ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Τμημα **Β′** (Μ-Ω)

Λυση Προχειρης Δοκιμασιας 4

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 11 Νοεμβρίου 2022

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Στο σύνολο* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ *των θετικών πραγματικών αριθμών ορίζουμε πράξεις ως εξής:*

(a) *Πρόσθεση:*

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \qquad x \oplus y := xy$$

όπου $((xy))$ *συμβολίζει τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών.*

(b) *Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:*

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \qquad \lambda \odot x := x^\lambda$$

1. *Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο* $\mathbb{R}^+$ *αποτελεί* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο.*
2. *Αν το σύνολο* $\mathbb{R}^+$ *είναι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος, να προσδιορισθούν όλοι οι υπόχωροί του.*
3. *Αν το σύνολο* $\mathbb{R}^+$ *είναι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρος και* $x \in \mathbb{R}^+$*, να περιγραφεί ο υπόχωρος* $\langle x \rangle$ *του* $\mathbb{R}^+$*.*
4. *Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των διανυσματικών χώρων*[1] $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *και* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$*;*

Λύση. **1.** *Έστω* $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *και* $r, s \in \mathbb{R}$*. Τότε:*

(α) $(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x(y \oplus z) = x \oplus (y \oplus z)$.

(β) $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$.

(γ) *Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο* $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^+$ *έτσι ώστε* $x \oplus \mathfrak{o} = x = \mathfrak{o} \oplus x$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^+$*. ΄ρα*

$$x \oplus \mathfrak{o} = x \iff x\mathfrak{o} = x \iff \mathfrak{o} = 1$$

διότι το $x \neq 0$*. Συνεπώς, το μηδενικό διάνυσμα είναι το στοιχείο* $\mathfrak{o} = 1$*.*

(δ) *Θεωρούμε στοιχείο* $x \in \mathbb{R}^+$*. Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο* $y \in \mathbb{R}^+$ *έτσι ώστε:* $x \oplus y = \mathfrak{o} = y \oplus x$*. Επειδή από το προηγούμενο αξίωμα,* $\mathfrak{o} = 1$*, θα έχουμε:* $x \oplus y = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ *και αφού* $x \in \mathbb{R}^+$ *έπεται ότι* $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$*. Πράγματι, έχουμε*

$$x \oplus \frac{1}{x} = x\frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x}x = \frac{1}{x} \oplus x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$*. ΄ρα, το αντίθετο του διανύσματος* $x \in \mathbb{R}^+$ *ως προς την πρόσθεση* $\oplus$ *είναι το διάνυσμα* $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$*.*

(ζ) $r \odot (x \oplus y) = r \odot (xy) = (xy)^r = x^r y^r = x^r \oplus y^r = (r \odot x) \oplus (r \odot y)$.

(η) $(r + s) \odot x = x^{r+s} = x^r x^s = x^r \oplus x^s = (r \odot x) \oplus (s \odot x)$.

[1] Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ συμβολίζουν τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμολύ πραγματικών αριθμών.

(θ) $r \odot (s \odot x) = r \odot (x^s) = (x^s)^r = x^{sr} = (sr) \odot x$.

(ι) $1 \odot x = x^1 = x$.

Επομένως, η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο υπεράνω του* $\mathbb{R}$.

2. *Γνωρίζουμε ότι το σύνολο* $\{1\}$ *και όλος ο χώρος* $\mathbb{R}^+$ *είναι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^+$. *Έστω* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^+$ *ένας υπόχωρος του* $\mathbb{R}^+$ *έτσι ώστε* $\mathcal{V} \neq \{1\}$, *δηλαδή ο* $\mathcal{V}$ *δεν είναι ο μηδενικός υπόχωρος του* $\mathbb{R}^+$. *'ρα υπάρχει ένα* $x \in \mathcal{V}$ *με* $x \neq 1$. *Έστω* $k \in \mathbb{R}^+$. *Τότε έχουμε*

$$k = x^{\log_x k} = \log_x k \odot x \in \mathcal{V}$$

αφού $\log_x k \in \mathbb{R}$ *και* $x \in \mathcal{V}$. *Συνεπώς έχουμε ότι* $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathcal{V}$ *και άρα* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^+$. *Επομένως οι μόνοι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *είναι το* $\{1\}$ *και όλος ο χώρος* $\mathbb{R}^+$.

3. *Αν* $x = 1$, *δηλαδή* x *είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε προφανώς* $\langle x \rangle = \big\{1\big\}$. *Αν* $x \neq 1$, *τότε από το μέρος* **2**. *έπεται ότι* $\langle x \rangle = \mathbb{R}^+$. *Επομένως κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^+$ *παράγει τον* $\mathbb{R}^+$.

4. *Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση*

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = e^x$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη τη λογαριθμική συνάρτηση

$$g \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_e(x)$$

Τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, *θα έχουμε:*

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = e^x \oplus e^y = f(x) \oplus f(y)$$
$$f(r \cdot x) = e^{r \cdot x} = (e^x)^r = f(x)^r = r \odot f(x)$$

Με άλλα λόγια οι $\mathbb{R}$*-διανυσματικοί χώροι* $\mathbb{R}$ *και* $\mathbb{R}^+$ *είναι σε «1-1» και «επί» αντιστοιχία μέσω μιας απεικόνισης η οποία*[2] *στέλνει τις πράξεις πρόσθεσης* $+$ *και βαθμωτού πολλαπλασιασμού* $\cdot$ *στον* $\mathbb{R}$*-διανυυυσματικό χώρο* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *στις αντίστοιχες πράξεις πρόσθεσης* $\oplus$ *και βαθμωτού πολλαπλασιασμού* $\odot$ *στον* $\mathbb{R}$*-διανυυυσματικό χώρο* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$.

[2]Όπως θα δούμε αργότερα μια τέτοια απεικόνιση καλείται ισομορφισμός και μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τους εμπλεκόμενους διανυσματικούς χώρους.