

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΛΥΣΗ ΠΡΟΧΕΙΡΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 14 Οκτωβρίου 2022

Πρόχειρη Δοκιμασία. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τον πίνακα

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2022^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ναδειχθεί ότι

$$A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$$

2. Ναδειχθεί ότι ο πίνακας $A(x)$ είναι αντιστρέψιμος.

3. Να υπολογιστεί ο πίνακας $A(x)^{-1}$.

4. Να υπολογιστεί η n -οστή δύναμη του πίνακα $A(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

5. Να υπολογιστεί ο πίνακας

$$(A(x) + A(y))^3$$

Λύση. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} 2022^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2022^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2022^x \cdot 2022^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x + y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2022^{(x+y)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x + y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A(x + y) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 2022^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Επομένως, έχουμε

$$A(x)A(-x) = A(x + (-x)) = A(0) = I_3 = A(0) = A((-x) + x) = A(-x)A(x)$$

και άρα, $\forall x \in \mathbb{R}$, ο πίνακας $A(x)$ είναι αντιστρέψιμος με

$$A(x)^{-1} = A(-x)$$

• Αν $n \geq 0$, τότε επειδή $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, έπεται ότι $A(x)^2 = A(x) \cdot A(x) = A(x + x) = A(2x)$. Επαγωγικά εύκολα βλέπουμε ότι $A(x)^n = A(nx)$. Πραγματικά, έστω ότι $A(x)^n = A(nx)$, για κάποιο $n \geq 2$. Τότε

$$A(x)^{n+1} = A(x)^n \cdot A(x) = A(nx) \cdot A(x) = A(nx + x) = A((n + 1)x)$$

Άρα από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής έπεται ότι πραγματικά, $\forall n \geq 0$: $A(x)^n = A(nx)$.

• Αν $n \leq -1$, τότε χρησιμοποιώντας ότι $A(x)^{-1} = A(-x)$, θα έχουμε¹

$$A(x)^{-n} = (A(x)^{-1})^n = A(-x)^n = A(-nx)$$

Επομένως θα έχουμε

$$A(x)^n = A(nx), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Επειδή $A(x) \cdot A(y) = A(x + y) = A(y + x) = A(y) \cdot A(x)$, έπεται ότι²:

$$(A(x) + A(y))^3 = A(x)^3 + 3A(x)^2A(y) + 3A(x)A(y)^2 + A(y)^3$$

Επειδή $A(x)^n = A(nx)$, από την παραπάνω σχέση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (A(x) + A(y))^3 &= A(3x) + 3A(2x)A(y) + 3A(x)A(2y) + A(3y) = A(3x) + 3A(2x + y) + 3A(x + 2y) + A(3y) = \\ &= \begin{pmatrix} 2022^{3x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2022^{2x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x + y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2022^{x+2y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x + 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2022^{3y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2022^{3x} + 3(2022^{2x+y} + 2022^{x+2y}) + 2022^{3y} & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6(x + y) \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹Εδώ χρησιμοποιούμε ότι αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και άρα υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1} , τότε ορίζονται και οι αρνητικές δυνάμεις του A ως εξής:

$$\forall n \leq 0: \quad A^{-n} = (A^{-1})^n$$

²Εδώ χρησιμοποιούμε ότι αν A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες ίδιου μεγέθους και ισχύει ότι $AB = BA$, τότε:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$