ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (M-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 9

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 13 Ιανουαρίου 2023

Υπενθυμίζουμε ότι η βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ μιας γραμμικής απεικόνισης $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, όπου οι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f)$$

Αν $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε η βαθμίδα του A μπορεί να ορισθεί να είναι η βαθμίδα

$$\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(f_A)$$

της επαγόμενης γραμμικής απεικόνισης

$$f_A\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_m, \quad X \longmapsto f_A(X) = AX$$

Γνωρίζουμε ότι αν $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}_n$,τότε $\mathsf{Im}(f_A) = \langle f_A(E_1), f_A(E_2), \cdots, f_A(E_n)\rangle$. Επειδή $f_A(E_i)$ είναι η i-οστή στήλη Σ_i του A, $1 \leq i \leq n$, έπεται ότι:

$$\mathbf{r}(A) = \dim_{\mathbb{K}} \langle \Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n\rangle$$

Δηλαδή $\mathbf{r}(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A. Γι' αυτό και η βαθμίδα του A καλείται και η **βαθμίδα στηλών** του A, και συμβολίζεται προσωρινά με $\mathbf{r}(A) = \sigma(A)$. Από την άλλη πλευρά μπορούμε να ορίσουμε την **βαθμίδα γραμμών** του A ως:

$$\gamma(A) = \dim_{\mathbb{K}} \langle \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m\rangle$$

δηλαδή $\gamma(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα A. Επειδή οι γραμμές του A είναι οι στήλες του ${}^tA$ και οι στήλες του A είναι οι γραμμές του ${}^tA$, έπεται ότι:

$$\gamma({}^tA) = \sigma(A) \quad \text{και} \quad \sigma({}^tA) = \gamma(A)$$

Γνωρίζουμε ότι η βαθμίδα γραμμών ενός πίνακα είναι ίση με τη βαθμίδα στηλών του πίνακα. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού η οποία δόθηκε στο μάθημα χρησιμοποιήθηκε η αναγωγή ενός πίνακα στην ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή του και στην ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του. Στην επόμενη Άσκηση δείχνουμε με έναν διαφορετικό τρόπο ότι η βαθμίδα στηλών ενός πίνακα συμπίπτει με τη βαθμίδα γραμμών.

Άσκηση 1. *Για κάθε $m \times n$ πίνακα A, η βαθμίδα στηλών του A είναι ίση με τη βαθμίδα γραμμών του A:*

$$\mathbf{r}(A) = \sigma(A) = \gamma(A)$$

Λύση. *Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις*

$$f_A\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_m, \quad X \longmapsto f_A(X) = AX$$

$$f_{{}^tAA}\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_m, \quad X \longmapsto f_{{}^tAA}(X) = {}^tAAX$$

οι οποίες επάγονται από τους πίνακες A και ${}^tAA$. Γνωρίζουμε από την παραπάνω ανάλυση ότι $\mathbf{r}(f_A) = \sigma(A)$ και συμβολίσαμε την κοινή αυτή τιμή με $\mathbf{r}(f_A) = \sigma(A) = \mathbf{r}(A)$.

Προφανώς, $\forall X \in \mathbb{K}_n$*:*

$$f_{{}^tAA}(X) = {}^tAAX = f_{{}^tA}(AX) = f_{{}^tA}(f_A(X)) \implies \mathsf{Im}(f_{{}^tAA}) \subseteq \mathsf{Im}(f_{{}^tA}) \implies \mathbf{r}({}^tAA) \leq \mathbf{r}({}^tA)$$

Δηλαδή

$$\mathsf{Im}(f_{{}^tAA}) = \left\{{}^tAAX \in \mathbb{K}_n \mid X \in \mathbb{K}_n\right\} \subseteq \left\{{}^tAY \in \mathbb{K}_n \mid Y \in \mathbb{K}_m\right\} \subseteq \mathsf{Im}(f_{{}^tA}) \implies$$
$$\implies \mathbf{r}({}^tAA) \leq \mathbf{r}({}^tA) = \sigma({}^tA) = \gamma(A) \qquad (\dagger)$$

Έστω $r = \mathbf{r}(A) = \sigma(A)$ *και έστω* $\{AX_1, \cdots AX_r\}$ *μια βάση του* $\mathsf{Im}(f_A)$*. Έστω* $\lambda_1 {}^tAAX_1 + \cdots + \lambda_r {}^tAAX_r = 0$*. Τότε* ${}^tAA(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r) = 0$ *και έστω* $Y = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r$*. Τότε* ${}^t(A \cdot Y)(A \cdot Y) = {}^tY \cdot {}^tA \cdot A \cdot Y = 0$*. Προφανώς*[1] *όμως μια στήλη* $Z = AY$ *ικανοποιεί την* ${}^tZ \cdot Z = 0$ *αν και μόνον αν* $Z = 0$*. Επομένως* $A \cdot Y = 0$ *και άρα* $A(\lambda_1 X_1 + \cdots \lambda_r X_r) = 0 \implies \lambda_1 AX_1 + \cdots \lambda_r AX_r = 0 \implies \lambda_1 = \cdots \lambda_r = 0$*, λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των* $AX_1, \cdots AX_r$*. Επομένως το υποσύνολο* $\left\{{}^tAAX_1, \cdots {}^tAAX_r\right\}$ *του* $\mathsf{Im}(f_{{}^tAA})$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα* $\mathbf{r}(A) = r \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f_{{}^tAA}) = \mathbf{r}({}^tAA)$*. Επομένως:*

$$\mathbf{r}(A) \leq \mathbf{r}({}^tAA) \qquad (\dagger\dagger)$$

Απο τις σχέσεις $(\dagger)$ *και* $(\dagger\dagger)$ *προκύπτει ότι:*

$$\sigma(A) = \mathbf{r}(A) \leq \mathbf{r}({}^tAA) \leq \gamma(A) \qquad (*)$$

Δουλεύοντας με γραμμές, ισοδύναμα εργαζόμενοι με τον πίνακα ${}^tA$ *αντί του πίνακα* A*, θα έχουμε αντίστοιχα ότι:*

$$\gamma(A) = \mathbf{r}(A) \leq \sigma(A) \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ $(**)$ *προκύπτει ότι:*

$$\mathbf{r}(A) = \sigma(A) = \gamma(A)$$

Άσκηση 2. *Έστω* $g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$*,* $f\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *και* $h\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ *τρεις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ* $\mathbb{K}$*-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθούν τα εξής:*

(1) *Αν η* g *είναι επιμορφισμός, τότε:* $\mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(f)$*.*
(2) *Αν η* f *είναι μονομορφισμός, τότε:* $\mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(g)$*.*
(3) *Αν η* h *είναι μονομορφισμός και η* g *είναι επιμορφισμός, τότε:* $\mathbf{r}(h \circ f \circ g) = \mathbf{r}(f)$*.*

Λύση. (1) *Αν* $\vec{z} \in \mathsf{Im}(f \circ g)$*, τότε υπάρχει* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε* $(f \circ g)(\vec{x}) = \vec{z}$ *και τότε:* $\vec{z} = f(g(\vec{x})) \in \mathsf{Im}(f)$*. Άρα* $\mathsf{Im}(f \circ g) \subseteq \mathsf{Im}(f)$*. Αν* $\vec{z} \in \mathsf{Im}(f)$*, τότε υπάρχει* $\vec{y} \in \mathcal{F}$ *έτσι ώστε* $f(\vec{y}) = \vec{z}$*. Επειδή η* g *είναι επιμορφισμός, υπάρχει* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε* $g(\vec{x}) = \vec{y}$ *και τότε:* $(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f(\vec{y}) = \vec{z} \in \mathsf{Im}(f \circ g)$*. Άρα* $\mathsf{Im}(f) \subseteq \mathsf{Im}(f \circ g)$ *και επομένως* $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(f \circ g)$*. Τότε* $\mathbf{r}(f \circ g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f \circ g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f) = \mathbf{r}(f)$*.*

(2) *Αν* $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(g)$*, τότε* $g(\vec{x}) = \vec{0}$ *και* $f(g(\vec{x}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$*, δηλαδή* $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f \circ g)$ *και επομένως* $\mathsf{Ker}(g) \subseteq \mathsf{Ker}(f \circ g)$*. Έστω* $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f \circ g)$*. Τότε* $(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = \vec{0}$*, δηλαδή* $g(\vec{x}) \in \mathsf{Ker}(f)$*. Επειδή η* f *είναι μονομορφισμός, έπεται ότι* $g(\vec{x}) = \vec{0}$*, δηλαδή* $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(g)$*. Άρα* $\mathsf{Ker}(f \circ g) \subseteq \mathsf{Ker}(g)$ *και επομένως* $\mathsf{Ker}(f \circ g) = \mathsf{Ker}(g)$*. Από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων θα έχουμε:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(g \circ f) + \mathbf{r}(f \circ g) \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(g) + \mathbf{r}(g)$$

Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f \circ g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(g)$*, από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:* $\mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(g)$*.*

(3) *Επειδή η* h *είναι μονομορφσιμός, από το μέρος (2) έπεται ότι* $\mathbf{r}(h \circ f \circ g) = \mathbf{r}(f \circ g)$*. Επειδή η* g *είναι επιμορφισμός, έπεται ότι* $\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f)$*. Άρα:*

$$\mathbf{r}(h \circ f \circ g) = \mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(f)$$

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει μια σύντομη απόδειξη ενός γνωστού μας Θεωρήματος.

---

[1] Αν $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$, τότε ${}^tZZ = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots z_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_m^2$.

Άρα ${}^tZZ = 0$ αν και μόνον αν $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_m^2 = 0$ αν και μόνον αν $z_1 = z_2 = \cdots = z_m = 0$ αν και μόνον αν $Z = 0$.

Άσκηση 3. *Έστω A και B δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$.*

Λύση. *Αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας Q και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P έτσι ώστε: $Q^{-1}AP = B$. Τότε για κάθε $X \in \mathbb{K}_n$:*

$$f_B(X) = f_{Q^{-1}AP}(X) = Q^{-1}APX = Q^{-1}Af_P(X) = Q^{-1}f_A(f_P(X)) = f_{Q^{-1}}(f_A(f_P(X))) = (f_{Q^{-1}} \circ f_A \circ f_P)(X)$$

Επομένως:

$$f_B = f_{Q^{-1}} \circ f_A \circ f_P$$

Επειδή οι πίνακες Q^{-1} και P είναι αντιστρέψιμοι, έπεται[2] *ότι οι γραμμικές απεικονίσεις $f_{Q^{-1}}$ και f_P είναι ισομορφισμοί. Από την Άσκηση 2 έπεται τότε ότι:*

$$\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(f_B) = \mathbf{r}(B)$$

Αντίστροφα, έστω ότι: $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} \mathbf{r}(A) & O \\ O & O \end{pmatrix}$ και ο πίνακας B είναι ισοδύναμος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} \mathbf{r}(B) & O \\ O & O \end{pmatrix}$. Επειδή η ισοδυναμία πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σλυνολο όλων των $m \times n$ πινάκων, και επειδή $\begin{pmatrix} \mathbf{r}(A) & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(B) & O \\ O & O \end{pmatrix}$, έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι.

Άσκηση 4. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας και $\mathsf{adj}(A)$ ο συμπληρωματικός του A. Να δειχθούν τα εξής:*

(1) $\mathsf{adj}(A) = O \iff \mathbf{r}(A) < n-1$.
(2) $\mathbf{r}(A) = n \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = n$.
(3) $\mathbf{r}(A) < n-1 \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 0$.
(4) $\mathbf{r}(A) = n-1 \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 1$.

Λύση.

(1) *Από τον ορισμό του συμπληρωματικού πίνακα $\mathsf{adj}(A)$ του A έχουμε ότι $\mathsf{adj}(A) = O$ αν και μόνο αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης $n-1$ είναι ίσες με 0. Επομένως έχουμε ισοδύναμα ότι $\mathbf{r}(A) < n-1$ αφού από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι $\mathbf{r}(A) < k$ αν και μόνο αν υπάρχει ελάσσονα ορίζουσα τάξης $k \neq 0$ και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης μεγαλύτερης του k είναι ίσες με 0.*

(2) *Έστω $\mathbf{r}(A) = n$. Τότε $|A| \neq 0$, δηλαδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Όμως από την ακόλουθη σχέση:*

$$A \cdot \mathsf{adj}(A) = |A| \cdot I_n = \mathsf{adj}(A) \cdot A$$

έπεται ότι $|\mathsf{adj}(A)| \neq 0$ και άρα ο $\mathsf{adj}(A)$ έχει μέγιστη βαθμίδα, δηλαδή: $\mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = n$.

(3) *Αν $\mathbf{r}(A) < n-1$ τότε από το (1) έχουμε ότι $\mathsf{adj}(A) = \mathbb{O}$ και άρα $\mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 0$.*

(4) *Έστω $\mathbf{r}(A) = n-1$. Τότε $|A| = 0$ αφού $\mathbf{r}(A) < n$. Συνεπώς από τη σχέση $A \cdot \mathsf{adj}(A) = |A| \cdot I_n = \mathsf{adj}(A) \cdot A$ έχουμε*

$$A \cdot \mathsf{adj}(A) = 0 = \mathsf{adj}(A) \cdot A \qquad (*)$$

Θέτουμε $B = \mathsf{adj}(A)$ και ορίζουμε τις παρακάτω απεικονίσεις:

$$\mathbb{K}_n \xrightarrow{f_A} \mathbb{K}_n \xrightarrow{f_B} \mathbb{K}_n \ , \ \ f_A(X) = A \cdot X \ \ \textit{και} \ \ f_B(X) = B \cdot X$$

---

[2]Για κάθε $m \times n$ πίνακα A, ισχύει ότι:

$$f_A : \text{ ισομορφισμός} \iff A : \text{ αντιστρέψιμος}$$

Πράγματι, αν η f_A είναι ισομορφισμός, τότε προφανώς $m = n$ και ο πίνακας της f_A ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{K}_n$ και $\mathbb{K}_m$, δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος. Αντίστροφα, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $m = n$ και θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f_{A^{-1}} : \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n$, $f_{A^{-1}}(X) = A^{-1}X$. Θα έχουμε:

$$(f_A \circ f_{A^{-1}})(X) = f_A(f_{A^{-1}}(X) = f_A(A^{-1}X) = A(A^{-1}X) = (AA^{-1})X = I_nX = X \implies f_A \circ f_{A^{-1}} = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$$

$$(f_{A^{-1}} \circ f_A)(X) = f_{A^{-1}}(f_A(X) = f_{A^{-1}}(AX) = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_nX = X \implies f_{A^{-1}} \circ f_A = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$$

Άρα η απεικόνιση f_A είναι ισομορφισμός και $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

Τότε

$$f_{B\cdot A}(X) = B\cdot A\cdot X = B\cdot(A\cdot X) = B\cdot(f_A(X)) = f_B(f_A(X)) = (f_B\circ f_A)(X)$$
$$\Longrightarrow\ f_{B\cdot A} = f_B\circ f_A$$

και άρα από τη σχέση $(*)$ *έχουμε*

$$f_B\circ f_A = 0$$

Έστω $Y \in \mathsf{Im}(f_A)$. *Τότε* $Y = f_A(X)$ *και από την παραπάνω σχέση έχουμε* $f_B(f_A(X)) = 0$. *'ρα* $Y = f_A(X)\in \mathsf{Ker}(f_B)$ *και επομένως*

$$\mathsf{Im}(f_A)\ \subseteq\ \mathsf{Ker}(f_B)$$

Τότε από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathbb{K}}\mathsf{Im}(f_A)\le \dim_{\mathbb{K}}\mathsf{Ker}(f_B) = \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_n - \dim_{\mathbb{K}}\mathsf{Im}(f_B)\\
\Longrightarrow\ &\mathbf{r}(A)\le n-\mathbf{r}(B)\\
\Longrightarrow\ &\mathbf{r}(A)+\mathbf{r}(B)\le n\\
\Longrightarrow\ &n-1+\mathbf{r}(B)\le n\\
\Longrightarrow\ &\mathbf{r}(B)\le 1
\end{aligned}$$

Έστω ότι $\mathbf{r}(B)=0$. *Τότε* $B=\mathsf{adj}(A)=O$ *και άρα από το* (1) *έχουμε* $\mathbf{r}(A)<n-1$, *που είναι άτοπο. Επομένως* $\mathbf{r}(B)=\mathbf{r}(\mathsf{adj}(A))=1$.

Η ιδέα στην απόδειξη του (4) στην Άσκηση 4 είναι η χρήση του εξής γενικότερου αποτελέσματος που αναλύεται στην επόμενη Άσκηση:

Άσκηση 5. *Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις*

$$\mathcal{E}\xrightarrow{\ g\ }\mathcal{F}\xrightarrow{\ f\ }\mathcal{G}$$

μεταξύ $\mathbb{K}$*-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Αν* $f\circ g=0$, *τότε:*

(1) $\mathsf{Im}(g)\subseteq\mathsf{Ker}(f)$.
(2) $\mathbf{r}(f)+\mathbf{r}(g)\le\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$.
(3) $\mathbf{r}(f)+\mathbf{r}(g)=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$ *αν και μόνον αν* $\mathsf{Im}(g)=\mathsf{Ker}(f)$.

Λύση. (1) *Έστω* $\vec{y}\in\mathsf{Im}(g)$. *Τότε* $\vec{y}=g(\vec{x})$ *και άρα χρησιμοποιώντας ότι* $f\circ g=0$, *θα έχουμε* $f(\vec{y}) = f(g(\vec{x}))=\vec{0}$. *'ρα* $\vec{y}\in\mathsf{Ker}(f)$ *και επομένως*

$$\mathsf{Im}(g)\ \subseteq\ \mathsf{Ker}(f)$$

(2) *Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση έχουμε*

$$\begin{aligned}
&\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{Im}(g)\le\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{Ker}(f)=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{Im}(f)\\
\Longrightarrow\ &\mathbf{r}(g)\le\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}-\mathbf{r}(f)\\
\Longrightarrow\ &\mathbf{r}(f)+\mathbf{r}(g)\le\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}
\end{aligned}$$

(3) *Παρατηρούμε ότι η ανισότητα στο* (2) *είναι ισότητα αν και μόνον αν* $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{Im}(g)=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{Ker}(f)$. *Επειδή από το* (1) *ισχύει* $\mathsf{Im}(g)\subseteq\mathsf{Ker}(f)$, *αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι:* $\mathsf{Im}(g)=\mathsf{Ker}(f)$.

Άσκηση 6. *Έστω* A *ένας* $n\times n$ *πίνακας, όπου* $n\ge 2$, *με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι ισχύουν τα εξής:*

(1)
$$|\mathsf{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

(2)
$$\mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) = |A|^{n-2}A$$

(3)
$$|\mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A))| = |A|^{(n-1)^2}$$

Λύση. *Γνωρίζουμε ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει ότι:*
$$\mathsf{adj}(A) \cdot A = |A|\, I_n \tag{†}$$
και επομένως θα έχουμε και:
$$\mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) \cdot \mathsf{adj}(A) = |\mathsf{adj}(A)|\, I_n \tag{††}$$

(1) *Θεωρώντας ορίζουσες στην (†) έχουμε:*
$$|\mathsf{adj}(A)|\,|A| = |A|^n \tag{$*$}$$
Διακρίνουμε περιπτώσεις:
- (α') *Αν $\mathbf{r}(A) = n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και άρα $|A| \neq 0$. Τότε από τη σχέση $(*)$ προκύπτει ότι:*
$$|\mathsf{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$
- (β') *Αν $\mathbf{r}(A) < n$, τότε προφανώς $|A| = 0$ και από την Άσκηση 4 έχουμε $\mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) \leq 1 \neq n$. Ιδιαίτερα θα έχουμε $|\mathsf{adj}(A)| = 0$ και τότε η ζητούμενη σχέση (†) ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.*

(2) *Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος της σχέσης (†) με τον πίνακα A, και λαμβάνοντας υπ όψιν το μέρος (1), θα έχουμε:*
$$\mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) \cdot \mathsf{adj}(A) \cdot A = |\mathsf{adj}(A)| A \implies \mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A))|A|\, I_n = |A|^{n-1} A \implies$$
$$|A|\, \mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) = |A|^{n-1} A \tag{$**$}$$
Διακρίνουμε περιπτώσεις:
- (α') *Αν $\mathbf{r}(A) = n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και άρα $|A| \neq 0$. Προφανώς τότε θα έχουμε:*
$$\mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) = |A|^{n-2} A$$
- (β') *Αν $\mathbf{r}(A) < n-1$, τότε $|A| = 0$ από την Άσκηση 4 έπεται ότι $\mathsf{adj}(A) = O$ και άμεσα έχουμε $\mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) = O$. Προφανώς τότε η σχέση $\mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) = |A|^{n-2} A$ ικανοποιείται τετριμμένα.*
- (γ') *Αν $\mathbf{r}(A) = n-1$, διακρίνουμε περιπτώσεις:*
  - (i) *$n = 2$. Τότε $|A|^{n-2} = |A|^0 = 1$ και επειδή, όπως μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα, $\mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) = A$, η ζητούμενη σχέση ισχύει.*
  - (ii) *Αν $n > 2$. Τότε θα έχουμε $|A| = 0$ και από την Άσκηση 4 έπεται ότι $\mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 1 < n-1$. Από την ίδια Άσκηση 4 έπεται τότε ότι $\mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) = O$, και άρα η ζητούμενη σχέση ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.*

(3) *Προκύπτει άμεσα θεωρώντας ορίζουσες στη σχέση του μέρους (2).*

Υπενθυμίζουμε ότι η βαθμίδα ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ μπορεί να προσδιορισθεί και με χρήση ελασσόνων οριζουσών: $\mathbf{r}(A) = k$ αν και μόνον αν υπάρχει μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης k στον A και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης $k+1$ οι οποίες την περιβάλλουν είναι ίσες με μηδέν.

Άσκηση 7. *Να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 4 στον A:*
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1,\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 2\Gamma_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{στοιχεία της δεύτερης γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα}}$$
$$= -(-1) \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 7\Gamma_2} \begin{vmatrix} 0 & 9 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{στοιχεία της δεύτερης γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα}} - \begin{vmatrix} 9 & -9 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-45+72) = -27 \neq 0$$

Επομένως βρήκαμε μια ελάσσονα ορίζουσα τάξης 4 του A η οποία είναι μη-μηδενική και επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες ορίζουσες τάξης 5 στον A, έπεται ότι:

$$\mathbf{r}(A) = 4$$

Άσκηση 8. *Να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3 στον A:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Υπολογίζουμε τις ελάσσονες ορίζουσες τάξης 4 οι οποίες πλαισιώνουν την Δ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

όπου η τελευταία ορίζουσα είναι ίση με μηδέν διότι ο πίνακας έχει την τελευταία του γραμμή ίση με μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1]{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_4 \to -\Gamma_4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

όπου αναπτύξαμε κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής και η τελευταία ορίζουσα είναι ίση με μηδέν διότι ο πίνακας έχει την πρώτη και την τρίτη γραμμή του ίσες.

Επομένως βρήκαμε μια ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3 του A η οποία είναι μη-μηδενική και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 4 οι οποίες την πλαισιώνουν είναι ίσες με μηδέν. Άρα:

$$\mathbf{r}(A) = 3$$

Άσκηση 9. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 2, την:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

Θεωρούμε της ελάσσονες ορίζουσες οι οποίες πλαισιώνουν την Δ:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda - 3)(\lambda + 5)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda - 9 = 3(\lambda - 3)$$

Αν $\lambda = 3$, τότε έπεται ότι $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ και επομένως ο πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 2 και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 που την πλαισιώνουν είναι ίσες με μηδέν. Επομένως $\mathbf{r}(A) = 2$.

Αν $\lambda \neq 3$, τότε $\Delta_2 \neq 0$ και άρα ο πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3. Επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες ορίζουσες τάξης 4, έπεται ότι $\mathbf{r}(A) = 3$.

Άρα:

$$\mathbf{r}(A) = \begin{cases} 2, & \textit{αν } \lambda = 3 \\ 3, & \textit{αν } \lambda \neq 3 \end{cases}$$

Άσκηση 10. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα A:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xlongequal{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xlongequal[\Gamma_4 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -6 \end{pmatrix} \xlongequal[\Gamma_4 \to -\frac{1}{6}\Gamma_2]{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xlongequal{\Gamma_1 \to -\Gamma_2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to 2\Gamma_4} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

και τότε, επειδή η βαθμίδα ενός πίνακα δεν αλλάζει μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του πίνακα, προφανώς θα έχουμε: $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A')$.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A' έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3, την:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 17 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\textit{της πρώτης γραμμής}]{\textit{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} (-1)\begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(35 - 34) = -1 \neq 0$$

Ο πίνακας A' έχει μόνο μια ελάσσονα ορίζουσα τάξης 4 την:

$$|A'| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\textit{της πρώτης γραμμής}]{\textit{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} \lambda\Delta = -\lambda$$

Αν $\lambda = 0$, τότε ο πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3 και η μοναδική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 4 η οποία την περιβάλλει είναι ίση με μηδέν. Άρα $\mathbf{r}(A) = 3$.

Αν $\lambda \neq 0$, τότε ο 4×4 πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 4. Άρα $\mathbf{r}(A) = 4$.

Επομένως:

$$\mathbf{r}(A) = \begin{cases} 3, & \textit{αν } \lambda = 0 \\ 4, & \textit{αν } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 11. *Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & b+1 & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{pmatrix}$$

Λύση. *Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα A:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & b+1 & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{pmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{pmatrix} = A'$$

και προφανώς $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A')$.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A' *έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης* 2, *την:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Υπολογίζουμε τις δύο ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 *οι οποίες πλαισιώνουν την* Δ*:*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ b & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}{\underset{\text{της δεύτερης γραμμής}}{=\!=\!=\!=\!=}} (-b)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ b & 3 \end{vmatrix} = -b(6-b)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6a \\ 0 & b & 4+6a \\ 3 & 2 & 3a \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 - 3\Gamma_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6a \\ 0 & b & 4+6a \\ 0 & -1 & 21a \end{vmatrix} \overset{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}{\underset{\text{της πρώτης στήλης}}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} b & 4+6a \\ -1 & 21a \end{vmatrix} = 21ab+6a+4$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) *Αν* $b \neq 0$ *και* $b \neq 6$, *τότε ο* A *περιέχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης* 3, *την* Δ_1, *και επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες ορίζουσες τάξης* 4, *έπεται ότι* $\mathbf{r}(A) = 3$.

(2) *Έστω* $b = 0$.

 (α΄) *Αν* $a = -\frac{2}{3}$, *τότε ο πίνακας* A' *έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης* 2, *την* Δ, *και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης* 3 *που την πλαισιώνουν, δηλαδή οι* Δ_1 *και* Δ_2, *είναι ίσες με μηδέν. Επομένως:* $\mathbf{r}(A) = 2$.

 (β΄) *Αν* $a \neq -\frac{2}{3}$, *τότε* $\Delta_2 \neq 0$ *και ο* A *περιέχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης* 3. *Επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες ορίζουσες τάξης* 4, *έπεται ότι* $\mathbf{r}(A) = 3$.

(3) *Έστω* $b = 6$.

 (α΄) *Αν* $a = -\frac{1}{33}$, *τότε* $\Delta_2 = 0$, *και ο πίνακας* A' *έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης* 2, *την* Δ, *και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης* 3 *που την πλαισιώνουν, δηλαδή οι* Δ_1 *και* Δ_2, *είναι ίσες με μηδέν. Επομένως:* $\mathbf{r}(A) = 2$.

 (β΄) *Αν* $a \neq -\frac{1}{33}$, *τότε* $\Delta_2 \neq 0$ *και ο* A *περιέχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης* 3. *Επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες ορίζουσες τάξης* 4, *έπεται ότι* $\mathbf{r}(A) = 3$.

Συνοψίζοντας, έχουμε:

$$\mathbf{r}(A) = \begin{cases} 2, & \text{αν είτε } (b = 0 \text{ και } a = -\frac{2}{3}) \text{ είτε } (b = 6 \text{ και } a = -\frac{1}{33}) \\ 3, & \text{αν είτε } (b \neq 0 \text{ και } b \neq 6) \text{ είτε } (b = 0 \text{ και } a \neq -\frac{2}{3}) \text{ είτε } (b = 6 \text{ και } a \neq -\frac{1}{33}) \end{cases}$$

Άσκηση 12. *Να βρεθούν οι τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$, *για τις οποίες το γραμμικό σύστημα*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \lambda x + (3\lambda+4)y + 2(\lambda+1)z = 0 \\ \lambda x + (4\lambda+2)y + (\lambda+4)z = 0 \\ 2x + (3\lambda+4)y + 3\lambda z = 0 \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό, και ακολούθως να λυθεί.

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος είναι*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda+4 & 2(\lambda+1) \\ \lambda & 4\lambda+2 & \lambda+4 \\ 2 & 3\lambda+4 & 3\lambda \end{pmatrix}$$

Έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3\lambda+4 & 2(\lambda+1) \\ \lambda & 4\lambda+2 & \lambda+4 \\ 2 & 3\lambda+4 & 3\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \to \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} \begin{vmatrix} 6\lambda+6 & 3\lambda+4 & 2(\lambda+1) \\ 6\lambda+6 & 4\lambda+2 & \lambda+4 \\ 6\lambda+6 & 3\lambda+4 & 3\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 6(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 3\lambda+4 & 2(\lambda+1) \\ 1 & 4\lambda+2 & \lambda+4 \\ 1 & 3\lambda+4 & 3\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2-\Gamma_1} 6(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 3\lambda+4 & 2(\lambda+1) \\ 0 & \lambda-2 & -\lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 6(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

(1) *Για* $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$ *έχουμε* $|A| \neq 0$ *και άρα το σύστημα είναι Cramer. Συνεπώς έχει μοναδική λύση τη μηδενική αφού είναι ομογενές.*

(2) Έστω $\lambda = -1$. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} -x+y=0 \\ -x-2y+3z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = 2$ αφού

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Συνεπώς το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ -x-2y=-3z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x=y=z$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε τη γενική λύση:

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

(3) Έστω $\lambda = 2$. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 2x+10y+6z=0 \\ 2x+10y+6z=0 \\ 2x+10y+6z=0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Προφανώς η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = 1$ και λύνοντας έχουμε $x = -5y - 3z$. Θέτουμε $y = \kappa$ και $z = \lambda$. Τότε έχουμε τη γενική λύση: $\{(-5\kappa - 3\lambda, \kappa, \lambda) \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Άσκηση 13. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6=0 \\ x_2+x_5-x_6=1 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+2x_5-2x_6+x_7=1 \\ x_1+x_3+x_4=-\lambda \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος (Σ) είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

Από την πρώτη, δεύτερη και έβδομη στήλη του πίνακα A έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Συνεπώς βρήκαμε μια ορίζουσα τάξης 3 διάφορη του 0 έτσι ώστε όλες οι ελάσσονες ορίζουσες ορίζουσες τάξης 4 που την περιβάλλουν είναι 0. 'ρα η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = 3$. Στην συνέχεια θα βρούμε την βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$. Έχουμε:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4+\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) *Αν $\lambda \neq 1$ τότε η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ είναι $\mathbf{r}(A|B) = 4$ διότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda) \neq 0$$

'ρα στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\mathbf{r}(A) = 3 \neq 4 = \mathbf{r}(A|B)$$

και επομένως το σύστημα (Σ) δεν είναι συμβιβαστό.

(2) *Έστω $\lambda = 1$. Τότε $\mathbf{r}(A|B) = 3$ αφού*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 4 που την περιβάλλουν είναι 0. Συνεπώς έχουμε $\mathbf{r}(A) = 3 = \mathbf{r}(A|B)$ και άρα το (Σ) είναι συμβιβαστό. Έστω $\Lambda(\Sigma_0)$ ο υπόχωρος των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς (Σ_0). Τότε θα έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda(\Sigma_0) = 7 - \mathbf{r}(A) = 7 - 3 = 4$ παραμέτρους στις λύσεις. Θέτουμε $x_3 = p$, $x_4 = q$, $x_5 = r$ και $x_6 = s$ όπου $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Τότε το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p-q-r+s \\ x_2 = 1-r+s \\ x_1 + 2x_2 + x_7 = 1-p-q-2r+2s \end{cases}$$

Τότε αντικαθιστώντας την $x_2 = 1-r+s$ στη πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $x_1 = -1-p-q$ και από την τελευταία εξίσωση έπεται ότι $x_7 = 0$. Επομένως η γενική λύση του συστήματος (Σ) είναι

$$\begin{cases} x_1 = -1-p-q \\ x_2 = 1-r+s \\ x_3 = p \\ x_4 = q \qquad\qquad p,\ q,\ r,\ s\ \in \mathbb{R} \\ x_5 = r \\ x_6 = s \\ x_7 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 14. *Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha \\ x + \beta y + z = \beta \\ x + y + \gamma z = \gamma \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος (Σ) είναι*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζουμε ότι η ορίζουσα τού πίνακα A είναι

$$|A| = \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις αναφορικά με τις τιμές που μπορεί να λάβει η βαθμίδα του πίνακα A.

(1) $\boxed{\mathbf{r}(A)=3}$ *Αν η βαθμίδα του πίνακα A είναι ίση με 3 τότε ισοδύναμα έχουμε $|A|\neq 0$. Συνεπώς το σύστημα είναι Cramer και άρα έχουμε μοναδική λύση:*

$$x=\frac{\alpha\beta\gamma-2\beta\gamma+\beta+\gamma-\alpha}{|A|},\quad y=\frac{\alpha\beta\gamma-2\alpha\gamma+\alpha+\gamma-\beta}{|A|},\quad z=\frac{\alpha\beta\gamma-2\alpha\beta+\alpha+\beta-\gamma}{|A|}$$

(2) $\boxed{\mathbf{r}(A)=1}$ *Ο πίνακας A έχει βαθμίδα ίση με 1 αν και μόνο αν*

$$\begin{vmatrix}1 & \beta\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & \gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0 \iff \alpha=\beta=\gamma=1$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αρκεί να ελέγξουμε μόνο τις παραπάνω ορίζουσες ώστε $\mathbf{r}(A)=1$. Τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x+y+z=1$ της οποίας η γενική λύση είναι:

$$x=1-\kappa-\lambda,\ \ y=\kappa,\ \ z=\lambda,\ \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$$

(3) $\boxed{\mathbf{r}(A)=2}$ *Διακρίνουμε περιπτώσεις:*

(α΄) *Αν $\alpha=\beta=\gamma=1$ τότε από το (2) η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A)=1$, το οποίο είναι άτοπο.*

(β΄) *Έστω $\alpha\neq 1,\ \beta\neq 1,\ \gamma\neq 1$ και ας υποθέσουμε ότι το (Σ) είναι συμβιβαστό. Τότε $\mathbf{r}(A|B)=2=\mathbf{r}(A)$ όπου ο επαυξημένος πίνακας του A είναι*

$$(A|B)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1 & \alpha\\ 1 & \beta & 1 & \beta\\ 1 & 1 & \gamma & \gamma\end{pmatrix}$$

Τότε η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix}1 & \beta\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$$

αφού το $\beta\neq 1$, και άρα όλες οι ελάσσονες ορίζουσες που την περιβάλλουν θα πρέπει να είναι ίσες με 0, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \beta & 1\\ 1 & 1 & \gamma\end{vmatrix}=0=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & \alpha\\ 1 & \beta & \beta\\ 1 & 1 & \gamma\end{vmatrix}$$

Υπολογίζοντας τις παραπάνω ορίζουσες έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+2=0\\ \alpha\beta\gamma+\alpha+\beta-\gamma-2\alpha\beta\end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\alpha\beta\gamma=\alpha+\beta+\gamma-2$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\alpha+\beta-\alpha\beta=1 \implies (\alpha-1)(1-\beta)=0 \implies \alpha=1\ \ \text{ή}\ \ \beta=1$$

που είναι άτοπο από την υπόθεση μας. ’ρα δεν γίνεται τα α, β και γ να είναι διάφορα του 1 όταν η βαθμίδα είναι $\mathbf{r}(A)=2$.

(γ΄) *Έστω $\alpha=1,\ \beta\neq 1,\ \gamma\neq 1$. Τότε*

$$|A|=\alpha\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+2 \xRightarrow{\alpha=1} (\beta-1)(\gamma-1)=0$$

και άρα $\beta=1$ ή $\gamma=1$, που είναι άτοπο από την υπόθεση που ξεκινήσαμε. Επομένως υποθέτωντας ότι μόνο ένα από τα α,β και γ είναι μηδέν τότε καταλήξαμε σε άτοπο. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $\alpha\neq 1,\ \beta=1,\ \gamma\neq 1$ ή $\alpha\neq 1,\ \beta\neq 1,\ \gamma=1$.

(δ΄) *Υποθέτουμε ότι μόνο δύο από τα α,β και γ είναι ίσα με 1. Έστω $\alpha\neq 1,\ \beta=1,\ \gamma=1$. Τότε έχουμε το σύστημα:*

$$\begin{cases}\alpha x+y+z=\alpha\\ x+y+z=1\end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\alpha-1\neq 0$$

’ρα το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\begin{cases} \alpha x + y = \alpha - z \\ x + y = 1 - z \end{cases}$$

που είναι σύστημα Cramer ως προς τα x και y. Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι: $x = 1,\ y = -\kappa,\ z = \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}$. Παρόμοια εργαζόμαστε αν $\alpha = 1,\ \beta \neq 1,\ \gamma = 1$ ή $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma \neq 1$.

Άσκηση 15. *Να λυθεί το σύστημα* ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος* (Σ) *είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{\underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

(1) *Για* $\lambda \neq 1$ *και* $\lambda \neq -1$ *έχουμε* $|A| \neq 0$ *και άρα το σύστημα είναι Cramer. Συνεπώς έχουμε μοναδική λύση:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \cdots = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \cdots = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}}{-(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \cdots = -\frac{4}{(\lambda + 1)}$$

(2) *Έστω* $\lambda = 1$. *Τότε έχουμε το σύστημα*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A *είναι* $\mathbf{r}(A) = 2$ *διότι υπάρχει μια ορίζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Επίσης, η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ είναι $\mathbf{r}(A|B) = 2$ διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό αφού $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A|B)$ και άρα το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ x + y = 1 - z \end{cases} \Longrightarrow 2x = 4 - 2z \Longrightarrow x = 2 - z \Longrightarrow y = -1$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$. Τότε η γενική λύση του (Σ) είναι

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

(3) *Έστω $\lambda = -1$. Τότε έχουμε το σύστημα*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

όπου παρατηρούμε από την πρώτη και τρίτη εξίσωση ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση 16. *Πότε το σύστημα*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + 5y - 2z + 6w = \kappa \\ 4x - 3y + 7z + 12w = \lambda \\ 5x - 44y + 35z - 6w = \mu \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό; Αν το (Σ) είναι συμβιβαστό, ποιά είναι η γενική του λύση;

Λύση. *Ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 \\ 4 & -3 & 7 & 12 \\ 5 & -44 & 35 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 & \kappa \\ 4 & -3 & 7 & 12 & \lambda \\ 5 & -44 & 35 & -6 & \mu \end{pmatrix}$$

Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A|B)$. Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = 2$ διότι υπάρχει μια ορίζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

και οι ορίζουσες τρίτης τάξης που την περιβάλλουν είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \\ 5 & -44 & 35 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & 12 \\ 5 & -44 & -6 \end{vmatrix}$$

Συνεπώς για να ισχύει $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A|B)$ θα πρέπει

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & \kappa \\ 4 & -3 & \lambda \\ 5 & -44 & \mu \end{vmatrix} = 0 \iff -\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$$

'ρα το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν:

$$-\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$$

Υποθέτουμε ότι: $-\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$. Τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό και η γενική του λύση θα εξαρτάται από $4 - \mathbf{r}(A) = 4 - 2$ παραμέτρους. Επειδή η ελάσσονα ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

δίνουμε αυθαίρετες τιμές στα z, w: $z = r$ και $w = s$, και θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα μα αγνώστους x, y:

$$(\Sigma') \quad \begin{cases} x + 5y = \kappa + 2r - 6s \\ 4x - 3y = \lambda - 7r - 12s \end{cases}$$

το οποίο είναι σύστημα Cramer ως προς x, y. Άρα η γενική του (Σ') λύση είναι:

$$x \;=\; \frac{\begin{vmatrix} \kappa + 2r - 6s & 5 \\ \lambda - 7r - 12s & -3 \end{vmatrix}}{-23} \;=\; \cdots \;=\; \frac{-29r - 78s + 3\kappa + 5\lambda}{23}$$

$$y \;=\; \frac{\begin{vmatrix} 1 & \kappa + 2r - 6s \\ 4 & \lambda - 7r - 12s \end{vmatrix}}{-23} \;=\; \cdots \;=\; \frac{15r + 12s - \lambda + 4\kappa}{23}$$

Άρα η γενική λύση του (Σ), όταν $-\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$, είναι η εξής:

$$\begin{cases} x \;=\; \dfrac{-29r - 78s + 3\kappa + 5\lambda}{23} \\[2ex] y \;=\; \dfrac{15r + 12s - \lambda + 4\kappa}{23} \\[2ex] z \;=\; r \\[2ex] w \;=\; s \end{cases} \qquad (r, s \in \mathbb{R})$$

Άσκηση 17. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (Σ) είναι οι εξής:

$$A = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα A κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, βλέπουμε έυκολα ότι:

$$|A| = -2abc$$

(1) Αν $a \neq 0$ και $b \neq 0$ και $c \neq 0$, τότε $|A| \neq 0$ ή ισοδύναμα $\mathbf{r}(A) = 3$, το σύστημα (Σ) είναι σύστημα Cramer και άρα έχει μοναδική λύση, η οποία είναι η εξής:

$$x \;=\; \frac{\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix}}{-2abc} \;=\; \cdots \;=\; \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$y \;=\; \frac{\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix}}{-2abc} \;=\; \cdots \;=\; \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$z \;=\; \frac{\begin{vmatrix} b & a & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}}{-2abc} \;=\; \cdots \;=\; \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(2) Υποθέτουμε ότι $a = 0$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α′) *Αν* $b = 0$*, τότε, από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι* $c = 0$ *και άρα θα έχουμε* $a = b = c = 0$*. Τότε* $A = (A|B) = O$*, και προφανώς το σύστημα* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από τρεις παραμέτρους:*

$$x = r, \quad y = s, \quad z = t, \quad \text{όπου} \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

(β′) *Αν* $b \neq 0$*, τότε αναγκαστικά θα έχουμε* $c \neq 0$ *διότι διαφορετικά από την δεύτερη εξίσωση θα είχαμε* $b = 0$ *και αυτό είναι άτοπο. Άρα* $a = 0$ *και* $b \neq 0 \neq c$*. Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα* $(A|B)$*:*

$$(A|B) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & b \\ 0 & c & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \frac{1}{c}\Gamma_2,\ \Gamma_3 \to \frac{1}{c}\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \frac{1}{b}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c/b \\ 1 & 0 & 0 & b/c \\ 0 & 1 & b/c & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c/b \\ 0 & 0 & 0 & b/c - c/b \\ 0 & 1 & b/c & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma') \quad \begin{cases} x = \dfrac{c}{b} \\[2ex] 0 = \dfrac{b}{c} - \dfrac{c}{b} \\[2ex] y + \dfrac{b}{c} z = 0 \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ).

(i) *Αν* $b/c \neq c/b$*, δηλαδή αν* $b^2 \neq c^2$ *ή ισοδύναμα αν* $b \neq c$ *και* $b \neq -c$*, τότε το σύστημα* (Σ')*, άρα και το* (Σ)*, είναι αδύνατο, όπως προκύπτει από την δεύτερη εξίσωση του* (Σ').

(ii) *Αν* $b/c = c/b$*, δηλαδή αν* $b^2 = c^2$ *ή ισοδύναμα αν* $b = c$ *ή* $b = -c$*, τότε θα έχουμε:*

- *Αν* $b = c$*. Τότε ο πίνακας* $(A|B)$ *και το σύστημα* (Σ) *παίρνουν τη μορφή*

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies (\Sigma) \ \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = r \\ z = -r \end{cases} \quad \text{όπου} \quad r \in \mathbb{R}$$

- *Αν* $b = -c$*. Τότε ο πίνακας* $(A|B)$ *και το σύστημα* (Σ) *παίρνουν τη μορφή*

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies (\Sigma) \ \begin{cases} x = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = r \\ z = r \end{cases} \quad \text{όπου} \quad r \in \mathbb{R}$$

(3) *Η περίπτωση* $b = 0$ *αντιμετωπίζεται ανάλογα.*

(4) *Η περίπτωση* $c = 0$ *αντιμετωπίζεται ανάλογα.*

Συνοψίζοντας, θα έχουμε:

(1) *Αν όλα τα* a, b, c *είναι μη-μηδενικά, τότε το σύστημα* (Σ) *έχει μοναδική λύση.*

(2) *Αν όλα τα* a, b, c *είναι ίσα με μηδέν, τότε το σύστημα* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από τρείς παραμέτρους.*

(3) *Αν δύο από τα τα* a, b, c *είναι ίσα με μηδέν και το τρίτο είναι μη-μηδενικό, τότε το σύστημα* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(4) *Αν δύο από τα* a, b, c *είναι μη-μηδενικά και το τρίτο είναι ίσο με μηδέν, τότε το σύστημα* (Σ)*:*

  (α′) *έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο αν τα δύο μη-μηδενικά στοιχεία είναι ίσα ή αντίθετα,*

  (β′) *είναι αδύνατο αν τα δύο μη-μηδενικά στοιχεία δεν είναι ίσα ή αντιθετα.*

Άσκηση 18. *Αν $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \kappa \\ x + y + \lambda^2 z = \kappa^2 \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας A και ο επαυξημένος πίνακας $(A|B)$ του συστήματος (Σ) είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \kappa \\ 1 & 1 & \lambda^2 & \kappa^2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα του πίνακα A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

(1) *Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$, τότε το (Σ) είναι ένα σύστημα Cramer και επομένως έχει μοναδική λύση:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \kappa & \lambda & 1 \\ \kappa^2 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)} = \cdots = \frac{\lambda^2 - 1 - (\kappa^2 - 1) - (\kappa - 1)(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & \kappa^2 & \lambda^2 \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)} = \cdots = \frac{\kappa - 1}{\lambda - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \kappa \\ 1 & 1 & \kappa^2 \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)} = \cdots = -\frac{(\kappa - 1)(\lambda - 2)}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1}$$

(2) *Έστω $\lambda = 1$. Τότε το σύστημα (Σ) είναι το:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = \kappa \\ x + y + z = \kappa^2 \end{cases}$$

(α΄) *Αν $\kappa \neq 1$, τότε προφανώς το (Σ) είναι αδύνατο.*

(β΄) *Αν $\kappa = 1$, τότε το (Σ) εκφυλίζεται στην εξίσωση: $x + y + z = 1$ και άρα το (Σ) έχει άπειρες λύσεις:*

$$\begin{cases} x = 1 - r - s \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3) *Έστω $\lambda = -1$. Τότε το σύστημα (Σ) είναι το:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = \kappa \\ x + y + z = \kappa^2 \end{cases}$$

Ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \kappa \\ 1 & 1 & 1 & \kappa^2 \end{pmatrix}$$

Προφανώς $\mathbf{r}(A) = 2$ διότι ο πίνακς A έχει την μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

και η μοναδική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3 είναι η ορίζουσα του $A = 0$. Για να είναι το (Σ) συμβιβαστό, θα πρέπει $\mathbf{r}(A|B) = 2$. Προφανώς αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \kappa \\ 1 & 1 & \kappa^2 \end{vmatrix} = -2(\kappa^2 - 1) = 0$$

Άρα:

(α΄) *Αν $\kappa \neq 1$ και $\kappa \neq -1$, τότε προφανώς $\mathbf{r}(A|B) = 3 \neq 2 = \mathbf{r}(A)$ και επομένως το (Σ) είναι αδύνατο.*

(β΄) *Έστω $\kappa = 1$. Τότε το σύστημα (Σ) είναι το*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

του οποίου η γενική λύση είναι:

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = 0 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(γ΄) *Έστω $\kappa = -1$. Τότε το σύστημα (Σ) είναι το*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

του οποίου η γενική λύση είναι:

$$\begin{cases} x = -1 - r \\ y = 1 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άσκηση 19. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + \lambda z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = \lambda \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας A και ο επαυξημένος πίνακας $(A|B)$ του συστήματος (Σ) είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τη βαθμίδα του A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Προφανώς $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A')$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) *Αν $\lambda = 1$, τότε ο πίνακας A' είναι*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και προφανώς $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A') = 1$. Από την άλλη πλευρά:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και προφανώς $\mathbf{r}(A|B) = 1$. Άρα το (Σ) είναι συμβιβαστό, το (Σ) εκφυλίζεται στην εξίσωση $x+y+z = 1$, και η γενική λύση του είναι:

$$\begin{cases} x = 1 - r - s \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2) *Έστω $\lambda \neq 1$. Τότε θεωρούμε τον πίνακα A':*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{1-\lambda}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{1-\lambda}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''$$

Προφανώς τότε: $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A') = \mathbf{r}(A'')$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α΄) *Αν $\lambda \neq -1$, τότε ο πίνακας A'' έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3, την*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 1 + \lambda \neq 0$$

και δεν υπάρχει ελάσσονα ορίζουσα τάξης 4. Άρα $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A'') = 3$. Επομένως το (Σ) είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν $\mathbf{r}(A|B) = 3$. Υπολογίζουμε τη βαθμίδα του $(A|B)$, χρησιμοποιώντας ότι $\lambda \neq 1$:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ \lambda & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{1-\lambda}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{1-\lambda}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''' \xrightarrow{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''''$$

Προφανώς $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A') = \mathbf{r}(A'') = \mathbf{r}(A'''')$. *Άρα το* (Σ) *είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν* $\mathbf{r}(A|B) = \mathbf{r}(A'''') = 3$. *Η βαθμίδα του* A''' *είναι* 3 *διότι ο* A'''' *περιέχει την μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda + 1 \neq 0$$

Άρα το (Σ) *είναι συμβιβαστό και, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις προηγηθείσες στοιχειώδεις πράξεις στος γραμμές του* $(A|B)$, *είναι ισοδύναμο με το σύστημα (με επαυξημένο πίνακα τον* A'''*):*

$$(\Sigma') \quad \begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ y = -1 \\ \lambda y + (\lambda+1)z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - \lambda + \lambda z = 1 \\ y = -1 \\ -\lambda + (\lambda+1)z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + \lambda z = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ (\lambda+1)z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Επειδή $\lambda + 1 \neq 0$, *θα έχουμε ισοδύναμα:*

$$\Longrightarrow \begin{cases} x + \lambda z = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Άρα το (Σ) *έχει μοναδική λύση, την παραπάνω.*

(β΄) *Αν* $\lambda = -1$, *τότε το* (Σ) *είναι το*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y - z = -1 \\ -x - y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \qquad \text{ή ισοδύναμα} \quad (\Sigma) \quad \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι συμβιβαστό (είναι σύστημα Cramer ως προς x, y*) εύκολα βλέπουμε ότι η γενική του λύση είναι:*

$$\begin{cases} x = r \in \mathbb{R} \\ y = -1 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Συνοψίζοντας:

(1) *Αν* $\lambda = 1$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό και η γενική λύση του είναι:*

$$\begin{cases} x = 1 - r - s \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2) *Αν* $\lambda \neq 1$ *και* $\lambda \neq -1$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό και έχει μοναδκή λύση:*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

(3) *Αν* $\lambda \neq 1$ *και* $\lambda = -1$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό και η γενική λύση του είναι:*

$$\begin{cases} x = r \in \mathbb{R} \\ y = -1 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άσκηση 20. *Αν* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *να λυθεί το ακόλουθο σύστημα*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας A του συστήματος (Σ) είναι*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζουμε ότι η ορίζουσα τού πίνακα A είναι

$$|A| = abc - a - b - c + 2$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις αναφορικά με τις τιμές που μπορεί να λάβει η βαθμίδα του πίνακα A.

(1) $\boxed{\mathbf{r}(A) \neq 0}$ *Προφανώς $\mathbf{r}(A) \neq 0$ διότι $A \neq 0$.*

(2) $\boxed{\mathbf{r}(A) = 3}$ *Η βαθμίδα του πίνακα A είναι ίση με 3 αν και μόνον αν $|A| \neq 0$. Σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα είναι Cramer και άρα έχουμε μοναδική λύση:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{(b-1)(c-1)}{|A|} \\[2ex] y = \dfrac{(a-1)(c-1)}{|A|} \\[2ex] z = \dfrac{(a-1)(b-1)}{|A|} \end{cases}$$

(3) $\boxed{\mathbf{r}(A) = 1}$ *Ο πίνακας A έχει βαθμίδα ίση με 1 αν και μόνο αν*

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 1$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αρκεί να ελέγξουμε μόνο τις παραπάνω ορίζουσες ώστε $\mathbf{r}(A) = 1$. Τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x + y + z = 1$ της οποίας η γενική λύση είναι:

$$\begin{cases} x = 1 - \kappa - \lambda \\ y = \kappa \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(4) $\boxed{\mathbf{r}(A) = 2}$ *Ο πίνακας A έχει βαθμίδα 2 αν και μόνον αν υπάρχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 2 στον A και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 του A είναι ίσες με μηδέν. Η μοναδική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3 του A είναι η $|A|$, και άρα θα πρέπει $|A| = 0$. Οι δυνατές ελάσσονες ορίζουσες τάξης 2 στον A είναι:*

$$\mathbf{1}.\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab - 1, \quad \mathbf{2}.\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} = ac - 1, \quad \mathbf{3}.\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} = bc - 1$$

$$\mathbf{4}.\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1, \quad \mathbf{5}.\ \Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 1 - b, \quad \mathbf{6}.\ \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} = c - 1$$

Θα εξετάσουμε κάθε μια εκ των παραπάνω έξι περιπτώσεων ξεχωριστά. Οι τρεις πρώτες περιπτώσεις είναι παρόμοιες, και επίσης οι τρεις τελευταίες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.

(αʹ) *Αν $|A| = 0$ και $\Delta_1 = ab - 1 \neq 0$, τότε $\mathbf{r}(A) = 2$ και επομένως το (Σ) είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν $\mathbf{r}(A|B) = 2$ αν και μόνιν αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 στον $(A|B)$ οι οποίες πλαισιώνουν την Δ_1 είναι ίσες με μηδέν. Οι μόνες ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 που πλαισιώνουν την Δ_1 στον επαυξημένο πίνακα $(A|B)$ είναι οι:*

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)$$

Άρα θα πρέπει:

$$(a = 1 \quad \text{και} \quad abc - a - b - c + 2 = 0) \quad \text{ή} \quad (b = 1 \quad \text{και} \quad abc - a - b - c + 2 = 0) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (a=1 \quad \textit{και} \quad bc-1-b-c+2=0) \quad \textit{ή} \quad (b=1 \quad \textit{και} \quad ac-a-1-c+2=0) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (a=1 \quad \textit{και} \quad (b-1)(c-1)=0) \quad \textit{ή} \quad (b=1 \quad \textit{και} \quad (a-1)(c-1)=0) \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad \textit{ή} \quad \begin{cases} a=1 \\ c=1 \end{cases} \quad \textit{ή} \quad \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \quad \textit{ή} \quad \begin{cases} b=1 \\ c=1 \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad \textit{ή} \quad \begin{cases} a=1 \\ c=1 \end{cases} \quad \textit{ή} \quad \begin{cases} b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

Η πρώτη περίπτωση απορρίπτεται διότι αν $a=1=b$, *τότε* $\Delta_1 = ab-1=0$ *το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, αν* $|A| = \Delta_1 = ab-1=0$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν ισχύει μια εκ των δύο τελαυταίων παραπάνω περιπτώσεων. Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα, κάθε μια εκ των παραπάνω δύο τελευταίων περιπτώσεων συνεπάγει ότι* $|A|=0$, *έπεται ότι:*

$$\Delta_1 = ab-1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ c=1 \end{cases} \quad \textit{ή} \quad \begin{cases} b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

Προφανώς αν $a=1=c$, *και* $b \neq 1$, *τότε:* $ab-1=b-1 \neq 0$ *και επομένως* $\Delta_1 = ab-1 \neq 0$. *Παρόμοια, αν* $b=1=c$ *και* $a \neq 1$, *τότε* $\Delta_1 = ab-1 = a-1 \neq 0$. *Επομένως δείξαμε ότι:*

$$\Delta_1 \neq 0 \quad \textit{και} \quad \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b\neq 1 \\ c=1 \end{cases} \quad \textit{ή} \quad \begin{cases} a\neq 1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

Άρα:

(i) *Αν* $a=1=c$ *και* $b \neq 1$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+by+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \qquad \textit{δηλαδή} \quad (\Sigma) \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+by+z=1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x=1-r \\ y=0 \\ z=r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(ii) *Αν* $b=1=c$ *και* $a \neq 1$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \qquad \textit{δηλαδή} \quad (\Sigma) \quad \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1-r \\ z=r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(β΄) *Παρόμοια εργαζόμενοι:*

$$\Delta_2 \neq 0 \quad \textit{και} \quad \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a\neq 1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \quad \textit{ή} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c\neq 1 \end{cases}$$

Άρα:

(i) *Αν* $b = 1 = c$ *και* $a \neq 1$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \textit{δηλαδή} \quad (\Sigma) \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - r \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(ii) *Αν* $a = 1 = b$ *και* $c \neq 1$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases} \qquad \textit{δηλαδή} \quad (\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

(γ′) *Παρόμοια εργαζόμενοι:*

$$\Delta_3 \neq 0 \quad \textit{και} \quad \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c \neq 1 \end{cases} \qquad \textit{ή} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Άρα:

(i) *Αν* $a = 1 = b$ *και* $c \neq 1$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases} \qquad \textit{δηλαδή} \quad (\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = r \in \mathbb{R} \\ y = 1 - r \\ z = 0 \end{cases}$$

(ii) *Αν* $a = 1 = c$ *και* $b \neq 1$, *τότε το* (Σ) *είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \textit{δηλαδή} \quad (\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = 0 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(δ′) *Παρόμοια εργαζόμενοι:*

$$\Delta_4 \neq 0 \quad \textit{και} \quad \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a \neq 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Αυτή η περίπτωση έχει αναλυθεί στο (α′).

(ε΄) *Παρόμοια εργαζόμενοι:*

$$\Delta_5 \neq 0 \quad \textit{και} \quad \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Αυτή η περίπτωση έχει αναλυθεί στο (α΄).

(ϛ΄) *Παρόμοια εργαζόμενοι:*

$$\Delta_6 \neq 0 \quad \textit{και} \quad \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c \neq 1 \end{cases}$$

Αυτή η περίπτωση έχει αναλυθεί στο (β΄).

Συνοψίζουμε: *Το σύστημα* (Σ) *είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:*

(1) $\boxed{abc - a - b - c + 2 \neq 0}$, *και τότε το* (Σ) *έχει μοναδική λύση:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{(b-1)(c-1)}{abc - a - b - c + 2} \\[2ex] y = \dfrac{(a-1)(c-1)}{abc - a - b - c + 2} \\[2ex] z = \dfrac{(a-1)(b-1)}{abc - a - b - c + 2} \end{cases}$$

(2) $\boxed{a = b = c = 1}$, *και τότε το* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις, οι εξαρτώνται από δύο παραμέτρους, και οποίες είναι της μορφής:*

$$\begin{cases} x = 1 - r - s \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3) $\boxed{\begin{cases} a \neq 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}}$, *και τότε το* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις, οι εξαρτώνται από μια παράμετρο, και οποίες είναι της μορφής:*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - r \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(4) $\boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \\ c = 1 \end{cases}}$, *και τότε το* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις, οι εξαρτώνται από μια παράμετρο, και οποίες είναι της μορφής:*

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = 0 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(5) $\boxed{\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c\neq 1 \end{cases}}$, *και τότε το* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις, οι εξαρτώνται από μια παράμετρο, και οποίες είναι της μορφής:*

$$\begin{cases} x = 1-r \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$