ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Τμημα $\mathbf{B}'$ (Μ-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 8

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 16 Δεκεμβρίου 2022

Άσκηση 1. *Να εξετασθεί αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση:*

(1) $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\langle (1,0,0,0),\ (1,1,0,0)\big\rangle = \mathsf{Im}(f)$$

(2) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\langle (1,1,0),\ (1,1,1)\big\rangle \quad \textit{και} \quad \mathsf{Im}(f) = \big\langle (1,0,0,0),\ (2,0,1,0)\big\rangle$$

(3) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *έτσι ώστε:*

$$\mathsf{Im}(f) = \big\langle (1,-1,1)\big\rangle$$

και ο πίνακας της f ως προς κατάλληλες βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ του $\mathbb{R}^3$ να είναι ο

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Λύση. (1) *Τα διανύσματα $(1,1,0,0)$ και$(1,0,0,0)$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν μια βάση του $\mathsf{Ker}(f)$, την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση*

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,1,1,1),\ \vec{e}_2 = (1,1,1,0),\ \vec{e}_3 = (1,1,0,0),\ \vec{e}_4 = (1,0,0,0)\big\}$$

του $\mathbb{R}^4$. Το παραπάνω σύνολο είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$ διότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ορίζουμε γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ως εξής:

$$f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2) \in \big\langle \vec{e}_3, \vec{e}_4\big\rangle \quad \textit{και} \quad f(\vec{e}_3) = f(\vec{e}_4) = (0,0,0,0)$$

Για παράδειγμα, θέτουμε: $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_3$ και $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_4$. Αν $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:

$$(x,y,z,w) = w\vec{e}_1 + (z-w)\vec{e}_2 + (y-z)\vec{e}_3 + (x-y)\vec{e}_4$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= f\big(w\vec{e}_1 + (z-w)\vec{e}_2 + (y-z)\vec{e}_3 + (x-y)\vec{e}_4\big) = \\ &= wf(\vec{e}_1) + (z-w)f(\vec{e}_2) + (y-z)f(\vec{e}_3) + (x-y)f(\vec{e}_4) = \\ &= w\vec{e}_3 + (z-w)\vec{e}_4) = w(1,1,0,0) + (z-w)(1,0,0,0) = (w,w,0,0) + (z-w,0,0,0) = (z,w,0,0) \end{aligned}$$

δηλαδή:

$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x,y,z,w) = (z,w,0,0)$$

Τότε εκ΄ κατασκευής έχουμε:

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\langle \vec{e}_3, \vec{e}_4\big\rangle = \mathsf{Im}(f)$$

(2) *Υποθέτουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε:*

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\langle (1,1,0),\ (1,1,1) \big\rangle \qquad \text{και} \qquad \mathsf{Im}(f) = \big\langle (1,0,0,0),\ (2,0,1,0) \big\rangle$$

Τα διανύσματα $(1,1,0)$ και $(1,1,1)$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του $\mathsf{Ker}(f)$. Παρόμοια τα διανύσματα $(1,0,0,0)$ και $(2,0,1,0)$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του $\mathsf{Im}(f)$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Ker}(f) = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Im}(f)$. Από την εξίσωση διαστάσεων για την f τότε προκύπτει ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 4$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γραμμική απεικόνιση.

(3) *Υποθέτουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε:*

$$\mathsf{Im}(f) = \big\langle (1,-1,1) \big\rangle$$

και ο πίνακας της f ως προς κατάλληλες βάσεις $\mathcal{B}$ $\mathcal{B}'$ του $\mathbb{R}^3$ να είναι ο

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Προφανώς $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Im}(f) = 1 \neq 3$ και επομένως $\mathsf{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, δηλαδή η f δεν είναι επιμορφισμός ή ισοδύναμα η f δεν είναι ισομορφισμός. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας της f ως προς τυχόν ζευγάρι βάσεων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ του $\mathbb{R}^3$ δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Επειδή, όπως μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα, $|A| = 1 \neq 0$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Επομένως ο πίνακας A δεν μπορεί να είναι πίνακας της f ως προς οποιοδήποτε ζευγάρι βάσεων του $\mathbb{R}^3$. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γραμμική απεικόνιση.

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \big(y+z,\ x+z,\ y+x\big)$$

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ της f, όπου*

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$$

είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(2) *Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f, όπου $\mathcal{C}$ είναι η ακόλουθη βάση του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1 = (1,1,1),\ \vec{\epsilon}_2 = (1,-1,0),\ \vec{\epsilon}_3 = (1,1,-2)\big\}$$

(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε*

$$P^{-1}AP = B$$

Λύση. *(1) Επειδή η βάση $\mathcal{B}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τον πίνακα $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ της f στη βάση $\mathcal{B}$ ως εξής:*

$$f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (0,1,1) = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (1,0,1) = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (1,1,0) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Για να υπολογίσουμε τον πίνακα $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f ως προς τη βάση $\mathcal{C}$, θα έχουμε:

$$f(\vec{\epsilon}_1) = f(1,1,1) = (2,2,2) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(1,1,1) + b(1,-1,0) + c(1,1,-2) =$$

$$= (a+b+c, a-b+c, a-2c) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a+b+c = 2 \\ a-b+c = 2 \\ a-2c = 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{\epsilon}_1) = 2\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 + 0\vec{\epsilon}_3$$

$$f(\vec{\epsilon}_2) = f(1,-1,0) = (-1,1,0) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(1,1,1) + b(1,-1,0) + c(1,1,-2) =$$

$$= (a+b+c, a-b+c, a-2c) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c=-1 \\ a-b+c=1 \\ a-2c=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{\epsilon}_2) = 0\vec{\epsilon}_1 - 1\vec{\epsilon}_2 + 0\vec{\epsilon}_3$$

$$f(\vec{\epsilon}_3) = f(1,1,-2) = (-1,-1,2) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(1,1,1) + b(1,-1,0) + c(1,1,-2) =$$

$$= (a+b+c, a-b+c, a-2c) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c=-1 \\ a-b+c=-1 \\ a-2c=2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{\epsilon}_3) = 0\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 - 1\vec{\epsilon}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$B = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι διότι είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς τα ζεύγη βάσεων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$. Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας P είναι ο πίνακας μετάβασης $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ από τη βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{C}$. Επομένως για να τον υπολογίσουμε, θα έχουμε:

$$\vec{\epsilon}_1 = (1,1,1) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

$$\vec{\epsilon}_2 = (1,-1,0) = 1\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

$$\vec{\epsilon}_3 = (1,1,-2) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση*

$$f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

έστι ώστε:

$$f(0,1,1) = (0,1,3), \qquad f(1,0,1) = (5,4,3), \qquad f(1,1,0) = (2,0,0)$$

Ακολούθως:

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ της f ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, όπου*

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$$

είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(2) *Να βρεθεί ο πίνακας $B = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ της f ως προς τη βάση $\mathcal{C}$, όπου $\mathcal{C}$ είναι η βάση του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1 = (1,1,1),\ \vec{\epsilon}_2 = (1,1,0),\ \vec{\epsilon}_3 = (1,0,0)\big\}$$

(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε*

$$P^{-1}AP = B$$

Λύση. *Θεωρούμε τα διανύσματα*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (0,1,1), \qquad \vec{\varepsilon}_2 = (1,0,1), \qquad \vec{\varepsilon}_3 = (1,1,0)$$

Επειδή η ορίζουσα του πίνακα των συνιστωσών των διανυσμάτων $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, και $\vec{\varepsilon}_3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \neq 0$$

είναι μη-μηδενική, έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, και $\vec{\varepsilon}_3$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

έτσι ώστε:

$$f(0,1,1) = (0,1,3), \qquad f(1,0,1) = (5,4,3), \qquad f(1,1,0) = 2,0,0)$$

Για να προσδιορίσουμε την f εργαζόμαστε ως εξής: έστω (x,y,z) τυχόν διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$. Τότε το (x,y,z) έχει μοναδική γραφή ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, και $\vec{\varepsilon}_3$:

$$(x,y,z) = a\vec{\varepsilon}_1 + b\vec{\varepsilon}_2 + c\vec{\varepsilon}_3 = a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (b+c, a+c, a+b) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} b + c = x \\ a + c = y \\ a + b = z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{-x+y+z}{2} \\[2ex] b = \dfrac{x-y+z}{2} \\[2ex] c = \dfrac{x+y-z}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$(x,y,z) = \frac{-x+y+z}{2}\,\vec{\varepsilon}_1 + \frac{x-y+z}{2}\,\vec{\varepsilon}_2 + \frac{x+y-z}{2}\,\vec{\varepsilon}_3$$

και τότε:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{-x+y+z}{2}\,f(\vec{\varepsilon}_1) + \frac{x-y+z}{2}\,f(\vec{\varepsilon}_2) + \frac{x+y-z}{2}\,f(\vec{\varepsilon}_3) = \\ &= \frac{-x+y+z}{2}\,(0,1,3) + \frac{x-y+z}{2}\,(5,4,3) + \frac{x+y-z}{2}\,(2,0,0) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(7x - 3y + 3z,\ 3x - 3y + 5z,\ 6z\Big) \end{aligned}$$

Επομένως

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \frac{1}{2}\Big(7x - 3y + 3z,\ 3x - 3y + 5z,\ 6z\Big)$$

(1) Για την εύρεση του πίνακα $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ της f ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$, θα έχουμε

$$f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = \frac{7}{2}\,\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\,\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{3}{2}\,\vec{e}_1 - \frac{3}{2}\,\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right) = \frac{3}{2}\,\vec{e}_1 + \frac{5}{2}\,\vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Για την εύρεση του πίνακα $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ της f ως προς τη βάση $\mathcal{C}$, θα έχουμε:

$$f(\vec{\epsilon}_1) = f(1,1,1) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 3\right) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) =$$

$$= (a+b+c, a+b, a) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c = \frac{7}{2} \\ a+b = \frac{5}{2} \\ a = 3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{\epsilon}_1) = 3\,\vec{\epsilon}_1 - \frac{1}{2}\,\vec{\epsilon}_2 + 1\,\vec{\epsilon}_3$$

$$f(\vec{\epsilon}_2) = f(1,1,0) = (2,0,0) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) =$$

$$= (a+b+c, a+b, a) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c = 2 \; a+b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{\epsilon}_2) = 0\,\vec{\epsilon}_1 + 0\,\vec{\epsilon}_2 + 2\,\vec{\epsilon}_3$$

$$f(\vec{\epsilon}_3) = f(1,0,0) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) =$$

$$= (a+b+c, a+b, a) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c = \frac{7}{2} \; a+b = \frac{3}{2} \\ a = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{\epsilon}_3) = 0\,\vec{\epsilon}_1 + \frac{3}{2}\,\vec{\epsilon}_2 + 2\,\vec{\epsilon}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι διότι είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς τα ζεύγη βάσεων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$. Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας P είναι ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ από τη βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{C}$. Επομένως για να τον υπολογίσουμε, θα έχουμε:

$$\vec{\epsilon}_1 = (1,1,1) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$
$$\vec{\epsilon}_2 = (1,1,0) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$
$$\vec{\epsilon}_3 = (1,0,0) = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τα διανύσματα $(1,2,0,-4)$ και $(2,0,-1,-3)$. Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε: $\mathsf{Im}(f) = \big\langle (1,2,0,-4),\, (2,0,-1,-3) \big\rangle$. Ακολούθως:*

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$ αντίστοιχα.*

(2) *Να βρεθούν βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$ των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$ αντίστοιχα έτσι ώστε ο πίνακας $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$ της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$ να είναι ο πίνακας:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Θεωρούμε την κανονική βάση*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$$

και το σύνολο διανυσμάτων

$$\vec{y}_1 = (1,2,0,-4), \quad \vec{e}_2 = (2,0,-1,-3), \quad \vec{y}_3 = (0,0,0,0)$$

Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_1) = (1,2,0,-4), \quad f(\vec{e}_2) = (2,0,-1,-3), \quad f(\vec{e}_3) = (0,0,0,0)$$

Τότε:

$$\mathsf{Im}(f) = \langle f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2),\ f(\vec{e}_3)\rangle = \langle (1,2,0,-4),\ (2,0,-1,-3),\ (0,0,0,0)\rangle = \langle (1,2,0,-4),\ (2,0,-1,-3)\rangle$$

Η γραμμική απεικόνιση f *είναι η εξής:*

$$f(x,y,z) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3) =$$
$$= x(1,2,0,-4) + y(2,0,-1,-3) + z(0,0,0,0) = (x+2y,\ 2x,\ -y,\ -4x-3y)$$

Άρα

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x,y,z) = (x+2y,\ 2x,\ -y,\ -4x-3y)$$

Επειδή

$$f(\vec{e}_1) = (1,2,0,-4) = \vec{\epsilon}_1 + 2\vec{\epsilon}_2 + 0\vec{\epsilon}_3 - 4\vec{\epsilon}_4$$
$$f(\vec{e}_2) = (2,0,-1,-3) = 2\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 - \vec{\epsilon}_3 - 3\vec{\epsilon}_4$$
$$f(\vec{e}_3) = (0,0,0,0) = 0\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 + 0\vec{\epsilon}_3 + 0\vec{\epsilon}_4$$

όπου

$$\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1 = (1,0,0,0),\ \vec{\epsilon}_2 = (0,1,0,0),\ \vec{\epsilon}_3 = (0,0,1,0),\ \vec{\epsilon}_4 = (0,0,0,1)\}$$

είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$*, έπεται ότι*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathsf{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+2y,\ 2x,\ -y,\ -4x-3y) = (0,0,0,0)\}$$
$$= \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle \vec{e}_3 \rangle$$

και άρα η κανονική βάση $\mathcal{B}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^3$ *η οποία συμπληρώνει τη βάση* $\{\vec{e}_3\}$ *του* $\mathsf{Ker}(f)$*. Τότε από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το σύνολο διανυσμάτων* $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)\} = \{\vec{\epsilon}'_1 = (1,2,0,-4), \vec{\epsilon}'_2 = (1,2,0,-4)\}$ *είναι μια βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}(f)$ *η οποία συμπληρώνεται σε μια βάση*

$$\mathcal{C}' = \{\vec{\epsilon}'_1 = (1,2,0,-4),\ \vec{\epsilon}'_2 = (2,0,-1,-3),\ \vec{\epsilon}'_3 = (0,0,1,0),\ \vec{\epsilon}'_4 = (0,0,0,1)\}$$

διότι ο η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Ο πίνακας της f *ως προς το ζυγάρι βάσεων* $\mathcal{B}$ *του* $\mathbb{R}^3$ *και* $\mathcal{C}'$ *του* $\mathbb{R}^4$ *είναι τότε ο*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5. *Έστω* $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^4$ *και* $\mathfrak{B}'$ *η βάση*

$$\mathfrak{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4,\ \ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \ \vec{\varepsilon}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \ \vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\}$$

Έστω $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:*

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = 3\vec{\varepsilon}_2, \quad f(\vec{\varepsilon}_2) = 7\vec{\varepsilon}_4, \quad f(\vec{\varepsilon}_3) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3, \quad f(\vec{\varepsilon}_4) = \vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_3$$

Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$.

Λύση. *Έχουμε την κανονική βάση* $\mathfrak{B} = \{\vec{e_1} = (1,0,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0,0), \vec{e_3} = (0,0,1,0), \vec{e_4} = (0,0,0,1)\}$ *του* $\mathbb{R}^4$. *Τότε από την περιγραφή της βάσης* $\mathfrak{B}'$ *έχουμε:*

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4 \\ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = (1,0,0,1) \\ \vec{\varepsilon}_2 = (1,3,0,0) \\ \vec{\varepsilon}_3 = (3,1,0,0) \\ \vec{\varepsilon}_4 = (1,1,1,1) \end{cases}$$

και άρα

$$\begin{cases} f(\vec{\varepsilon}_1) = 3\vec{\varepsilon}_2 \\ f(\vec{\varepsilon}_2) = 7\vec{\varepsilon}_4 \\ f(\vec{\varepsilon}_3) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3 \\ f(\vec{\varepsilon}_4) = \vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(1,0,0,1) = (3,9,0,0) \\ f(1,3,0,0) = (7,7,7,7) \\ f(3,1,0,0) = (4,1,0,1) \\ f(1,1,1,1) = (-14,-5,0,1) \end{cases}$$

Έστω $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$. *Τότε*

$$(x,y,z,w) = a(1,0,0,1) + b(1,3,0,0) + c(3,1,0,0) + d(1,1,1,1) = (a+b+3c+d, 3b+c+d, d, a+d)$$

και άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} a + b + 3c + d = x \\ 3b + c + d = y \\ d = z \\ a + d = w \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με τις γνωστές διαδικασίες τότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} a = w - z \\ b = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w \\ c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w \\ d = z \end{cases}$$

Επομένως το τυχαίο διάνυσμα $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ *γράφεται ως εξής:*

$$(x,y,z,w) = (w-z)(1,0,0,1) + (-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w)(1,3,0,0) + (\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w)(3,1,0,0) + z(1,1,1,1)$$

'ρα αν εφαρμόσουμε τη γραμμική απεικόνιση f *στη παραπάνω σχέση τότε έχουμε:*

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= (w-z)f(1,0,0,1) + (-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w)f(1,3,0,0) \\ &+ (\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w)f(3,1,0,0) + zf(1,1,1,1) \\ &= (w-z)(3,9,0,0) + (-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w)(7,7,7,7) \\ &+ (\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w)(4,1,0,1) + z(-14,-5,0,1) \\ &\vdots \\ &= (\frac{5}{8}x + \frac{17}{8}y - \frac{153}{8}z + \frac{19}{8}w, -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{33}{2}z + \frac{19}{2}w, \\ &\quad -\frac{7}{8}x + \frac{21}{8}y - \frac{21}{8}z + \frac{7}{8}w, -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}w) \end{aligned}$$

Τότε υπολογίζοντας την f στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ έχουμε:

$$\begin{cases} f(1,0,0,0) = (\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{8}, -\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}\vec{e_1} - \frac{1}{2}\vec{e_2} - \frac{7}{8}\vec{e_3} - \frac{1}{2}\vec{e_4} \\ f(0,1,0,0) = (\frac{17}{8}, \frac{5}{2}, \frac{21}{8}, \frac{5}{2}) = \frac{17}{8}\vec{e_1} + \frac{5}{2}\vec{e_2} + \frac{21}{8}\vec{e_3} + \frac{5}{2}\vec{e_4} \\ f(0,0,1,0) = (-\frac{153}{8}, -\frac{33}{2}, -\frac{21}{8}, -\frac{3}{2}) = -\frac{153}{8}\vec{e_1} - \frac{33}{2}\vec{e_2} - \frac{21}{8}\vec{e_3} - \frac{3}{2}\vec{e_4} \\ f(0,0,0,1) = (\frac{19}{8}, \frac{19}{2}, \frac{7}{8}, \frac{1}{2}) = \frac{19}{8}\vec{e_1} + \frac{19}{2}\vec{e_2} + \frac{7}{8}\vec{e_3} + \frac{1}{2}\vec{e_4} \end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας $M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f)$ της f είναι

$$M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5/8 & 17/8 & -153/8 & 19/8 \\ -1/2 & 5/2 & -33/2 & 19/2 \\ -7/8 & 21/8 & -21/8 & 7/8 \\ -1/2 & 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Διαφορετικά: *Μπορούμε να υπολογίσουμε τον ζητούμενο πίνακα $A := M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f)$ χωρίς να γνωρίζουμε την f ως εξής:*

Από τις σχέσεις

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = 3\vec{\varepsilon}_2, \quad f(\vec{\varepsilon}_2) = 7\vec{\varepsilon}_4, \quad f(\vec{\varepsilon}_3) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3, \quad f(\vec{\varepsilon}_4) = \vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_3$$

βλέπουμε άμεσα ότι ο πίνακας της f στην βάση $\mathfrak{B}'$ είναι ο:

$$B := M^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την θεωρία, οι πίνακες A και B είναι όμοιοι και θα συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

όπου $P = M^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από την $\mathfrak{B}$ στην $\mathfrak{B}'$. Επομένως θα έχουμε:

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1} \qquad (*)$$

και το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των P και P^{-1}. Επειδή:

$$\mathfrak{B}' = \big\{\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4,\ \ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \ \vec{\varepsilon}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \ \vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\big\}$$

βλέπουμε άμεσα ότι:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο P^{-1} μπορεί να υπολογισθεί είτε με την εύρεση του συμπληρωματικού του P ή ως ο πίνακας μετάβασης από την $\mathfrak{B}'$ στην $\mathfrak{B}$. Τότε ο πίνακας A προκύπτει από την σχέση $(*)$.

Άσκηση 6. *Έστω $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ δύο γραμμικές απεικονίσεις και έστω η βάση του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathfrak{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,1,1),\ \vec{e}_2 = (1,1,0),\ \vec{e}_3 = (1,0,0)\big\}$$

Αν

$$M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(g) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθούν οι γραμμικές απεικονίσεις $f + g$ και $-3f + 2g$ και $f \circ g$.

Λύση. *Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι* $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f+g) = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) + M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g)$ *και άρα*

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f+g) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{cases} (f+g)(\vec{e}_1) = 7\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = 7(1,1,1) + 0(1,1,0) + 3(1,0,0) = (10,7,7) \\ (f+g)(\vec{e}_2) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (1,1,1) + (1,1,0) + 3(1,0,0) = (5,2,1) \\ (f+g)(\vec{e}_3) = 1\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = (1,1,1) - 1(1,1,0) + (1,0,0) = (1,0,1) \end{cases}$$

Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Τότε το τυχαίο διάνυσμα* (x,y,z) *γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης* $\mathfrak{B}$*. Έστω* $\kappa\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \mu\vec{e}_3 = (x,y,z)$*. Τότε*

$$(x,y,z) = (\kappa+\lambda+\mu, \kappa+\lambda, \kappa) \implies \begin{cases} x = \kappa+\lambda+\mu \\ y = \kappa+\lambda \\ z = \kappa \end{cases} \implies \begin{cases} \kappa = z \\ \lambda = y - z \\ \mu = x - y \end{cases}$$

και άρα $(x,y,z) = z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3$*. Αν εφαρμόσουμε τη γραμμική απεικόνιση* $f+g$ *στο διάνυσμα* (x,y,z) *τότε έχουμε:*

$$\begin{aligned} (f+g)(x,y,z) &= (f+g)(z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3) \\ &= z(f+g)(\vec{e}_1) + (y-z)(f+g)(\vec{e}_2) + (x-y)(f+g)(\vec{e}_3) \\ &= z(10,7,7) + (y-z)(5,2,1) + (x-y)(1,0,1) \\ &= (x+4y+5z, 2y+5z, x+6z) \end{aligned}$$

Συνεπώς $(f+g)(x,y,z) = (x+4y+5z, 2y+5z, x+6z)$ *για κάθε* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Στην συνέχεια θα βρούμε τη γραμμική απεικόνιση $-3f+2g$*. Έχουμε:*

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(-3f+2g) = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(-3f) + M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(2g) = -3M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) + 2M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g) = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{cases} (-3f+2g)(\vec{e}_1) = 9\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 = 9(1,1,1) + 0(1,1,0) + 6(1,0,0) = (15,9,9) \\ (-3f+2g)(\vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = -3(1,1,1) - 3(1,1,0) + (1,0,0) = (-5,-6,-3) \\ (-3f+2g)(\vec{e}_3) = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = -3(1,1,1) + 3(1,1,0) + 2(1,0,0) = (2,0,-3) \end{cases}$$

Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Δείξαμε παραπάνω ότι το τυχαίο διάνυσμα* (x,y,z) *γράφεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης* $\mathfrak{B}$ *ως εξής:* $(x,y,z) = z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3$*. Τότε αν εφαρμόσουμε τη γραμμική απεικόνιση* $-3f+2g$ *στο τυχαίο διάνυσμα* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *έχουμε:*

$$\begin{aligned} (-3f+2g)(x,y,z) &= (-3f+2g)(z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3) \\ &= z(-3f+2g)(\vec{e}_1) + (y-z)(-3f+2g)(\vec{e}_2) + (x-y)(-3f+2g)(\vec{e}_3) \\ &= z(15,9,9) + (y-z)(-5,-6,-3) + (x-y)(2,0,-3) \\ &= (2x-7y+20z, -6y+15z, -3x+12z) \end{aligned}$$

Συνεπώς $(-3f+2g)(x,y,z) = (2x-7y+20z, -6y+15z, -3x+12z)$ *για κάθε* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Τέλος, από την θεωρία γνωρίζουμε ότι $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f \circ g) = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g)$*. Επομένως:*

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{cases} (f \circ g)(\vec{e}_1) = 9\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 9(1,1,1) - 3(1,1,0) + 0(1,0,0) = (6,6,9) \\ (f \circ g)(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 2(1,1,1) - 2(1,1,0) + 0(1,0,0) = (0,0,2) \\ (f \circ g)(\vec{e}_3) = 1\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 1(1,1,1) - 1(1,1,0) + 0(1,0,0) = (0,0,1) \end{cases}$$

και

$$(f\circ g)(x,y,z)=(f\circ g)\big(z\vec{e}_1+(y-z)\vec{e}_2+(x-y)\vec{e}_3\big)=z(f\circ g)(\vec{e}_1)+(y-z)(f\circ g)(\vec{e}_2)+(x-y)(f\circ g)(\vec{e}_3)=$$
$$=z(6,6,9)+(x-y)(0,0,2)+(y-z)(0,0,1)=(6z,6z,9z+2x-2y+y-z)=(6z,6z,2x-y+8z)$$

Άρα

$$f\circ g\colon \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=(6z,6z,2x-y+8z)$$

Β΄ Τρόπος: *Επειδή γνωρίζουμε τον πίνακα της f στη βάση $\mathfrak{B}$ και τον πίνακα της g στη βάση $\mathfrak{B}$ τότε μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f και τον τύπο της g αντίστοιχα. Έχουμε:*

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1)=f(1,1,1)=\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3=(1,1,1)\\ f(\vec{e}_2)=f(1,1,0)=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=(3,2,1)\\ f(\vec{e}_3)=f(1,0,0)=\vec{e}_1-\vec{e}_2+0\vec{e}_3=(0,0,1)\end{cases}$$

Συνεπώς αν εφαρμόσουμε την f στο τυχαίο διάνυσμα $(x,y,z)=z\vec{e}_1+(y-z)\vec{e}_2+(x-y)\vec{e}_3$ του $\mathbb{R}^3$ τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(z\vec{e}_1+(y-z)\vec{e}_2+(x-y)\vec{e}_3)\\ &= zf(\vec{e}_1)+(y-z)f(\vec{e}_2)+(x-y)f(\vec{e}_3)\\ &= z(1,1,1)+(y-z)(3,2,1)+(x-y)(0,0,1)\\ &= (3y-2z,2y-z,x)\end{aligned}$$

Συνεπώς $f(x,y,z)=(3y-2z,2y-z,x)$ για κάθε $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Δουλεύοντας παρόμοια βρίσκουμε ότι $g(x,y,z)=(x+y+7z,6z,6z)$ για κάθε $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Τότε γνωρίζοντας τους τύπους της f και της g εύκολα υπολογίζουμε τους τύπους της $f+g$, της $-3f+2g$ και της $f\circ g$.

Άσκηση 7. *Έστω $A\in\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Αν $\mathbf{r}(A)=1$, να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $B=\mathsf{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ και $C\in\mathsf{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:*

$$A=B\cdot C\quad \textit{και}\quad \mathbf{r}(A)=1=\mathbf{r}(C)$$

Λύση. *Επειδή $\mathbf{r}(A)=1$, υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m\times m$ πίνακας Q και ένας αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας P έτσι ώστε:*

$$Q^{-1}AP=\begin{pmatrix} I_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\implies A=Q\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}P^{-1}$$

Έστω

$$Q=\begin{pmatrix} q_{11}&q_{12}&\cdots&q_{1m}\\ q_{21}&q_{22}&\cdots&q_{2m}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ q_{m1}&q_{m2}&\cdots&q_{mm}\end{pmatrix}\quad \textit{και}\quad P^{-1}=\begin{pmatrix} p'_{11}&p'_{12}&\cdots&p'_{1n}\\ p'_{21}&p'_{22}&\cdots&p'_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ p'_{n1}&p'_{n2}&\cdots&p'_{nn}\end{pmatrix}$$

Θέτουμε:

$$B=\begin{pmatrix}q_{11}\\q_{21}\\ \vdots\\ q_{m1}\end{pmatrix}\in\mathsf{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})\quad \textit{και}\quad C=\begin{pmatrix}p'_{11}&p'_{12}&\cdots&p'_{1n}\end{pmatrix}\in\mathsf{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$$

Ο πίνακας B δεν είναι ο μηδενικός διότι είναι η πρώτη στήλη του αντιστρέψιμου πίνακα Q και ο πίνακας C δεν είναι ο μηδενικός διότι είναι η πρώτη γραμμή του αντιστρέψιμου πίνακα P^{-1}. Επομένως $\mathbf{r}(A)=1=\mathbf{r}(C)$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι:

$$A=Q\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}q_{11}\\q_{21}\\ \vdots\\ q_{m1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p'_{11}&p'_{12}&\cdots&p'_{1n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_{11}p'_{11}&q_{11}p'_{12}&\cdots&q_{11}p'_{1n}\\ q_{21}p'_{11}&q_{21}p'_{12}&\cdots&q_{21}p'_{1n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ q_{m1}p'_{11}&q_{m1}p'_{12}&\cdots&q_{m1}p'_{1n}\end{pmatrix}=B\cdot C$$

Άσκηση 8. *Έστω* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *μια γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$ *είναι ο ακόλουθος*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) *Να βρεθεί το διάνυσμα* $f(x, y, z)$*, για κάθε* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(2) *Να βρεθεί ο πίνακας* B *της* f *στη βάση* $\mathfrak{B} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, -2),\ \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0),\ \vec{\varepsilon}_3 = (2, 0, 1)\}$.
(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας* P *έτσι ώστε* $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
(4) *Να υπολογισθεί ο πίνακας* A^n*,* $\forall n \geq 1$.

Λύση. (1) *Έστω* $\{\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1)\}$ *η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$. *Τότε από τον πίνακα* A *έχουμε:*

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (1, 0, -2) \\ f(\vec{e}_2) = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = (0, 0, 0) \\ f(\vec{e}_3) = -2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 = (-2, 0, 4) \end{cases}$$

Επομένως ο τύπος της f *είναι*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \\ &= xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3) \\ &= x(1, 0, -2) + y(0, 0, 0) + z(-2, 0, 4) \\ &= (x - 2z, 0, -2x + 4z) \end{aligned}$$

δηλαδή $f(x, y, z) = (x - 2z, 0, -2x + 4z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) *Αφού θέλουμε να βρούμε τον πίνακα της* f *στη βάση* $\mathfrak{B}$ *θα υπολογίσουμε την* f *στα διανύσματα της* $\mathfrak{B}$ *και στην συνέχεια θα τα εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της* $\mathfrak{B}$. *Έχουμε:*

$$\begin{cases} f(\vec{\varepsilon}_1) = f(1, 0, -2) = (5, 0, -10) = 5\vec{\varepsilon}_1 + 0\vec{\varepsilon}_2 + 0\vec{\varepsilon}_3 \\ f(\vec{\varepsilon}_2) = f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) = 0\vec{\varepsilon}_1 + 0\vec{\varepsilon}_2 + 0\vec{\varepsilon}_3 \\ f(\vec{\varepsilon}_3) = f(2, 0, 1) = (0, 0, 0) = 0\vec{\varepsilon}_1 + 0\vec{\varepsilon}_2 + 0\vec{\varepsilon}_3 \end{cases}$$

'ρα ο πίνακας της f *στη βάση* $\mathfrak{B}$ *είναι*

$$B = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) *Ο αντιστρέψιμος πίνακας* P *που ψάχνουμε είναι ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση* $\{\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1)\}$ *στη βάση* $\mathfrak{B} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, -2),\ \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0),\ \vec{\varepsilon}_3 = (2, 0, 1)\}$. *Αυτό σημαίνει ότι γράφουμε τα διανύσματα της* $\mathfrak{B}$ *ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της κανονικής βάσης. 'ρα έχουμε:*

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, -2) = \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0) = 0\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_3 = (2, 0, 1) = 2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας P^{-1} *είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση* $\mathfrak{B}$ *στην κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$*, δηλαδή τώρα γράφουμε τα διανύσματα της κανονικής βάσης του* $\mathbb{R}^3$ *ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης* $\mathfrak{B}$. *Διαφορετικά απλά υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα του* P *με το συνήθη τρόπο. Και στις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε ότι*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Επίσης εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

(4) *Από την τελευταία σχέση ο πίνακας A γράφεται ως εξής: $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$. Επομένως έχουμε*

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ &= (P \cdot B \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot B \cdot P^{-1}) \\ &= P \cdot B \cdot P^{-1} P \cdot B \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot B \cdot I_3 \cdot B \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot B^2 \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

και άρα για κάθε $n \geq 1$ έχουμε:

$$A^n = P \cdot B^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 0 & -2 \cdot 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 \cdot 5^{n-1} & 0 & 4 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9. *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνιση*

$$f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = (2,0,0), \ \ \vec{e}_2 = (-3,-1,0), \ \ \vec{e}_3 = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{\epsilon}_1 = (1,0,0), \ \ \vec{\epsilon}_3 = (0,1,0), \ \ \vec{\epsilon}_3 = (1,0,1) \right\}$$

του $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f)$ της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$, όπου

$$\mathcal{D} = \left\{ \vec{e}\,'_1 = (1,-1,0), \ \ \vec{e}\,'_2 = (1,0,1), \ \ \vec{e}\,'_3 = (0,1,-2) \right\}$$

Λύση. *Επειδή $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$, έπεται ότι*

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2 + 1\vec{\epsilon}_3 = (2,1,1)$$
$$f(\vec{e}_2) = 1\vec{\epsilon}_1 + 2\vec{\epsilon}_2 + 2\vec{\epsilon}_3 = (1,2,2)$$
$$f(\vec{e}_3) = 1\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 + 2\vec{\epsilon}_3 = (1,0,2)$$

Έστω (x,y,z) τυχόν διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$. Τότε το (x,y,z) γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάρτων της βάσης $\mathcal{B}$:

$$(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(2,0,0) + b(-3,-1,0) + c\left(0,2,\frac{1}{2}\right) = \left(2a - 3b, -b + 2c, \frac{c}{2}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 2a - 3b = x \\ -b + 2c = y \\ \frac{c}{2} = z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{x - 3y + 12z}{2} \\ b = -y + 4z \\ c = 2z \end{cases}$$

Άρα

$$(x,y,z) = \frac{x - 3y + 12z}{2}\,\vec{e}_1 + (-y + 4z)\,\vec{e}_2 + 2z\,\vec{e}_3$$

και επομένως

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f\left(\frac{x - 3y + 12z}{2}\,\vec{e}_1 + (-y + 4z)\,\vec{e}_2 + 2z\,\vec{e}_3\right) = \\ &= \frac{x - 3y + 12z}{2}\,f(\vec{e}_1) + (-y + 4z)\,f(\vec{e}_2) + 2z\,f(\vec{e}_3) = \\ &= \frac{x - 3y + 12z}{2}\,(2,1,1) + (-y + 4z)\,(1,2,2) + 2z\,(1,0,2) = \end{aligned}$$

$$= \left(x - 4y + 18z,\ \frac{x - 7y + 28z}{2},\ \frac{x - 7y + 36z}{2}\right)$$

Επομένως

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \left(x - 4y + 18z,\ \frac{x - 7y + 28z}{2},\ \frac{x - 7y + 36z}{2}\right)$$

Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f)$, θα έχουμε:

$$f(\vec{e}\,'_1) = f(1,-1,0) = (5,4,4) = 5(1,0,0) + 4(0,1,0) + 4(0,0,1) = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}\,'_2) = f(1,0,1) = \left(19, \frac{29}{2}, \frac{37}{2}\right) = 19(1,0,0) + \frac{29}{2}(0,1,0) + \frac{37}{2}(0,0,1) = 19\vec{e}_1 + \frac{29}{2}\vec{e}_2 + \frac{37}{2}\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}\,'_3) = f(0,1,-2) = \left(-40, \frac{63}{2}, -\frac{79}{2}\right) = -40(1,0,0) - \frac{63}{2}(0,1,0) - \frac{79}{2}(0,0,1) = -40\vec{e}_1 - \frac{63}{2}\vec{e}_2 - \frac{79}{2}\vec{e}_3$$

Επομένως

$$B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 19 & -40 \\ 4 & 29/2 & -63/2 \\ 4 & 37/2 & -79/2 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση. *Αν A και B είναι δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, τότε γνωρίζουμε ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, δηλαδή $A \sim B$, αν και μόνον αν οι πίνακες A και B έχουν την ίδια βαθμίδα:*

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$$

Έστω ότι $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) = r$. Τότε $A \sim B$ και επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας Q και αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P έτσι ώστε $Q^{-1}AP = B$.

Γνωρίζουμε, από τη θεωρία πινάκων, ότι για να προσδιορίσουμε του πίνακες Q και P εργαζόμαστε ως εξής:

(1) *εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A προκύπτει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας Q_1 έτσι ώστε $Q_1 A = \Gamma(A)$ είναι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A.*

(2) *εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του $\Gamma(A)$ προκύπτει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P_1 έτσι ώστε $\Gamma(A)P_1 = \mathsf{K}(A)$ είναι η ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα $\Gamma(A)$, δηλαδή η κανονική μορφή του πίνακα A, η οποία είναι η*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

Έτσι έχουμε

$$Q_1 A P_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \tag{$\dagger$}$$

(3) *εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του B προκύπτει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας Q_2 έτσι ώστε $Q_2 B = \Gamma(B)$ είναι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα B.*

(4) *εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του $\Gamma(B)$ προκύπτει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P_2 έτσι ώστε $\Gamma(B)P_2 = \mathsf{K}(B)$ είναι η ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα $\Gamma(B)$, δηλαδή η κανονική μορφή του πίνακα A, η οποία είναι η*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

Έτσι έχουμε

$$Q_2 B P_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \tag{$\dagger\dagger$}$$

(5) *Από τις σχέσεις ($\dagger$) και ($\dagger\dagger$) έπεται ότι:*

$$Q_1 A P_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) = Q_2 B P_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(Q_2^{-1} Q_1\right) A \left(P_1 P_2^{-1}\right) = B$$

(6) *Θέτοντας*

$$Q = Q_1^{-1} Q_2 \qquad \text{και} \qquad P = P_1 P_1^{-1}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο $m \times m$ πίνακα Q και έναν αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα P έτσι ώστε

$$Q^{-1} A P = B$$

Στις επόμενες ασκήσεις αναλύουμε έναν διαφορετικό τρόπο εύρεσης αντιστρέψιμων πινάκων Q και P έτσι ώστε $Q^{-1}AP = B$, με χρήση γραμμικών απεικονίσεων.

Άσκηση 10. *Να βρεθεί η (μοναδική) γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

της οποίας ο πίνακας ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (0,1,1),\ \vec{e}_2 = (1,0,1),\ \vec{e}_3 = (1,1,0)\big\}$$

και

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1 = (1,0),\ \vec{\epsilon}_2 = (0,1)\big\}$$

των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα, είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως:

(1) *Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $\mathsf{Ker}(f)$ της f η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση $\mathcal{B}'$ του $\mathbb{R}^3$.*
(2) *Να βρεθεί μια βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ της f η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση $\mathcal{C}'$ του $\mathbb{R}^2$.*
(3) *Να βρεθεί ο πίνακας B της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$.*
(4) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας Q και αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας P έτσι ώστε:*

$$Q^{-1}AP = B$$

Λύση. *Επειδή $A = M^{C}_{\mathcal{B}}(f)$,θα έχουμε:*

$$f(\vec{e}_1) = 1\vec{\epsilon}_1 + 2\vec{\epsilon}_2 = (1,0) + 2(0,1) = (1,2)$$
$$f(\vec{e}_2) = 2\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2 = 2(1,0) + (0,1) = (2,1)$$
$$f(\vec{e}_3) = 3\vec{\epsilon}_1 + 7\vec{\epsilon}_2 = 3(1,0) + 7(0,1) = (3,7)$$

Έστω (x,y,z) τυχόν διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$. Τότε το (x,y,z) γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάρτων της βάσης $\mathcal{B}$:

$$(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (b+c, a+c, a+b) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} b+c = x \\ a+c = y \\ a+b = z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{-x+y+z}{2} \\[2ex] b = \dfrac{x-y+z}{2} \\[2ex] c = \dfrac{x+y-z}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$(x,y,z) = \frac{-x+y+z}{2}\,\vec{e}_1 \ + \ \frac{x-y+z}{2}\,\vec{e}_2 \ + \ \frac{x+y-z}{2}\,\vec{e}_3$$

και τότε:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f\left(\frac{-x+y+z}{2}\,\vec{e}_1 \ + \ \frac{x-y+z}{2}\,\vec{e}_2 \ + \ \frac{x+y-z}{2}\,\vec{e}_3\right) = \\ &= \frac{-x+y+z}{2}\,f(\vec{e}_1) \ + \ \frac{x-y+z}{2}\,f(\vec{e}_2) \ + \ \frac{x+y-z}{2}\,f(\vec{e}_3) = \\ &= \frac{-x+y+z}{2}\,(1,2) \ + \ \frac{x-y+z}{2}\,(2,1) \ + \ \frac{x+y-z}{2}\,(3,7) = \\ &= \big(2x+y,\ 3x+4y-2z\big) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = \big(2x+y,\ 3x+4y-2z\big)$$

(1) έστω$(x,y,z)\in \mathsf{Ker}(f)$. *Τότε*

$$f(x,y,z)=(0,0) \implies \big(2x+y,\ 3x+4y-2z\big)=(0,0) \implies \begin{cases}2x+y=0\\3x+4y-2z=0\end{cases} \implies \begin{cases}y=-2x\\ \\ z=-\dfrac{5}{2}x\end{cases}$$

$$\implies (x,y,z)=\left(x,\ -2x,\ -\frac{5}{2}\right)=x\left(1,\ -2,\ -\frac{5}{2}\right)$$

Επομένως

$$\mathsf{Ker}(f)=\left\langle\left(1,\ -2,\ -\frac{5}{2}\right)\right\rangle$$

Τότε το μονοσύνολο $\left\{\left(1,\ -2,\ -\frac{5}{2}\right)\right\}$ *είναι μια βάση του* $\mathsf{Ker}(f)$ *την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση* $\mathcal{B}'$ *του* $\mathbb{R}^3$ *ως εξής*

$$\mathcal{B}'=\left\{\vec{e}'_1=(0,1,0),\ \vec{e}'_2=0,0,1),\ \vec{e}'_3=\left(1,\ -2,\ -\frac{5}{2}\right)\right\}$$

Το σύνολο $\mathcal{B}'$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}^3$ *διότι η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των διανυσμάτων του συνόλου* $\mathcal{B}'$ *είναι*

$$\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-2&-\frac{5}{2}\end{vmatrix}=1\neq 0$$

(2) Από τη θεωρία (ή με εύκολο υπολογισμό) γνωρίζουμε ότι το σύνολο

$$\left\{\vec{\epsilon}'_1=f(\vec{e}'_1)=f(0,1,0)=(1,4),\ \ \vec{\epsilon}'_2=f(\vec{e}'_2)=f(0,0,1)=(0,-2)\right\}$$

είναι μια βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$. *Προφανώς όμως* $\mathsf{Im}(f)=\mathbb{R}^2$ *διότι* $\dim_{\mathbb{R}}\mathsf{Im}(f)=2=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$. *Άρα το σύνολο*

$$\mathcal{C}'=\left\{\vec{\epsilon}'_1=(1,4),\ \ \vec{\epsilon}'_2=(0,-2)\right\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$.

(3) Από τη θεωρία (ή με εύκολο υπολογισμό) έχουμε ότι

$$B=M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

(4) Ο αντιστρέψιμος 2×2 *πίνακας* Q *και ο αντιστρέψιμος* 3×3 *πίνακας* P *έτσι ώστε* $Q^{-1}AP=B$ *είναι ο πίνακας μετάβασης* $Q=M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ *και* $P=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *αντίστοιχα.*

Για τον πίνακα P, *θα έχουμε:*

$$\vec{e}'_1=(0,1,0)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3=a(0,1,1)+b(1,0,1)+c(1,1,0)=(b+c,a+c,a+b) \implies$$

$$\implies \begin{cases}b+c=0\\a+c=1\\a+b=0\end{cases} \implies \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ \\ b=-\dfrac{1}{2}\\ \\ c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Άρα

$$\vec{e}'_1=\frac{1}{2}\vec{e}_1-\frac{1}{2}\vec{e}_2+\frac{1}{2}\vec{e}_3$$

$$\vec{e}'_2=(0,0,1)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3=a(0,1,1)+b(1,0,1)+c(1,1,0)=(b+c,a+c,a+b) \implies$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ \\ b=\dfrac{1}{2} \\ \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3$$

$$\vec{e}\,'_3 = \left(1,\ -2,\ -\frac{5}{2}\right) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (b+c, a+c, a+b) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} b+c=1 \\ \\ a+c=-2 \\ \\ a+b=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a=-\dfrac{11}{4} \\ \\ b=\dfrac{1}{4} \\ \\ c=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$\vec{e}\,'_1 = -\frac{11}{4}\vec{e}_1 + \frac{1}{4}\vec{e}_2 + \frac{3}{4}\vec{e}_3$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$Q = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -11/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Για τον πίνακα $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$, *θα έχουμε:*

$$\vec{\epsilon}\,'_1 = (1,4) = 1(1,0) + 4(0,1) = 1\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

$$\vec{\epsilon}\,'_2 = (0,-2) = 0(1,0) - 2(0,1) = 0\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$$

πό τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 11. *Έστω* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *δύο διανυσματικοί χώροι διάστασης* 3 *υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{C} = \left\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3\right\}$ *μια βάση του* $\mathcal{F}$. *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$ *είναι ο*

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. *Να βρεθεί ο πίνακας* $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}(f)$ *της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}'$ *και* $\mathcal{C}$, *όπου*

$$\mathcal{B}' = \left\{\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \ \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_2 + (\lambda+1)\vec{e}_3,\ \ \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3\right\}$$

Τέλος, αν $\lambda = \mu = 0$, *να βρεθεί μια βάση* $\mathcal{D}$ *του* $\mathcal{E}$ *και μια βάση* $\mathcal{D}'$ *του* $\mathcal{F}$ *έτσι ώστε*

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

όπου $r = \mathbf{r}(f)$.

Λύση. *Επειδή*

$$A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \quad \text{και} \quad B = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'}(f)$$

έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι διότι είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικά ζεύγη βάσεων. Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας και αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας P έτσι ώστε

$$Q^{-1}AP = B$$

Ο πίνακας P είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}'$ και ο πίνακας Q είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{C}$. Ο τελευταίος προφανώς είναι ο ταυτοτικός πίνακας I_3 και θα έχουμε:

$$P = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \quad \text{και} \quad Q = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = I_3$$

Για την εύρεση του πίνακα P θα έχουμε:

$$\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_2 + (\lambda+1)\vec{e}_3, \quad \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3$$

και επομένως:

$$P = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$B = AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda+\mu+1 & \lambda+\lambda\mu+\mu & \mu \\ 1+\lambda^2+\mu^2 & \lambda^2+\mu^2\lambda+\mu^2+1 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

Έστω τώρα ότι $\lambda = \mu = 0$. Τότε

$$A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{r}(A) = 2$$

Από τη μορφή του πίνακα A θα έχουμε

$$f(\vec{e}_1) = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 + \vec{\epsilon}_3, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{\epsilon}_1, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{\epsilon}_1$$

Επομένως, για κάθε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, θα έχουμε:

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3) =$$
$$= x_1(\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 + \vec{\epsilon}_3) + x_2\vec{\epsilon}_1 + x_3\vec{\epsilon}_1 = (x_1+x_2+x_3)\vec{\epsilon}_1 + x_1\vec{\epsilon}_2 + x_1\vec{\epsilon}_3$$

Έστω $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in \mathsf{Ker}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και επομένως

$$(x_1+x_2+x_3)\vec{\epsilon}_1 + x_1\vec{\epsilon}_2 + x_1\vec{\epsilon}_3 = \vec{0} \quad \implies \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \implies \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Άρα $\vec{x} = x_2\vec{e}_2 - x_2\vec{e}_3 = x_2(\vec{e}_2 - \vec{e}_3)$. Αυτό σημαίνει προφανώς ότι:

$$\mathsf{Ker}(f) = \langle \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \rangle$$

Συμπληρώνουμε τη βάση $\{\vec{e}_2 - \vec{e}_3\}$ του πυρήνα της f σε μια βάση του $\mathcal{E}$: θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{D} = \{\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1, \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_2, \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3\}$, το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο διότι:

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{0} \quad \implies \quad \lambda_1\vec{e}_1 + (\lambda_2+\lambda_3)\vec{e}_2 - \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0} \quad \implies \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 3$, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{f(\vec{e}_1) = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 + \vec{\epsilon}_3,\ f(\vec{e}_2) = \vec{\epsilon}_1\}$ είναι μια βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ της f, την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{D}'$ του $\mathcal{F}$: θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{D}' = \{\vec{\epsilon}\,'_1 = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 + \vec{\epsilon}_3,\ \vec{\epsilon}\,'_2 = \vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}\,'_3 = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2\}$$

το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο διότι:

$$\lambda_1\vec{\epsilon}\,'_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}\,'_2 + \lambda_3\vec{\epsilon}\,'_3 = \vec{0} \quad \implies \quad \lambda_1(\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 + \vec{\epsilon}_3) + \lambda_2\vec{\epsilon}_1 + \lambda_3(\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2) = \vec{0} \quad \implies$$

$$\Longrightarrow \quad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\vec{\epsilon}_1+(\lambda_1+\lambda_3)\vec{\epsilon}_2+\lambda_1\vec{\epsilon}_3=\vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_3=0 \\ \lambda_1=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}=\{\vec{\epsilon}_1,\vec{\epsilon}_2,\vec{\epsilon}_3\}$ *μια βάση του* $\mathcal{F}$. *Επειδή* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F}=3$, *έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{D}'$ *είναι μια βάση του* $\mathcal{F}$.

Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}'}(f)$ *της* f *στις βάσεις* $\mathcal{D}$ *του* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{D}'$ *του* $\mathcal{F}$, *θα έχουμε:*

$$f(\vec{e}'_1)=f(\vec{e}_1)=\vec{\epsilon}_1+\vec{\epsilon}_2+\vec{\epsilon}_3=\vec{\epsilon}'_1=1\vec{\epsilon}'_1+0\vec{\epsilon}'_2+0\vec{\epsilon}'_3$$

$$f(\vec{e}'_2)=f(\vec{e}_2)=\vec{\epsilon}_1=\vec{\epsilon}'_2=0\vec{\epsilon}'_1+1\vec{\epsilon}'_2+0\vec{\epsilon}'_3$$

$$f(\vec{e}'_3)=f(\vec{e}_2-\vec{e}_3)=\vec{0}=0\vec{\epsilon}'_1+0\vec{\epsilon}'_2+0\vec{\epsilon}'_3$$

Επομένως:

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

όπου $2=\mathbf{r}(f)$.

Άσκηση 12. *Έστω η απεικόνιση* $f:\mathbb{R}_3[t]\longrightarrow\mathbb{R}_2[t]$, $f(P(t))=P(t)'-P(t)''$.

(1) *Να δείξετε ότι η* f *είναι γραμμική.*
(2) *Να βρείτε μια βάση του πυρήνα* $\mathsf{Ker}\,f$ *και μια βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}\,f$.
(3) *Να βρεθεί ο πίνακας* $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(f)$, *όπου* $\mathfrak{B}=\{1,t,t^2,t^3\}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_3[t]$ *και* $\mathfrak{C}=\{1,t,t^2\}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_2[t]$.
(4) *Να βρεθεί ο πίνακας* $M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f)$ *όπου* $\mathfrak{B}'=\{1,1+t,1+t+t^2,1+t+t^2+t^3\}$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}_3[t]$ *και* $\mathfrak{C}'=\{1,2t-1,-1-4t+3t^2\}$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}_2[t]$.
(5) *Να προσδιοριστούν αντιστρέψιμοι πίνακες* P,Q *έτσι ώστε:* $B=Q^{-1}\cdot A\cdot P$.

Λύση. (1) *Έστω* $P(t),Q(t)\in\mathbb{R}_3[t]$ *και* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Τότε*

$$\begin{aligned} f(P(t)+Q(t)) &= (P(t)+Q(t))'-(P(t)+Q(t))'' \\ &= P(t)'+Q(t)'-P(t)''-Q(t)'' \\ &= (P(t)'-P(t)'')+(Q(t)'-Q(t)'') \\ &= f(P(t))+f(Q(t)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f(\lambda P(t)) &= (\lambda P(t))'-(\lambda P(t))'' \\ &= \lambda P(t)'-\lambda P(t)'' \\ &= \lambda(P(t)'-P(t)'') \\ &= \lambda f(P(t)) \end{aligned}$$

'ρα η απεικόνιση f *είναι γραμμική.*

(2) *Έστω* $P(t)=\alpha+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3\in\mathbb{R}_3[t]$. *Τότε:* $P(t)\in\mathsf{Ker}\,f$ *αν και μόνον αν:*

$$f(P(t))=0 \iff P(t)'-P(t)''=0 \qquad (*)$$

Έχουμε $P(t)'=\beta+2\gamma t+3\delta t^2$ *και* $P(t)''=2\gamma+6\delta t$. *Τότε:*

$$\begin{aligned} P(t)'-P(t)''=0 &\Longrightarrow (\beta+2\gamma t+3\delta t^2)-(2\gamma+6\delta t)=0 \\ &\Longrightarrow (\beta-2\gamma)+(2\gamma-6\delta)t+3\delta t^2=0+0t+0t^2 \\ &\Longrightarrow \beta=\gamma=\delta=0 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο πυρήνας της f είναι

$$\begin{aligned}\mathsf{Ker}\, f &= \{P(t)\in\mathbb{R}_3[t] \mid f(P(t))=0\}\\ &= \{P(t)\in\mathbb{R}_3[t] \mid \beta=\gamma=\delta=0\}\\ &= \{P(t)=a\in\mathbb{R}_3[t] \mid a\in\mathbb{R}\}\\ &= \{a\cdot 1 \mid a\in\mathbb{R}\}\\ &= \langle 1\rangle\end{aligned}$$

'ρα ο πυρήνας $\mathsf{Ker}\, f$ *της* f *αποτελείται από όλα τα σταθερά πολυώνυμα και βάση του* $\mathsf{Ker}\, f$ *είναι το σταθερό πολυώνυμο* 1. *Στην συνέχεια θα βρούμε μια βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}\, f$ *της* f. *Από την εξίσωση των διαστάσεων έχουμε:*

$$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_3[t]=\dim_{\mathbb{R}}\mathsf{Ker}\, f+\dim_{\mathbb{R}}\mathsf{Im}\, f \implies \dim_{\mathbb{R}}\mathsf{Im}\, f=4-1=3$$

και $\mathsf{Im}\, f$ *υπόχωρος του* $\mathbb{R}_2[t]$. *Τότε* $\mathsf{Im}\, f=\mathbb{R}_2[t]$ *αφού* $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[t]=3$. *Επομένως μια βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}\, f$ *της* f *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_2[t]$, *δηλαδή το σύνολο* $\{1,t,t^2\}$. *Διαφορετικά:*

$$\mathbb{R}_3[t]=\langle 1,t,t^2,t^3\rangle \implies \mathsf{Im}\, f=f(\mathbb{R}_3[t])=\langle f(1),f(t),f(t^2),f(t^3)\rangle=\langle 1,2t-2,3t^2-6t)\rangle$$

'ρα τα παραπάνω διανύσματα αποτελούν βάση της $\mathsf{Im}\, f$ *της* f *διότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης αφού* $\dim_{\mathbb{R}}\mathsf{Im}\, f=3$ *και έχουμε βρεί τρία διανύσματα που παράγουν τον χώρο τότε από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αποτελούν βάση.*

(3) *Έχουμε:*

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=0=0\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2\\ f(t)=1=1\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2\\ f(t^2)=2t-2=-2\cdot 1+2\cdot t+0\cdot t^2\\ f(t^3)=3t^2-6t=0\cdot 1-6\cdot t+3\cdot t^2\end{array}\right. \implies A=M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(f)=\begin{pmatrix}0&1&-2&0\\0&0&2&-6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

(4) *Έχουμε:*

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=0=0\cdot 1+0\cdot(2t-1)+0\cdot(-1-4t+3t^2)\\ f(1+t)=1=1\cdot 1+0\cdot(2t-1)+0\cdot(-1-4t+3t^2)\\ f(1+t+t^2)=-1+2t=0\cdot 1+1\cdot(2t-1)+0\cdot(-1-4t+3t^2)\\ f(1+t+t^2+t^3)=-1-4t+3t^2=0\cdot 1+0\cdot(2t-1)+1\cdot(-1-4t+3t^2)\end{array}\right.$$

και άρα ο πίνακας $M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f)$ *είναι*

$$B=M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(5) *Οι πίνακες* A *και* B *που βρήκαμε παραπάνω είναι ισοδύναμοι διότι είναι οι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης* f *σε διαφορετικά ζεύγη βάσεων. Επομένως από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες* P,Q *έτσι ώστε:* $B=Q^{-1}\cdot A\cdot P$. *Ο πίνακας* P *είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση* $\mathfrak{B}$ *στη βάση* $\mathfrak{B}'$ *ενώ ο πίνακας* Q *είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση* $\mathfrak{C}$ *στη βάση* $\mathfrak{C}'$. *Έχουμε:*

$$\left\{\begin{array}{l} 1=1\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2+0\cdot t^3\\ 1+t=1\cdot 1+1\cdot t+0\cdot t^2+0\cdot t^3\\ 1+t+t^2=1\cdot 1+1\cdot t+1\cdot t^2+0\cdot t^3\\ 1+t^2+t^3=1\cdot 1+1\cdot t+1\cdot t^2+1\cdot t^3\end{array}\right. \implies P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

και

$$\left\{\begin{array}{l} 1=1\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2\\ 2t-1=-1\cdot 1+2\cdot t+0\cdot t^2\\ -1-4t+3t^2=-1\cdot 1-4\cdot t+3\cdot t^2\end{array}\right. \implies Q=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&-4\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Ο πίνακας Q^{-1} είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathfrak{C}'$ στη βάση $\mathfrak{C}$. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε απλά τον αντίστροφο του πίνακα Q. Τότε

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Συνεπώς βρήκαμε αντιστρέψιμους πίνακες P, Q έτσι ώστε: $Q^{-1} \cdot A \cdot P = B$.

Άσκηση 13. *Θεωρούμε τους πίνακες πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι. Αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, να βρεθούν αντιστρέψιμοι 3×3 πίνακες Q και P έτσι ώστε: $Q^{-1}AP = B$.

Λύση. *Γνωρίζουμε ότι δύο $m \times n$ πίνακες είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν έχουν την ίδια βαθμίδα. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η βαθμίδα ενός πίνακα είναι ίση με τη βαθμίδα της επαγόμενης γραμμικής απεικόνισης. Με αυτό το σκεπτικό θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις*

$$f_A \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_A(X) = AX \quad \text{και} \quad f_B \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_B(X) = BX$$

Θα υπολογίσουμε τις βαθμιδες των f_A και f_B.

Έστω $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathsf{Ker}(f_A)$, δηλαδή $f_A(X) = 0$ και επομένως:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 2x + z \\ -3x - 2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} z = -2x \\ x = -2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{cases} z = 4y \\ x = -2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα $\mathsf{Ker}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 4y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$. Επομένως το μονοσύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ είναι μια βάση του πυρήνα της f_A και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f_A) = 1$. Από την εξίσωση διαστάσεων προκύπτει τότε ότι $\mathbf{r}(f_A) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Ker}(f_A) = 3 - 1 = 2$. Επομένως:

$$\mathbf{r}(A) = 2$$

Έστω $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathsf{Ker}(f_B)$, δηλαδή $f_B(X) = 0$ και επομένως:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x - y + 3z \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα $\mathsf{Ker}(f_B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Επομένως το μονοσύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ είναι μια βάση του πυρήνα της f_B και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f_B) = 1$. Από την εξίσωση διαστάσεων προκύπτει τότε ότι $\mathbf{r}(f_B) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Ker}(f_B) = 3 - 1 = 2$. Επομένως:

$$\mathbf{r}(B) = 2$$

Άρα $\mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(B)$ *και επομένως οι πίνακες* A *και* B *είναι ισοδύναμοι.*

Για να προσδιορίσουμε αντιστρέψιμους πίνακες Q *και* P *έτσι ώστε:* $Q^{-1}AP = B$, *εργαζόμαστε ως εξής:*

(1) *Επειδή* $\mathbf{r}(A) = 2$, *ο πίνακας* A *είναι ισοδύναμος με τον* $\begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$, *και άρα υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες* Q_1 *και* P_1 *έτσι ώστε* $Q_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

Οι πίνακες Q_1 *και* P_1 *προκύπτουν ως εξής: Έστω* $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$ *η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_3$. *Βρίσκουμε στη συνέχεια μια βάση του πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f_A)$ *η οποία, επειδή* $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Ker}(f_A) = 1$, *θα είναι της μορφής* $\{E_3'\}$. *Συμπληρώνουμε τη βάση* $\{E_3'\}$ *του* $\mathsf{Ker}(f_A)$ *σε μια βάση* $\mathcal{B}' = \{E_1', E_2', E_3'\}$ *του* $\mathbb{R}_3$. *Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο* $\{F_1 = f_A(E_1'), F_2 = f_A(E_2')\}$ *είναι μια βάση της* $\mathsf{Im}(f_A)$, *την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση* $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$ *του* $\mathbb{R}_3$. *Τότε:*

$$P_1 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \quad \textit{και} \quad Q_1 = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$$

όπου $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_3$.

(2) *Επειδή* $\mathbf{r}(B) = 2$, *ο πίνακας* B *είναι ισοδύναμος με τον* $\begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$, *και άρα υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες* Q_2 *και* P_2 *έτσι ώστε* $Q_2^{-1}AP_2 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

Οι πίνακες Q_2 *και* P_2 *προκύπτουν ως εξής: Έστω* $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$ *η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_3$. *Βρίσκουμε στη συνέχεια μια βάση του πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f_B)$ *η οποία, επειδή* $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Ker}(f_B) = 1$, *θα είναι της μορφής* $\{E_3''\}$. *Συμπληρώνουμε τη βάση* $\{E_3''\}$ *του* $\mathsf{Ker}(f_B)$ *σε μια βάση* $\mathcal{B}'' = \{E_1'', E_2'', E_3''\}$ *του* $\mathbb{R}_3$. *Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο* $\{F_1'' = f_A(F_1'), F_2'' = f_B(E_2'')\}$ *είναι μια βάση της* $\mathsf{Im}(f_B)$, *την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση* $\mathcal{C}'' = \{F_1'', F_2'', F_3''\}$ *του* $\mathbb{R}_3$. *Τότε:*

$$P_2 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} \quad \textit{και} \quad Q_2 = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}''}$$

όπου $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_3$.

(3) *Από τα μέρη (1) και (2), προκύπτει ότι:*

$$Q_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix} = Q_2^{-1}BP_2 \implies Q_2Q_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B \implies (Q_1Q_2^{-1})^{-1}\,A\,(P_1P_2^{-1}) = B$$

Άρα οι ζητούμενοι πίνακες Q *και* P *είναι οι πίνακες:*

$$Q = Q_1Q_2^{-1} \quad \textit{και} \quad P = P_1P_2^{-1}$$

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο για να προσδιορίσουμε αντιστρέψιμους πίνακες Q *και* P *έτσι ώστε:* $Q^{-1}AP = B$.

- *Θα κατασκευάσουμε μια βάση του* $\mathbb{R}_3$ *συμπληρώνοντας τη βάση* $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ *του πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f_A)$ *σε μια*

βάση

$$\mathcal{B}' = \left\{ E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_3' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

του $\mathbb{R}_3$. *Το παραπάνω σύνολο είναι βάση του* $\mathbb{R}_3$ *διότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο $\{F_1' = f_A(E_1'),\, F_2' = f_A(E_2')\}$ *είναι μια βάση της* $\mathsf{Im}(f_A)$ *της* f_A. *Έχουμε:*

$$F_1' = f_A(E_1') = AE_1' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$F_2' = f_A(E_2') = AE_2' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε τη βάση $\{F_1',\, F_2'\}$ *της* $\mathsf{Im}(f_A)$ *σε μια βάση*

$$\mathcal{C}' = \left\{ F_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ F_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ F_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του $\mathbb{R}_3$. *Το παραπάνω σύνολο είναι βάση του* $\mathbb{R}_3$ *διότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$ *του* $\mathbb{R}_3$ *στη βάση* $\mathcal{B}'$ *είναι τότε ο πίνακας:*

$$P_1 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3\}$ *του* $\mathbb{R}_3$ *στη βάση* $\mathcal{C}'$ *είναι τότε ο πίνακας:*

$$Q_1 = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$Q_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad (\dagger)$$

- *Θα κατασκευάσουμε μια βάση του* $\mathbb{R}_3$ *συμπληρώνοντας τη βάση* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *του πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f_B)$ *σε μια*

βάση

$$\mathcal{B}'' = \left\{ E_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_3'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

του $\mathbb{R}_3$. *Το παραπάνω σύνολο είναι βάση του* $\mathbb{R}_3$ *διότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο $\{F_1'' = f_B(E_1''),\, F_2'' = f_B(E_2'')\}$ *είναι μια βάση της* $\mathsf{Im}(f_B)$ *της* f_B. *Έχουμε:* *Έχουμε:*

$$F_1'' = f_B(E_1'') = BE_1'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2'' = f_B(E_2'') = BE_2'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε τη βάση $\{F_1'', F_2''\}$ *της* $\mathsf{Im}(f_B)$ *σε μια βάση*

$$\mathcal{C}'' = \left\{ F_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_2'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_3'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του $\mathbb{R}_3$. *Το παραπάνω σύνολο είναι βάση του* $\mathbb{R}_3$ *διότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$ *του* $\mathbb{R}_3$ *στη βάση* $\mathcal{C}''$ *είναι τότε ο πίνακας:*

$$P_2 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3\}$ *του* $\mathbb{R}_3$ *στη βάση* $\mathcal{C}''$ *είναι τότε ο πίνακας:*

$$Q_2 = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}''} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$Q_2^{-1} B P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{††}$$

Από τις σχέσεις (†) *και* (††), *προκύπτει ότι:*

$$Q_1^{-1} A P_1 = Q_2^{-1} B P_2 \quad \Longrightarrow \quad Q_2 Q_1^{-1} A P_1 P_2^{-1} = B$$

Θέτουμε

$$Q = Q_1 Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P = P_1 P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

και τότε:

$$Q^{-1} A P = B$$

Άσκηση 14. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η βαθμίδα $\mathbf{r}(A) := r$ *του* A *και ακολούθως να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες* P, Q *έτσι ώστε*

$$Q^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

όπου I_r *είναι ο μοναδιαίος* $r \times r$ *πίνακας.*

Λύση. *Χρησιμοποιούμε ότι ο* 3×4 *πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας τής $\mathbb{K}$-*γραμμικής απεικόνισης*

$$f_A : \mathsf{M}_4(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{M}_3(\mathbb{K})$$

ως προς τις αντίστοιχες κανονικές βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του $\mathsf{M}_4(\mathbb{K})$ *και*

$$\mathcal{C} = \left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$. *Δηλαδή, αν* $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_4(\mathbb{K})$, *τότε*

$$f_A(X) = AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma - 2\delta \end{pmatrix}$$

Προσδιορίζουμε τον $\mathsf{Ker}(f)$: *Ένα διάνυσμα* $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ *ανήκει στον πυρήνα τής* ϕ, *αν και μόνο αν,*

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma - 2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επιλύοντας το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0 \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma - 2\delta &= 0 \end{aligned}$$

ως προς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *διαπιστώνουμε ότι το διάνυσμα* $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ *ανήκει στον πυρήνα τής* f_A, *αν και μόνο αν*

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\frac{\alpha}{2} - \beta \\ -\frac{\alpha}{4} + \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Προφανώς τότε το σύνολο

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του $\mathsf{Ker}(f_A)$, *και άρα η διάσταση του πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f_A)$ *είναι ίση με* 2. *Συμπληρώνουμε τη βάση αυτή σε μια βάση τού* $\mathsf{M}_4(\mathbb{K})$. *Πράγματι, το σύνολο*

$$\mathcal{B}' = \left\{ E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_3' = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ E_4' = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι βάση τού $\mathsf{M}_4(\mathbb{K})$*. Αυτό ελέγχεται εύκολα, διαπιστώνοντας ότι η ορίζουσα τού πίνακα*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι διάφορη τού μηδενός. Η εικόνα $\mathsf{Im}(f_A)$ *έχει διάσταση* $4 - \dim(\mathsf{Ker}\, f_A) = 2$*. Αυτή είναι ακριβώς και η βαθμίδα τού* A *επειδή γνωρίζουμε ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f_A) = \mathbf{r}(A)$*. Επιπλέον μια βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}(f_A)$ *αποτελείται*[1] *από τα διανύσματα* $f_A(E_1')$*, και* $f_A(E_2')$*. Επειδή*

$$f_A(E_1') = AE_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{και} \quad f_A(E_2') = AE_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ώστε μια βάση τής εικόνας είναι το σύνολο

$$\mathcal{L} = \left\{ f_A(\vec{c}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_A(\vec{c}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Συμπληρώνουμε την $\mathcal{L}$ *σε μια βάση τού* $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$*. Πράγματι, το σύνολο*

$$\mathcal{C}' = \left\{ F_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad F_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι βάση τού $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$*. (Τα τρία διανύσματα τού* C_3 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε έναν χώρο διάστασης* 3*.) Ας δούμε τη μορφή έχει ο πίνακας* $M(f_A)^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}$ *τής* f_A *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$*. Έχουμε:*

$$f_A(E_1') = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1F_1' + 0F_2' + 0F_3',$$

$$f_A(E_2') = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0F_1' + 1F_2' + 0F_3',$$

$$f_A(E_3') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0F_1' + 0F_2' + 0F_3',$$

$$f_A(E_4') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0F_1' + 0F_2' + 0F_3'$$

Επομένως,

$$M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f_A) = (M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}})^{-1} \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f_A) \cdot M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}$$

---

[1] Τα διανύσματα $f_A(E_1')$, και $f_A(E_2')$ προφανώς παράγουν την εικόνα $\mathsf{Im}(f_A)$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι αν $\lambda f_A(E_1') + \mu f_A(E_2') = \vec{0}$, τότε:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \lambda f_A(E_1') + \mu f_A(E_2') = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ 2\lambda + \mu \\ \lambda + 5\mu \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \lambda = \mu \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 5\mu = 0 \end{cases} \implies \lambda = \mu = 0$$

όπου ο $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *είναι ο πίνακας μετάβασης από την* $\mathcal{B}$ *στη* $\mathcal{B}'$ *και ο* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ *είναι ο πίνακας μετάβασης από την* $\mathcal{C}$ *στη* $\mathcal{C}'$. *Δηλαδή,*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ώστε ο πίνακας P *τής άσκησης είναι ο* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *και ο πίνακας* Q *τής άσκησης είναι ο* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$. *Αυτό ελέγχεται αφού το αποτέλεσμα τού πολλαπλασιασμού:*

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Για βοήθεια:* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Αφού λοιπόν ο A *είναι ισοδύναμος με τον* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *έχει την ίδια βαθμίδα με αυτόν, δηλαδή* 2.

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$$

όπου

$$f(x,y,z,w) = \big(2x+y-2z+w,\ 4x+y-2z-3w,\ x-y+2z-3w,\ 2x+2y-4z-5w,\ 3x+y-2z+2w\big)$$

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας* $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ *της* f *ως προς τις κανονικές βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$ *των* $\mathbb{R}^4$ *και* $\mathbb{R}^5$ *αντίστοιχα.*
(2) *Να βρεθεί μια βάση* $\mathcal{B}'$ *του* $\mathbb{R}^4$ *και μια βάση* $\mathcal{C}'$ *του* $\mathbb{R}^5$ *έτσι ώστε:*

$$B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } r = \mathbf{r}(f)$$

(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος* 5×5 *πίνακας* Q *και αντιστρέψιμος* 4×4 *πίνακας* P *έτσι ώστε:*

$$Q^{-1}AP = B$$

Λύση. (1) *Θεωρούμε τις κανονικές βάσεις*

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0,0),\ \ \vec{e}_2 = (0,1,0,0),\ \ \vec{e}_3 = (0,0,1,0),\ \ \vec{e}_4 = (0,0,0,1)\big\}$$

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1 = (1,0,0,0,0),\ \ \vec{\epsilon}_2 = (0,1,0,0,0),\ \ \vec{\epsilon}_3 = (0,0,1,0,0),\ \ \vec{\epsilon}_4 = (0,0,0,1,0),\ \ \vec{\epsilon}_5 = (0,0,0,0,1)\big\}$$

των $\mathbb{R}^4$ *και* $\mathbb{R}^5$ *αντίστοιχα.*

Για τον προσδιορισμό του πίνακα A *θα έχουμε:*

$$f(\vec{e}_1) = f(1,0,0,0) = (2,4,1,2,3) = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + 3\vec{e}_5$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0,1,0,0) = (1,1,-1,2,1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + \vec{e}_5$$

$$f(\vec{e}_3) = f(0,0,1,0) = (-2,-2,2,-4,-2) = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4 - 2\vec{e}_5$$

$$f(\vec{e}_4) = f(0,0,0,1) = (1,-3,-3,-5,2) = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 5\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5$$

Επομένως

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) (α΄) *Θα προσδιορίσουμε πρώτα μια βάση του πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f)$ *της* f *και ακολούθως θα την συμπληρώσουμε σε μια βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Έστω $\vec{a} = (x, y, z, w) \in \mathsf{Ker}(f)$. *Τότε* $f(\vec{a}) = f(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0, 0)$, *και επομένως θα έχουμε:*

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + w = 0 \\ 4x + y - 2z - 3w - 0 \\ x - y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + 2y - 4z - 5w = 0 \\ 3x + y - 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

Επομέμνως το διάνυσμα $\vec{a}$ *ανήκει στον πυρήνα της* f *αν και μόνον αν οι συνιστώσες του αποτελούν λύση του ομογενούς συστήματος*

$$(\Sigma) \quad AX = 0, \quad \textit{δηλαδή} \quad (\Sigma) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_4,\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_5} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \frac{1}{4}\Gamma_4,\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 + 3\Gamma_1]{\Gamma_1 \to -\Gamma_1,\ \Gamma_2 \to -\frac{1}{3}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{3} \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{4}1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 = \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1,\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{3} \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{31}{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \frac{12}{31}\Gamma_4,\ \Gamma_5 \to -\frac{4}{5}\Gamma_5]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_4,\ \Gamma_2 + \frac{7}{3}\Gamma_4]{\Gamma_3 \to -3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 - \Gamma_3]{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := A'$$

και τότε το ομογενές σύστημα (Σ) *είναι ισοδύναμο με το ομογενές σύστημα*

$$A'X = 0, \quad \textit{δηλαδή} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \\ w = 0 \end{cases}$$

Επομένως

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\{(0, 2z, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid z \in \mathbb{R}\big\} = \big\{z(0, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid z \in \mathbb{R}\big\} = \big\langle (0, 2, 1, 0) \big\rangle$$

Το μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{e}\,'_4 = (0, 2, 1, 0)$ *είναι βάση του πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f)$ *της* f.

Συμπληρώνουμε τη βάση $\big\{\vec{e}\,'_4\big\}$ *του πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f)$ *σε μια βάση* $\mathcal{B}'$ *του* $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B}' = \big\{\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0),\ \ \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0),\ \ \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1),\ \ \vec{e}\,'_4 = (0, 2, 1, 0)\big\}$$

Αυτό μπορεί να γίνει διότι η ορίσουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(β') *Θα προσδιορίσουμε τώρα μια βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f *και ακολούθως θα την συμπληρώσουμε σε μια βάση του* $\mathbb{R}^5$.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι τα διανύσματα $\left\{f(\vec{e}'_1),\ f(\vec{e}'_2),\ f(\vec{e}'_3)\right\}$ *είναι μια βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f. *Υπολογιίζουμε:*

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}'_1 &:= f(\vec{e}'_1) = f(\vec{e}_1) = (2,4,1,2,3)\\ \vec{\epsilon}'_2 &:= f(\vec{e}'_2) = f(\vec{e}_2) = (1,1,-1,2,1)\\ \vec{\epsilon}'_3 &= f(\vec{e}'_3) = f(\vec{e}_4) = (1,-3,-3,-5,2) \end{aligned}$$

Έτσι αποκτούμε μια βάση $\left\{\vec{\epsilon}'_1,\, \vec{\epsilon}'_2,\, \vec{\epsilon}'_3\right\}$ *της* $\mathsf{Im}(f)$ *την οποία συ,ολhρώνουμε σε μια βάση* $\mathcal{C}'$ *του* $\mathbb{R}^5$:

$$\mathcal{C}' = \Big\{\vec{\epsilon}'_1 = (2,4,1,2,3),\ \ \vec{\epsilon}'_2 = (1,1,-1,2,1),\ \ \vec{\epsilon}'_3 = (1,-3,-3,-5,2),$$
$$\vec{\epsilon}'_4 = (0,0,0,1,0),\ \ \vec{\epsilon}'_5 = (0,0,0,0,1)\Big\}$$

Αυτό μπορεί να γίνει διότι η ορίσουσα

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & -3 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

Σύμφωνα με το μέρος (2), έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Ker}(f) = 1$ *και επομένως από την εξίσωση διαστάσεων για την* f *προκύπτει ότι* $\mathbf{r}(f) = 4 - 1 = 3$. *Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο πίνακας* $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$ *της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}'$ *και*$\mathcal{C}'$ *είναι ο*

$$B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} I_3 & O\\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) *Γνωρίζουμε από τη Θεωρία ότι αν* $Q = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ *είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση* $\mathcal{C}$ *στη βάση* $\mathcal{C}'$ *του* $\mathbb{R}^5$ *και* $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση* $\mathcal{B}$ *στη βάση* $\mathcal{B}'$ *του* $\mathbb{R}^4$, *τότε:* $Q^{-1}AP = B$. *Επειδή οι βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$ *είναι οι κανονικές βάσεις των* $\mathbb{R}^4$ *και* $\mathbb{R}^5$ *αντίστοιχα, ο πίνακας* Q *έχει ως στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{C}'$ *και ο πίνακας* P *έχει ως στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{B}'$. *Επομένως:*

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -5 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$