιχεία οφείλει να είναι γραμμικά εξαρτημένο. Όμως το σύνολο των* $n+1$ *το πλήθος ακολουθιών:*

$$\mathsf{a}_0 = (1,0,0,\cdots,0,\cdots),\ \ \mathsf{a}_1 = (0,1,0,\cdots,0,\cdots),\ \ \mathsf{a}_2 = (0,0,1,\cdots,0,\cdots),\ \ \cdots,\ \ \mathsf{a}_n = (0,0,0,\cdots,1,\cdots)$$

δηλαδή κάθε στοιχείο της ακολουθίας a_k *έχει το* 1 *στην* k *θέση και παντού αλλού μηδέν,* $0 \leq k \leq n$, *είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}(\mathbb{K}) = \infty$.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις:

$$g \colon \mathcal{A}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{K}), \quad g(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (0, a_0, a_1, a_2, \cdots)$$

$$f \colon \mathcal{A}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{K}), \quad f(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

οι οποίες εύκολα βλέπουμε ότι είναι γραμμικές. Τότε, $\forall \mathsf{a} = (a_0, a_1, a_2, \cdots) \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$:

$$(f \circ g)(a_0, a_1, a_2, \cdots) = f\big(g(a_0, a_1, a_2, \cdots)\big) = f(0, a_0, a_1, a_2, \cdots) = (a_0, a_1, a_2, \cdots) \implies f \circ g = \mathsf{Id}_{\mathcal{A}(\mathbb{K})}$$

$$(g \circ f)(a_0, a_1, a_2, \cdots) = g\big(f(a_0, a_1, a_2, \cdots)\big) = g(a_1, a_2, a_3, \cdots) = (0, a_1, a_2, a_3, \cdots) \implies g \circ f \neq \mathsf{Id}_{\mathcal{A}(\mathbb{K})}$$

Επομένως το συμπέρασμα του πρώτου μέρους της Άσκησης δεν ισχύει για διανυσματικούς χώρους άπειρης διάστασης.

Το αποτέλεσμα της επόμενης άσκησης μας είναι γνωστό από τη θεωρία πινάκων και οριζουσών. Εδώ ζητείται να αποδειχθεί ο ισχυρισμός με χρήση γραμμικών απεικονίσεων.

Άσκηση 28. *Θεωρούμε δύο $n \times n$ πίνακες A και B με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί, με χρήση γραμμικών απεικονίσεων, ότι:*

$$A\,B = I_n \quad \Longrightarrow \quad B\,A = I_n$$

Λύση. *Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις*

$$f_A \colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = AX \qquad \text{και} \qquad f_B \colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_B(X) = BX$$

Χρησιμοποιώντας ότι $AB = I_n$, θα έχουμε:

$$\forall X \in \mathbb{K}_n : \quad (f_A \circ f_B)(X) = f_A(f_B)(X)) = f_A(BX) = A(BX) = (AB)X = I_nX = X \quad \Longrightarrow \quad f_A \circ f_B = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$$

Από την Άσκηση 27 έπεται ότι $f_B \circ f_A = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$. Επομένως η γραμμική απεικόνιση f_A είναι ισομορφισμός με αντίστροφη την f_B. Επειδή προφανώς

$$f_A \circ f_B = f_{AB} \qquad \text{και} \qquad f_B \circ f_A = f_{BA} \tag{†}$$

θα έχουμε

$$f_{AB} = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n} = f_{BA}$$

Έστω $\mathcal{B} = \{E_1,\ E_2, \cdots, E_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{K}_n$, δηλαδή $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Επειδή

$$\forall C \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) : \quad f_C(E_i) = CE_i = \text{ η } i\text{-στήλη του πίνακα } C$$

από τη σχέση (†) θα έχουμε, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$:

$$f_{BA} = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n} \quad \Longrightarrow \quad f_{BA}(E_i) = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}(E_i) \quad \Longrightarrow \quad (BA)E_i = \text{ η } i\text{-στήλη του πίνακα } I_n \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \text{η } i\text{-στήλη του πίνακα } BA = \text{ η } i\text{-στήλη του πίνακα } I_n$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες BA και I_n είναι ίσοι: $BA = I_n$.

Άσκηση 29. *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων πεπερασμενης διάστασης. Να δειχθούν τα εξής:*

(1) *Η f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$g \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

(2) *Η f είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $h \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$f \circ h = \mathsf{Id}_{\mathcal{F}}$$

Λύση. *(1) "$\Longleftarrow$" Έστω ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $g \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. Αν $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε θα έχουμε:*

$$\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}) \quad \Longrightarrow \quad (g \circ f)(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$$

Επομένως $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ και άρα η γραμμική απεικόνιση f είναι μονομορφισμός.

"$\Longrightarrow$" Υποθέτουμε ότι η f είναι μονομορφισμός. Έστω $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_r\}$ μια βάση της εικόνας $\mathrm{Im}(f)$, την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \cdots, \vec{e}_m\}$ του $\mathcal{F}$. Θέτουμε $\mathcal{V} = \langle \vec{e}_{r+1}, \vec{e}_{r+2}, \cdots, \vec{e}_m \rangle$, θα έχουμε προφανώς:

$$\mathcal{F} = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathcal{V}$$

Επομένως κάθε διάνυσμα $\vec{y} \in \mathcal{F}$ γράφεται μοναδικά ως

$$\vec{y} = f(\vec{x}) + \vec{v}, \qquad \text{όπου} \quad \vec{x} \in \mathcal{E} \ \ \& \ \ \vec{v} \in \mathcal{V}$$

Επειδή η f είναι μονομορφισμός, έπεται ότι το διάνυσμα $\vec{x}$ στην παραπάνω σχέση είναι μοναδικό. Πράγματι αν

$$\vec{y} = f(\vec{x}) + \vec{v} = f(\vec{x}\,') + \vec{v}\,', \quad \text{όπου} \quad \vec{x}, \vec{x}\,' \in \mathcal{E} \ \& \ \vec{v}, \vec{v}\,' \in \mathcal{V}$$

τότε θα έχουμε

$$\vec{v} = \vec{v}\,' \ \ \& \ \ f(\vec{x}) = f(\vec{x}\,') \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{x}\,'$$

Τότε μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση

$$g \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad g(\vec{y}) = \text{ το μοναδικό διάνυσμα } \vec{x} \in \mathcal{E} \text{ έτσι ώστε } \vec{y} = f(\vec{x}) + \vec{v}, \quad \text{όπου} \quad \vec{x} \in \mathcal{E} \ \& \ \vec{v} \in \mathcal{V}$$

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση g είναι γραμμική: έστω $\vec{y}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathcal{F}$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε θα έχουμε ότι υπάρχουν $\vec{x}, \vec{x}\,', \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{E}$ και $\vec{v}, \vec{v}\,', \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε:

$$\vec{y}_1 = f(\vec{x}_1) + \vec{v}_1, \quad \vec{y}_2 = f(\vec{x}_2) + \vec{v}_2, \quad \vec{y}_1 + \vec{y}_2 = f(\vec{x}) + \vec{v}, \quad \lambda\vec{y} = f(\vec{x}\,') + \vec{v}\,'$$

Τότε εξ' ορισμού θα έχουμε:

$$g(\vec{y}_1) = \vec{x}_1, \quad g(\vec{y}_2) = \vec{x}_2, \quad g(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x}, \quad g(\lambda\vec{y}) = \vec{x}\,'$$

και τότε:

$$g(\vec{y}_1) + g(\vec{y}_2) = x_1 + x_2 \quad \text{και} \quad \lambda g(\vec{y}) = \lambda\vec{x}$$

Επομένως για να είναι η g γραμμική θα πρέπει να ισχύει ότι: $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}$ και $\lambda\vec{x} = \vec{x}\,'$. Θα έχουμε

$$\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \begin{cases} f(\vec{x}) + \vec{v} \\ f(\vec{x}_1) + \vec{v}_1 + f(\vec{x}_2 + \vec{v}_2 = f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}, \quad \text{όπου} \quad \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} \ \& \ \vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{E}$$

Επειδή έχουμε ένα ευθύ άθροισμα $\mathcal{F} = \operatorname{Im}(f) \oplus \mathcal{V}$, από την μοναδικότητα της γραφής έπεται ότι $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$ και επομένως, επειδή η f είναι μονονομορφισμός, θα έχουμε ότι $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Παρόμοια:

$$\lambda\vec{y} = \begin{cases} f(\vec{x}\,') + \vec{v}\,' \\ \lambda f(\vec{x}) + \lambda\vec{v} = f(\lambda\vec{x}) + \lambda\vec{v}, \quad \text{όπου} \quad \vec{v}, \vec{v}\,' \in \mathcal{V} \ \& \ \vec{x}, \vec{x}\,' \in \mathcal{E} \end{cases}$$

Επειδή έχουμε ένα ευθύ άθροισμα $\mathcal{F} = \operatorname{Im}(f) \oplus \mathcal{V}$, από την μοναδικότητα της γραφής έπεται ότι $f(\lambda\vec{x}) = f(\vec{x}\,')$ και επομένως, επειδή η f είναι μονονομορφισμός, θα έχουμε ότι $\vec{x}\,' = \lambda\vec{x}$. Άρα $g(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = g(\vec{y}_1) + g(\vec{y}_2)$ και $g(\lambda\vec{y}) = \lambda g(\vec{y})$, και επομένως η απεικόνιση g είναι γραμμική.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ και θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{y} = f(\vec{x})$, δηλαδή έχουμε $\vec{v} = \vec{0}$. Τότε από τον ορισμό της g έπεται ότι $g(\vec{y}) = g(f(\vec{x})) = \vec{x}$. Αυτό σημαίνει ότι $g \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

(2) "$\Longleftarrow$" Έστω ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $h \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f \circ h = \mathsf{Id}_{\mathcal{F}}$. Τότε για κάθε $\vec{y} \in \mathcal{F}$, θα έχουμε:

$$\vec{y} = \mathsf{Id}_{\mathcal{F}}(\vec{y}) = (f \circ h)(\vec{y}) = f(h(\vec{y}))$$

Αυτό σημαίνει ότι $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{F}$ και άρα η f είναι επιμορφισμός.

"$\Longrightarrow$" Υποθέτουμε ότι η f είναι επιμορφισμός. Έστω $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του πυρήνα$\operatorname{Ker}(f)$, την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$. Θέτουμε $\mathcal{U} = \langle\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\rangle$, θα έχουμε προφανώς:

$$\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \mathcal{U}$$

Επομένως κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται μοναδικά ως

$$\vec{x} = \vec{z} + \vec{u}, \quad \text{όπου} \quad \vec{z} \in \operatorname{Ker}(f) \ \& \ \vec{u} \in \mathcal{U}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f' \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}, \quad f'(\vec{u}) = f(\vec{u})$$

η οποία είναι προφανώς γραμμική. Τότε η f' είναι επιμορφισμός διότι αν $\vec{y} \in \mathcal{F}$, τότε, επειδή η f είναι επιμορφισμός, υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Όμως $\vec{x} = \vec{z} + \vec{u}$, όπου $\vec{z} \in \operatorname{Ker}(f)$ και $\vec{u} \in \mathcal{U}$, και επομένως

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{z} + \vec{u}) = f(\vec{z}) + f(\vec{u}) = f'(\vec{u})$$

Άρα πράγματι η f' είναι επιμορφισμός. Αν $\vec{u} \in \mathcal{U}$ και $f'(\vec{u}) = \vec{0}$, τότε $f(\vec{u}) = \vec{0}$ και άρα $\vec{u} \in \operatorname{Ker}(f) \cap \mathcal{U}$. Επειδή έχουμε το ευθύ άθροισμα $\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \mathcal{U}$, έπεται ότι $\operatorname{Ker}(f) \cap \mathcal{U} = \{\vec{0}\}$, και άρα $\vec{u} = \vec{0}$. Επομένως η γραμμική απεικόνιση f' είναι και μονομορφισμός, δηλαδή η f' είναι ισομορφισμός. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\vec{y} \in \mathcal{F}$, υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{y} \in \mathcal{U}$ έτσι ώστε $f'(\vec{u}) = f(\vec{u}) = \vec{y}$.

Τότε μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση

$$h\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad h(\vec{y}) = \text{ το μοναδικό διάνυσμα } \vec{u} \in \mathcal{E} \text{ έτσι ώστε } \vec{y} = f(\vec{u}), \quad \text{όπου } \vec{u} \in \mathcal{U}$$

Αν $\vec{y} \in \mathcal{F}$, *και* $h(\vec{y}) = \vec{u}$, *όπου* $f(\vec{u}) = \vec{y}$, *τότε* $(f \circ h)(\vec{y}) = f(h(\vec{y})) = f(\vec{u}) = \vec{y}$. *Επομένως* $f \circ h = \mathsf{Id}_{\mathcal{F}}$. *Μένει να δείξουμε ότη απεικόνιση* h *είναι γραμμική. Αυτό προκύπτει ως εξής: η απεικόνιση* f' *είναι προφανώς η σύνθεση της κανονικής έγκλεισης* $\iota\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E}$, $\iota(\vec{u}) = \vec{u}$, *και της* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, *δηλαδή* $f' = f \circ \iota$. *Επειδή η* f' *είναι ισομορφισμός, η αντίστροφή της* $(f')^{-1} = (f \circ \iota)^{-1}\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{U}$ *είναι επίσης ισομορφισμός και ιδιαίτερα είναι γραμμική. Προφανώς θα έχουμε ότι η* h *είναι σύνθεση του ισομορφισμού* $(f')^{-1} = (f \circ \iota)^{-1}\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{U}$ *και της κανονικής έγκλεισης* $\iota\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E}$, *δηλαδή* $h = \iota \circ (\iota \circ f)^{-1}\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$, *και η* h *είναι γραμμική ως συνθεση γραμμικών απεικονίσεων.*

Άσκηση 30. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *και θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f_A\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_m, \quad f_A(X) = AX$$

Να δειχθεί ότι:

(1) $\mathbf{r}(A) = n$ *αν και μόνον αν η* f_A *είναι μονομορφισμός.*
(2) $\mathbf{r}(A) = m$ *αν και μόνον αν η* f_A *είναι επιμορφισμός.*
(3) $\mathbf{r}(A) = n$ *αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας* $B \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:* $BA = I_n$.
(4) $\mathbf{r}(A) = m$ *αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας* $C \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:* $AC = I_m$.

Λύση. *Υπενθυμίζουμε τη θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων για τη γραμμική απεικόνιση* f_A *και χρησιμοποιούμε ότι:* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f_A) = \mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(A)$:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f_A) + \mathbf{r}(f_A) \quad \Longrightarrow \quad n = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f_A) + \mathbf{r}(A) \qquad (*)$$

(1) *Αν* $\mathbf{r}(A) = n$, *τότε από την* $(*)$ *προκύτει ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f_A) = 0$, *δηλαδή* $\mathrm{Ker}(f_A) = \{\vec{0}\}$ *και επομένως η* f_A *είναι μονομορφισμός. Αντίστροφα, αν η* f_A *είναι μονομορφισμός, τότε* $\mathrm{Ker}(f_A) = \{\vec{0}\}$ *και άρα* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f_A) = 0$. *Από την* $(*)$ *έπεται τότε ότι* $\mathbf{r}(A) = n$.

(2) *Αν* $\mathbf{r}(A) = m$, *τότε* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f_A) = \mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(A) = m$ *και επειδή η* $\mathrm{Im}(f_A)$ *είναι υπόχωρος του* $\mathbb{K}_m$, *έπεται ότι* $\mathrm{Im}(f_A) = \mathbb{K}_m$ *και άρα η* f_A *είναι επιμορφισμός. Αντίστροφα, αν η* f_A *είναι επιμορφισμός, τότε* $\mathrm{Im}(f_A) = \mathbb{K}_m$ *και επομένως* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f_A) = \mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(A) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_m = m$.

(3) *Σύμφωνα με την Άσκηση 29, η γραμμική απεικόνιση* f_A *είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση* $g\colon \mathbb{K}_m \longrightarrow \mathbb{K}_n$ *έτσι ώστε* $g \circ f_A = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$. *Έστω ότι η τελευταία σχέση ισχύει. Επειδή κάθε γραμμική απεικόνιση* $g\colon \mathbb{K}_m \longrightarrow \mathbb{K}_n$ *είναι της μορφής* $g = f_B$ *για κατάλληλο* $n \times m$ *πίνακα* B, *θα έχουμε:* $f_B \circ f_A = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$. *Επειδή προφανώς* $f_B \circ f_A = f_{BA}$, *θα έχουμε* $f_{BA} = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$, *δηλαδή* $f_{BA}(X) = X, \forall X \in \mathbb{K}_n$. *Επειδή*

$$\forall C \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) : \quad f_C(E_i) = CE_i = \text{ η } i\text{-στήλη του πίνακα } C$$

θα έχουμε ότι η i*-στήλη του* BA *είναι ίση με τη* i*-στήλη του* I_n, *και επομένως θα έχουμε* $BA = I_n$. *Αντίστροφα, αν υπάρχει* $n \times m$ *πίνακας* B *έτσι ώστε* $BA = I_n$, *τότε θα έχουμε* $f_B \circ f_A = f_{BA} = f_{I_n} = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$. *Επομένως δείξαμε ότι: η γραμμική απεικόνιση* f_A *είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει* $n \times m$ *πίνακας* B *έτσι ώστε* $BA = I_n$. *Από το μέρος* (1) *τότε προκύπτει ότι:* $\mathbf{r}(A) = n$ *αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας* $B \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:* $BA = I_n$.

(4) *Σύμφωνα με την Άσκηση 29, η γραμμική απεικόνιση* f_A *είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση* $h\colon \mathbb{K}_m \longrightarrow \mathbb{K}_n$ *έτσι ώστε* $f_A \circ h = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_m}$. *Έστω ότι η τελευταία σχέση ισχύει. Επειδή κάθε γραμμική απεικόνιση* $h\colon \mathbb{K}_m \longrightarrow \mathbb{K}_n$ *είναι της μορφής* $h = f_C$ *για κατάλληλο* $n \times m$ *πίνακα* C, *θα έχουμε:* $f_A \circ f_C = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_m}$. *Επειδή προφανώς* $f_A \circ f_C = f_{AC}$, *θα έχουμε* $f_{AC} = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_m}$, *δηλαδή* $f_{AC}(X) = X, \forall X \in \mathbb{K}_m$. *Επειδή*

$$\forall D \in \mathsf{M}_m(\mathbb{K}) : \quad f_D(E_i) = DE_i = \text{ η } i\text{-στήλη του πίνακα } D$$

θα έχουμε ότι η i*-στήλη του* AC *είναι ίση με τη* i*-στήλη του* I_m, *και επομένως θα έχουμε* $BA = I_n$. *Αντίστροφα, αν υπάρχει* $n \times m$ *πίνακας* B *έτσι ώστε* $BA = I_m$, *τότε θα έχουμε* $f_A \circ f_C = f_{AC} = f_{I_m} = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_m}$. *Επομένως δείξαμε ότι: η γραμμική απεικόνιση* f_A *είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει* $n \times m$ *πίνακας* C *έτσι ώστε* $AC = I_m$. *Από το μέρος* (2) *τότε προκύπτει ότι:* $\mathbf{r}(A) = m$ *αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας* $C \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:* $AC = I_m$.

Άσκηση 31. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.*

(1) *Να δειχθεί ότι κάθε μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μονομορφισμός.*
(2) *Να δειχθεί ότι κάθε μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι επιμορφισμός.*

Λύση. *Χρησιμοποιούμε ότι ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}$ έχει ακριβώς δύο υπόχωρους: τον μηδενικό υπόχωρο $\{0\}$ και τον εαυτό του $\mathbb{K}$.*

(1) *Επειδή η γραμμική απεικόνιση f είναι μη-μηδενική, έπεται ότι υπάρχει ένα στοιχείο $k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε $f(k) \neq \vec{0}$. Αναγκαστικά τότε $k \neq 0$ (διότι $f(0) = \vec{0}$ λόγω γραμμικότητας) και $k \notin \operatorname{Ker}(f)$. Άρα $\operatorname{Ker}(f) \neq \mathbb{K}$. Επειδή ο πυρήνας της f είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}$, αναγκαστικά θα έχουμε $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, δηλαδή η απεικόνιση f είναι μονομορφισμός.*
(2) *Επειδή η γραμμική απεικόνιση f είναι μη-μηδενική, έπεται ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) \neq 0 = \vec{0}_{\mathbb{K}}$ και επομένως $\operatorname{Im}(f) \neq \{\vec{0}_{\mathbb{K}}\}$. Επειδή ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}$ έχει ως υπόχωρους μόνο τον μηδενικό υπόχωρο και τον εαυτό του, έπεται ότι $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{K}$, και αρα η f είναι επιμορφισμός.*

Άσκηση 32. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\phi\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ μια μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση. Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$\forall \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \in \mathcal{E}: \quad \phi(\vec{x}) = x_1$$

Λύση. *Επειδή η γραμμική απεικόνιση ϕ είναι μη-μηδενική, από την Άσκηση 31 έπεται ότι η απεικόνιση ϕ είναι επιμορφισμός, δηλαδή $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{K}$. Τότε από την εξίσωση διαστάσεων προκύπτει ότι $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\phi) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f) = n - 1$. Θεωρούμε μια βάση $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\operatorname{Ker}(f)$ την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B}' = \{\vec{\epsilon}, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$. Προφανώς $\phi(\vec{\epsilon} \neq 0$ διότι διαφορετικά θα είχαμε $\vec{\epsilon} \in \operatorname{Ker}(f)$ και το $\vec{\epsilon}$ θα ήταν γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\operatorname{Ker}(f)$ και αυτό είναι άτοπο διότι εκ κατασκευής το σύνολο $\mathcal{B}' = \{\vec{\epsilon}, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θέτουμε*

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\phi(\vec{\epsilon})}\,\vec{\epsilon}$$

Τότε

$$\phi(\vec{e}_1) = \phi\left(\frac{1}{\phi(\vec{\epsilon})}\,\vec{\epsilon}\right) = \frac{1}{\phi(\vec{\epsilon})}\,\phi(\vec{\epsilon}) = 1$$

Προφανώς το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Χρησιμοποιώντας ότι $\phi(\vec{e}_i) = 0$, $2 \leq i \leq n$ και $\phi(\vec{e}_1) = 1$, για κάθε διάνυσμα $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ θα έχουμε:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1\phi(\vec{e}_1) + x_2\phi(\vec{e}_2) + \cdots + x_n\phi(\vec{e}_n) = x_1$$

Άσκηση 33. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\varphi, \psi\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Αν $\operatorname{Ker}(\phi) = \operatorname{Ker}(\psi)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:*

$$\varphi = \lambda\psi$$

Λύση. *Αν η ϕ είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση, τότε $\operatorname{Ker}(\phi) = \mathcal{E}$ και άρα $\operatorname{Ker}(\psi) = \mathcal{E}$, δηλαδή και η ψ είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση. Τότε προφανώς θα έχουμε $\phi = \psi$ και μπορούμε να διαλέξουμε $\lambda = 1$.*

Έστω ότι η ϕ, άρα και η ψ, δεν είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση. Τότε από την Άσκηση 31 έπεται ότι οι ϕ και ψ είναι επιμορφισμοί και $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) = n - 1 = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\psi)$. Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-1}\}$ μια βάση του $\operatorname{Ker}(\phi) = \operatorname{Ker}(\psi)$, την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$. Τα διανύσματα $\phi(\vec{e}_n)$ και $\psi(\vec{e}_n)$ είναι μη-μηδενικά (διότι διαφορετικά θα ανήκαν στους πυρήνες των ϕ και ψ το οποίο είναι άτοπο εκ' κατασκευής). Θέτουμε

$$\lambda = \frac{\phi(\vec{e}_n)}{\psi(\vec{e}_n)}$$

Τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ θα έχουμε:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1\phi(\vec{e}_1) + x_2\phi(\vec{e}_2) + \cdots + x_n\phi(\vec{e}_n) = x_n\phi(\vec{e}_n)$$

$$\psi(\vec{x}) = \psi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1\psi(\vec{e}_1) + x_2\psi(\vec{e}_2) + \cdots + x_n\psi(\vec{e}_n) = x_n\psi(\vec{e}_n)$$

Επομένως, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\phi(\vec{x}) = x_n\phi(\vec{e}_n) = x_n\lambda\psi(\vec{e}_n) = \lambda x_n\psi(\vec{e}_n) = \lambda\psi(\vec{x})$$

Αυτό σημαίνει ότι $\phi = \lambda\psi$.

Άσκηση 34. *Έστω $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ δύο μη μηδενικές γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Ορίζουμε μια νέα απεικόνιση ως εξής:*

$$h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}^2, \quad \vec{x} \longmapsto h(\vec{x}) := \big(f(\vec{x}), g(\vec{x})\big)$$

Να δείξετε τα ακόλουθα:

(1) *Η απεικόνιση h είναι γραμμική.*
(2) $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.
(3) $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{K}^2$ *(δηλαδή η h είναι επιμορφισμός) αν και μόνον αν* $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathcal{E}$.
(4) *Η h είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν* $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

Λύση. *Από την Άσκηση 31, έπεται ότι κάθε μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι επιμορφισμός. Επειδή οι f, g είναι μη-μηδενικές, από το (1) έπεται ότι οι f, g είναι επιμορφισμοί. Έτσι $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K} = \mathrm{Im}(g)$ και άρα: $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = 1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(g)$. Από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για τις f και g θα έχουμε:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + 1 \qquad \textit{και} \qquad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(g) + 1$$

και επομένως αν θέσουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} := n$, θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = n - 1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(g) \tag{$*$}$$

(1) *Η απόδειξη ότι η h είναι γραμμική προκύπτει εύκολα από την γραμμικότητα των f και g. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε θα έχουμε:*

$$h(\vec{x}+\vec{y}) = \big(f(\vec{x}+\vec{y}), g(\vec{x}+\vec{y})\big) = \big(f(\vec{x})+f(\vec{y}), g(\vec{x})+g(\vec{y})\big) = \big(f(\vec{x}), g(\vec{x})\big) + \big(f(\vec{y}), g(\vec{y})\big) = h(\vec{x}) + h(\vec{y})$$

$$h(\lambda\vec{x}) = \big(f(\lambda\vec{x}), g(\lambda\vec{x})\big) = \big(\lambda f(\vec{x}), \lambda g(\vec{x})\big) = \lambda\big(f(\vec{x}), g(\vec{x})\big) = \lambda h(\vec{x})$$

(2) *Έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(h)$. Τότε $(f(\vec{x}), g(\vec{x})) = (0,0)$ και άρα $f(\vec{x}) = 0 = g(\vec{x})$. Επομένως προκύπτει ότι $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. Αντίστροφα είναι προφανές ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ ανήκει στον πυρήνα της h. Έτσι $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.*

(3) (α΄) ($\Longrightarrow$) *Έστω ότι η h είναι επιμορφισμός, δηλαδή $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{K}^2$. Τότε από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για την h, θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(h) + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^2$ και άρα $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(h) + 2$, δηλαδή:*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = n - 2 \tag{$**$}$$

Επίσης θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(g) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f) \bigcap \mathrm{Ker}(g)) \tag{$***$}$$

Επομένως

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)) = n - 1 + n - 1 - (n-2) = n$$

Επειδή ο υπόχωρος $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$ του $\mathcal{E}$ έχει ίδια διάσταση με τον $\mathcal{E}$, έπεται ότι: $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathcal{E}$.

(β΄) ($\Longleftarrow$) *Από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για την h, θα έχουμε $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(h) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(h)$ και άρα:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(h) = n - \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) \tag{$****$}$$

Από την υπόθεση ότι $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathcal{E}$, θα έχουμε $n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g))$. Άρα χρησιμοποιώντας την $(***)$ θα έχουμε

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f) \bigcap \mathrm{Ker}(g)) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2$$

καιτότε χρησιμοποιώντας την $(****)$, *θα έχουμε:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(h) = n - (n-2) = 2$$

Επειδή ο υπόχωρος $\mathrm{Im}(h)$ *του* $\mathbb{K}^2$ *έχει ίδια διάσταση* 2 *με τον* $\mathbb{K}^2$, *έπεται ότι:* $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{K}^2$, *δηλαδή η* h *είναι επιμορφισμός.*

(4) *Επειδή η* h *είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν* $\mathrm{Ker}(h) = \{\vec{0}\}$ *και* $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{K}^2$, *από τα μέρη* (2) *και* (3), *θα έχουμε ότι η* h *είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν* $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$ *και* $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathcal{E}$, *δηλαδή αν και μόνον αν* $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

Άσκηση 35. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:* $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. *Αν*

$$\mathcal{E}_+ = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\big\} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_- = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\big\}$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{E}_+$ *και* $\mathcal{E}_-$ *είναι υπόχωροι του* $\mathcal{E}$ *και:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$$

Να δοθεί παράδειγμα τέτοιας γραμμικής απεικόνισης.

Λύση. *Έστω* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}_+$ *και* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Τότε* $\vec{0} \in \mathcal{E}_+$ *διότι* $f(\vec{0}) = \vec{0}$, *και επιπλέον:*

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \ \text{ και } \ f(\vec{y}) = \vec{y} \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} \quad \text{και} \quad f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι το υποσύνολο $\mathcal{E}_+$ *είναι υπόχωρος του* $\mathcal{E}$.

Παρόμοια έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}_+$ *και* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Τότε* $\vec{0} \in \mathcal{E}_-$ *διότι* $f(\vec{0}) = \vec{0} = -\vec{0}$, *και επιπλέον:*

$$f(\vec{x}) = -\vec{x} \ \text{ και } \ f(\vec{y}) = -\vec{y} \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y} = -(\vec{x}+\vec{y})$$

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda(-\vec{x}) = -(\lambda\vec{x})$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι το υποσύνολο $\mathcal{E}_-$ *είναι υπόχωρος του* $\mathcal{E}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. *Τότε θεωρούμε τα διανύσματα*

$$\vec{x}_+ = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} \quad \text{και} \quad \vec{x}_- = \frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}$$

Προφανώς τότε έχουμε:

$$\vec{x} = \vec{x}_+ + \vec{x}_-$$

Από την άλλη πλευρά:

$$f(\vec{x}_+) = f\left(\frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}\right) = \frac{f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})}{2} = \frac{f(\vec{x}) + \vec{x}}{2} = \vec{x}_+ \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_+ \in \mathcal{E}_+$$

$$f(\vec{x}_-) = f\left(\frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}\right) = \frac{f(\vec{x}) - f^2(\vec{x})}{2} = \frac{f(\vec{x}) - \vec{x}}{2} = -\frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} = -\vec{x}_+ \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_- \in \mathcal{E}_-$$

Επειδή $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $\vec{x} = \vec{x}_+ + \vec{x}_-$, *έπεται ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_- \tag{$\dagger$}$$

Αν $\vec{x} \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{E}_-$, *τότε:* $f(\vec{x}) = \vec{x}$ *και* $f(\vec{x}) = -\vec{x}$. *Επομένως* $\vec{x} = -\vec{x}$ *και άρα* $\vec{x} = \vec{0}$. *Συμπεραίνουμε ότι:*

$$\mathcal{E}_+ \cap \mathcal{E}_- = \{\vec{0}\} \tag{$\dagger\dagger$}$$

Από τις σχέσεις $(\dagger)$ *και* $(\dagger\dagger)$ *προκύπτει ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(A) = {}^tA$$

Τότε η f *είναι μια γραμμική αεπικόνιση και,* $\forall A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$: $f^2(A) = f(f(A)) = {}^t({}^tA)) = A$. *Επομένως* $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathsf{M}_n(\mathbb{K})}$.

Άσκηση 36. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{E})$$

Λύση. *Έστω $f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{K}$ θα έχουμε: $f(k) = f(k \cdot 1) = kf(1)$ και άρα η f είναι της μορφής:*

$$f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(k) = kf(1)$$

Αντίστροφα, αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{E}$, τότε η απεικόνιση

$$f_{\vec{x}}\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f_{\vec{x}}(k) = k\vec{x}$$

είναι προφανώς γραμμική. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{E}) = \big\{ f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f: \text{ γραμμική} \big\}, \quad \Phi(\vec{x}) = f_{\vec{x}}$$

Η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι η απεικόνιση Φ είναι καλά ορισμένη και είναι «επί». Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και υποθέτουμε ότι $\Phi(\vec{x}) = \Phi(\vec{y})$, δηλαδή $f_{\vec{x}} = f_{\vec{y}}$. Τότε

$$f_{\vec{x}} = f_{\vec{y}} \implies f_{\vec{x}}(1) = f_{\vec{y}}(1) \implies 1 \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{y} \implies \vec{x} = \vec{y}$$

Άρα η απεικόνιση Φ είναι «1-1» και άρα είναι «1-1» και «επί».

Θα δείξουμε ότι η Φ είναι ισομορφισμός. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε:

$$\Phi(\vec{x} + \vec{y}) = f_{\vec{x}+\vec{y}} \quad \text{και} \quad \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y}) = f_{\vec{x}} + f_{\vec{y}}$$

Τότε θα έχουμε $\forall k \in \mathbb{K}$:

$$f_{\vec{x}+\vec{y}}(k) = k \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = k \cdot \vec{x} + k \cdot \vec{y} = f_{\vec{x}}(k) + f_{\vec{y}}(k) = (f_{\vec{x}} + f_{\vec{y}})(k) \implies \Phi(\vec{x} + \vec{y})(k) = \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y})(k)$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\Phi(\vec{x} + \vec{y}) = \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y}) \tag{†}$$

Επίσης:

$$\Phi(\lambda \cdot \vec{x}) = f_{\lambda \cdot \vec{x}} \quad \text{και} \quad \lambda \cdot \Phi(\vec{x}) = \lambda \cdot f_{\vec{x}}$$

Τότε θα έχουμε $\forall k \in \mathbb{K}$:

$$f_{\lambda \cdot \vec{x}}(k) = k \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = (k\lambda) \cdot \vec{x} = (\lambda k) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (k \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f_{\vec{x}}(k) = (\lambda \cdot f_{\vec{x}})(k) \implies \Phi(\lambda \cdot \vec{x})(k) = \lambda \cdot \Phi(\vec{x})(k)$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\Phi(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot \Phi(\vec{x}) \tag{††}$$

Από τις σχέσεις (†) (††), έπεται ότι η «1-1» και «επί» απεικόνιση Φ είναι γραμμική, και άρα είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων:

$$\Phi: \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{E})$$

Άσκηση 37. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$$

Λύση. *Έστω ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και έστω $\mathcal{B} = \big\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n \big\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση*

$$\vartheta^i\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \text{έτσι ώστε } \vartheta^i(\vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases} \tag{†}$$

Αναλυτικότερα: από τη μία πλευρά έχουμε τα διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ της βάσης $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$, και από την άλλη πλευρά, έχουμε τα n το πλήθος στοιχεία του σώματος $\mathbb{K}$: $0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0$, όπου το 1 είναι στην i-οστή θέση. Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, έπεται τότε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\vartheta^i\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, έτσι ώστε:

$$\vartheta^1(\vec{e}_1) = 0, \quad \vartheta^i(\vec{e}_2) = 0, \quad \cdots, \quad \vartheta^i(\vec{e}_{i-1}) = 0, \quad \vartheta^i(\vec{e}_i) = 1, \quad \vartheta^i(\vec{e}_{i+1}) = 0, \quad \cdots, \quad \vartheta^i(\vec{e}_n) = 0$$

Γνωρίζουμε τότε ότι:

$$\text{αν} \quad \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \in \mathcal{E} \qquad \text{τότε} \qquad \vartheta^i(\vec{x}) = x_i$$

Ισχυρισμός: Το σύνολο $\mathcal{B}^* = \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$.

(1) *Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι:*

$$\lambda_1\vartheta^1 + \lambda_2\vartheta^2 + \cdots + \lambda_n\vartheta^n = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda_1\vartheta^1 + \lambda_2\vartheta^2 + \cdots + \lambda_n\vartheta^n)(\vec{x}) = 0(\vec{x}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

δηλαδή θα έχουμε:

$$(\lambda_1\vartheta^1)(\vec{x}) + (\lambda_2\vartheta^2)(\vec{x}) + \cdots + (\lambda_n\vartheta^n)(\vec{x}) = \lambda_1\vartheta^1(\vec{x}) + \lambda_2\vartheta^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_n\vartheta^n(\vec{x}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

και επομένως:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0, \quad \forall \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \in \mathcal{E}$$

Τότε όμως, θέτοντας $\vec{x} = \vec{e}_i$ στην παραπάνω σχέση και λαμβάνοντας υπόψη της σχέσεις $(\dagger)$, θα έχουμε, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\lambda_1\vartheta^1(\vec{e}_i) + \lambda_2\vartheta^2(\vec{e}_i) + \cdots + \lambda_n\vartheta^n(\vec{e}_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i = 0$$

Άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, και επομένως το σύνολο $\mathcal{B}^*$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(2) *Έστω $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$, δηλαδή $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση. Τότε $f(\vec{e}_i) \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f^* = f(\vec{e}_1)\vartheta^1 + f(\vec{e}_2)\vartheta^2 + \cdots + f(\vec{e}_n)\vartheta^n : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$$

δηλαδή, $\forall \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \in \mathcal{E}$:

$$f^*(\vec{x}) = (f(\vec{e}_1)\vartheta^1 + f(\vec{e}_2)\vartheta^2 + \cdots + f(\vec{e}_n)\vartheta^n)(\vec{x}) = f(\vec{e}_1)\vartheta^1(\vec{x}) + f(\vec{e}_2)\vartheta^2(\vec{x}) + \cdots + f(\vec{e}_n)\vartheta^n(\vec{x}) =$$
$$= f(\vec{e}_1)x_1 + f(\vec{e}_2)x_2 + \cdots + f(\vec{e}_n)x_n = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n)$$

Επειδή, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) = f^*(\vec{x})$$

έπεται ότι $f = f^*$, δηλαδή:

$$f = f(\vec{e}_1)\vartheta^1 + f(\vec{e}_2)\vartheta^2 + \cdots + f(\vec{e}_n)\vartheta^n$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{B}^*$ παράγει τον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}^*$ είναι μια βάση του $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$, θα έχουμε

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K}) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{E} \cong \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$$

Ιδιαίτερα η απεικόνιση

$$\Psi \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K}), \quad \Psi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1\vartheta^1 + x_2\vartheta^2 + \cdots + x_n\vartheta^n$$

είναι ισομορφισμός[5].

Ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ καλείται ο **δυϊκός χώρος** του $\mathcal{E}$ και συμβολίζεται με:

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K}) \qquad \text{ή} \qquad \widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$$

τα δε στοιχεία του, δηλαδή οι γραμμικές απεικονίσεις $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, καλούνται **γραμμικές μορφές**.

Έτσι για κάθε $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ ορίζεται ο δυϊκός του $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}^*$. Ιδιαίτερα ορίζεται ο δυϊκός χώρος $\mathcal{E}^{**} = (\mathcal{E}^*)^*$ του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^*$, ο οποίος καλείται ο **διπλά δυϊκός χώρος** του $\mathcal{E}$. Η βάση

$$\mathcal{B}^* = \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$$

του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}^*$ που κατασκευάστηκε στην παραπάνω Άσκηση καλαίται η **δυϊκή βάση** της βάσης $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$.

[5] Το ότι η απεικόνιση Ψ είναι γραμμική έπεται από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης. Το ότι η Ψ είναι ισομορφισμός προκύπτει από το γεγονός ότι στέλνει τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}^*$, βλέπε την Άσκηση 11.

Παρατήρηση. *Σύμφωνα με την Άσκηση 37 υπάρχουν ισομορφισμοί*

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^* \quad \textit{και} \quad \mathcal{E} \cong \mathcal{E}^* \cong \mathcal{E}^{**}$$

Παρατήρηση. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε σύμφωνα με τις Ασκήσεις 36 και 37, έχουμε ισομορφισμούς*

$$\Phi \colon \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{E}) \qquad \textit{και} \qquad \Psi \colon \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$$

Οι ισομορφισμοί Φ και Ψ είναι διαφορετικής φύσης. Ο λόγος είναι ότι ο ισομορφισμός Φ ορίζεται με φυσικό τρόπο για κάθε διανυσματικό χώρο

$$\Phi \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{E}), \quad \vec{x} \longmapsto \Phi(\vec{x}) = f_{\vec{x}} \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f_{\vec{x}}(k) = k \cdot \vec{x}$$

και ο ορισμός του είναι ανεξάρτητος της επιλογής βάσης στον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$.

Αντίθετα για να ορισθεί ο ισομορφισμός Ψ είναι απαραίτητη η επιλογή μιας βάσης στον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$. Αποδεικνύεται ότι, αν και οι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ είναι ισόμορφοι, δεν υπάρχει «φυσικός» ισομορφισμός μεταξύ των $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$.

Αντίθετα όπως δείχνει η επόμενη Άσκηση, υπάρχει πάντα ένας «φυσικός» ισομορφισμός μεταξύ ενός $\mathbb{K}$-διανυσματκού χώρου πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{E}$ και του διπλά δυϊκού του $\mathcal{E}^{**}$.

Άσκηση 38. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση*

$$\Omega \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{**}, \quad \vec{x} \longrightarrow \Omega(\vec{x}) \colon \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \Omega(\vec{x})(f) = f(\vec{x})$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Λύση. (1) *Δείχνουμε πρώτα ότι η απεικόνιση Ω είναι γραμμική. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε:*

$$\Omega(\vec{x}+\vec{y}) \colon \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \ f \longmapsto \Omega(\vec{x}+\vec{y})(f) = f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x})+f(\vec{y}) = \Omega(\vec{x})(f)+\Omega(\vec{y})(f) = \big(\Omega(\vec{x})+\Omega(\vec{y})\big)(f)$$

και επομένως $\forall f \in \mathcal{E}^*$: $\Omega(\vec{x}+\vec{y})(f) = \big(\Omega(\vec{x})+\Omega(\vec{y})\big)(f)$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\Omega(\vec{x}+\vec{y}) = \Omega(\vec{x}) + \Omega(\vec{y}) \tag{$\dagger$}$$

Παρόμοια θα έχουμε:

$$\Omega(\lambda\vec{x}) \colon \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \ f \longmapsto \Omega(\lambda\vec{x})(f) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda\Omega(\vec{x})(f) = (\lambda\Omega(\vec{x}))(f)$$

και επομένως $\forall f \in \mathcal{E}^*$: $\Omega(\lambda\vec{x})(f) = (\lambda\Omega(\vec{x}))(f)$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\Omega(\lambda\vec{x}) = \lambda\Omega(\vec{x}) \tag{$\dagger\dagger$}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η απεικόνιση Ω είναι γραμμική.

(2) *Δείχνουμε ότι η απεικόνιση Ω είναι μονομορφισμός. Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(\Omega)$, δηλαδή $\Omega(\vec{x}) = 0$ είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση $\mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{K}$. Τότε για κάθε γραμμική απεικόνιση $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, θα έχουμε: $\Omega(\vec{x})(f) = 0(f)$, δηλαδή $f(\vec{x}) = 0$, και επομένως:*

$$\forall f \in \mathcal{E}^* : \quad f(\vec{x}) = 0 \tag{$*$}$$

Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε το μονοσύνολο $\{\vec{x}\} \subseteq \mathcal{E}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα, επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} := n < \infty$, μπορεί να επεκταδεί σε μια βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = \vec{x}, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ του $\mathcal{E}$. Όπως και στην Άσκηση 37, υπάρχει τότε μια γραμμική μορφή, δηλαδή ένα στοιχείο του $\mathcal{E}^*$:

$$\vartheta^1 \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \textit{έτσι ώστε:} \ \ \vartheta^1(\vec{e}_i) = \begin{cases} 1, & \textit{αν} \ \ i = 1 \\ 0, & \textit{αν} \ \ i \neq 1 \end{cases}$$

Ιδιαίτερα $\vartheta^1(\vec{e}_1) = \vartheta^1(\vec{x}) = 1 \neq 0$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση $(*)$ και η υπόθεση ότι $\vec{x} \neq \vec{0}$ μας οδήγησε σε άτοπο. Άρα $\vec{x} = \vec{0}$ και αυτό σημαίνει ότι $\operatorname{Ker}(\Omega) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή η απεικόνιση Ω είναι μονομορφισμός.

(3) *Δείχνουμε ότι η απεικόνιση Ω είναι επιμορφισμός. Πράγματι, από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων, επειδή από το μέρος (2) η απεικόνιση Ω είναι μονομορφισμός, έχουμε:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\Omega) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(\Omega) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(\Omega)$$

Από την Παρατήρηση όμως έχουμε

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^{**} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \\ \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(\Omega) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \end{cases} \implies \begin{cases} \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(\Omega) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^{**} \\ \operatorname{Im}(\Omega)\colon \textit{υπόχωρος του } \mathcal{E}^{**} \end{cases} \implies \operatorname{Im}(\Omega) = \mathcal{E}^{**} \implies \Omega\colon \textit{επιμορφισμός}$$

Από τα παραπάνω μέρη έπεται ότι η απεικόνιση Ω είναι ένας ισομορφισμός:

$$\Omega\colon \ \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^{**}$$

Παρατήρηση. *Σύμφωνα με την Άσκηση 37 υπάρχουν ισομορφισμοί*

$$\mathcal{E} \ \cong \ \mathcal{E}^* \quad \textit{και} \quad \mathcal{E} \ \cong \ \mathcal{E}^* \ \cong \ \mathcal{E}^{**}$$

για τους ορισμοούς των οποίων είναι απαραίτητη η επιλογή βάση του $\mathcal{E}$ και επομένως δεν είναι «φυσικοί» ισομορφισμοί.

Σύμφωνα με την Άσκηση 38 οι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}^{**}$ είναι ισόμορφοι, και υπάρχει ένας «φυσικός» ισομορφισμός, ο ισομορφισμός Ω, ο οποίος είναι φυσικός διότι ορίζεται κατά τον ίδιο τρόπο για κάθε $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ και δεν εξαρτάται από επιλογή βάσης του $\mathcal{E}$.

Παρατήρηση. *Είδαμε στην Άσκηση 38 ότι για κάθε $\mathbb{K}$-διανσυτματικό χώρο $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης, οι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}^{**}$ είναι ισόμορφοι. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \infty$, τότε αυτό δεν εναι αληθές. Αποδεικνύεται σε αυτή την περίπτωση ότι η απεικόνιση $\Omega\colon \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{**}$ είναι πάντα μονομορφισμός, αλλά όχι επιμορφισμός, και γενικότερα δεν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}^{**}$, καθώς ισχύει ότι: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^{**}$. Γενικότερα αποδεικνύεται ότι:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \infty \quad \implies \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \ < \ \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^*$$