

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΛΥΣΗ ΠΡΟΧΕΙΡΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ 2

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 28 Οκτωβρίου 2022

Πρόχειρη Δοκιμασία. (1) Αν $\lambda \in \mathbb{K}$, να βρεθεί η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Ποιά είναι η κανονική μορφή του A και ποιά η βαθμίδα του;

(2) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος; Στην περίπτωση κατά την οποία ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} του A με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών του A .

(3) Να λυθεί το σύστημα

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Λύση. • Προσδιορίζουμε ταυτόχρονα την ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του A και τον αντίστροφό του, σε περίπτωση κατά την οποία ο A είναι αντιστρέψιμος. Θα έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{5}\Gamma_2]{\Gamma_1 \rightarrow -\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (\lambda + 3)\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\frac{1+2\lambda}{5} & -\frac{\lambda+3}{5} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow -\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 3\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \frac{1+2\lambda}{5} & \frac{\lambda+3}{5} & -1 \end{array} \right) \quad (*)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$. Τότε ο τελευταίος πίνακας (*) παραπάνω είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{array} \right)$$

Προφανώς τότε η ισχυρά Γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι ο πίνακας

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή $\Gamma(A) \neq I_3$, έπεται ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, και προφανώς η βαθμίδα του πίνακα A είναι ίση με

$$\mathbf{r}(A) = 2$$

Για την κανονική μορφή του πίνακα A , θα έχουμε:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_2]{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{K}(A)$$

(2) Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0$. Τότε ο ιελευταίος πίνακας (*) παραπάνω είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \frac{1+2\lambda}{5} & \frac{\lambda+3}{5} & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{\lambda}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+2\lambda}{5\lambda} & \frac{\lambda+3}{5\lambda} & \frac{-1}{\lambda} \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1-\lambda}{5\lambda} & \frac{2\lambda-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{5\lambda} & \frac{-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+2\lambda}{5\lambda} & \frac{\lambda+3}{5\lambda} & \frac{-1}{\lambda} \end{array} \right) = (I_3 | X)$$

Τότε η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του A είναι ο μοναδιαίος πίνακας: $\Gamma(A) = I_3$. Επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} \frac{-1-\lambda}{5\lambda} & \frac{2\lambda-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{-1}{5\lambda} & \frac{-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1+2\lambda}{5\lambda} & \frac{\lambda+3}{5\lambda} & \frac{-1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

Προφανώς θα έχουμε

$$\mathbf{K}(A) = \Gamma(A) = I_3 \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(A) = 3$$

• Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

είναι ο πίνακας

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα και λαμβάνοντας υπόψη τους παραπάνω υπολογισμούς, θα έχουμε:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & -11 \\ 0 & \lambda+3 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{5}\Gamma_2]{\Gamma_1 \rightarrow -\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & \lambda+3 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (\lambda+3)\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{11\lambda+28}{5} \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow -\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 3\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \lambda & -\frac{11\lambda+28}{5} \end{array} \right) \quad (**)$$

(3) Υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$. Τότε ο πίνακας (**) παραπάνω είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{28}{5} \end{array} \right)$$

ο οποίος είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma') \quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = -\frac{8}{5} \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{11}{5} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -\frac{28}{5} \end{cases}$$

και γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με το σύστημα (Σ') . Επειδή το σύστημα (Σ') είναι προφανώς αδύνατο, έπεται ότι το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.

(4) Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0$. Τότε ο πίνακας (**) παραπάνω είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \lambda & -\frac{11\lambda+28}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{\lambda}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11\lambda+28}{5\lambda} \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3\lambda+28}{5\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{5\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11\lambda+28}{5\lambda} \end{array} \right)$$

και ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma'') \quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \frac{3\lambda+28}{5\lambda} \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = \frac{28}{5\lambda} \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = -\frac{11\lambda+28}{5\lambda} \end{cases}$$

και γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με το σύστημα (Σ'') . Προφανώς το σύστημα (Σ'') έχει μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{3\lambda+28}{5\lambda}, \quad x_2 = \frac{28}{5\lambda}, \quad x_3 = -\frac{11\lambda+28}{5\lambda}$$

η οποία είναι και η μοναδική λύση του (Σ) .

Συνοψίζουμε:

1. Η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή και η κανονική μορφή του πίνακα A είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{av } \lambda = 0 \\ \Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{av } \lambda \neq 0 \end{array} \right. \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} K(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{av } \lambda = 0 \\ K(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{av } \lambda \neq 0 \end{array} \right.$$

και η βαθμίδα του A είναι:

$$\begin{cases} r(A) = 2, & \text{av } \lambda = 0 \\ r(A) = 3, & \text{av } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

2. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $\lambda \neq 0$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1-\lambda}{5\lambda} & \frac{2\lambda-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{-1}{5\lambda} & \frac{-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1+2\lambda}{5\lambda} & \frac{\lambda+3}{5\lambda} & \frac{-1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

3. Το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο αν $\lambda = 0$ και έχει μοναδική λύση αν $\lambda \neq 0$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε η μοναδική λύση του (Σ) είναι

$$x_1 = \frac{3\lambda + 28}{5\lambda}, \quad x_2 = \frac{28}{5\lambda}, \quad x_3 = -\frac{11\lambda + 28}{5\lambda}$$