ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B}'}$ (Μ-Ω)

Λυση Προχειρης Δοκιμασιας 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 18 Νοεμβρίου 2022

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό k και τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:*

$$\vec{x} = (k,\, 1,\, -1), \qquad \vec{y} = (0,\, k,\, 1), \qquad \vec{z} = (1,\, k,\, -1)$$

(1) *Να βρεθεί για ποιές τιμές του $k \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

(2) *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου*
$$\mathcal{V} = \langle \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \rangle$$

(3) *Να συμπληρωθεί η βάση που βρέθηκε στο (2) σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$.*

(4) *Για τις τιμές του k για τις οποίες τα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και άρα βάση του $\mathbb{R}^3$, να βρεθούν οι συνιστώσες του $(1, 1, 1$ ως προς αυτή τη βάση.*

Λύση. **1.** *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος προκύπτει από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$. Γνωρίζουμε τότε ότι τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν και μόνον αν:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} = -2k^2 + k + 1 = -2(k-1)(k+\frac{1}{2})$$

Επομένως

$$|A| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 1 \quad \acute{\eta} \quad k = -\frac{1}{2}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\text{τα διανύσματα } \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητα} \quad \Longleftrightarrow \quad k \neq 1 \quad \text{και} \quad k \neq -\frac{1}{2}$$

2. *Διακρίνουμε περιπτώσεις:*

(α΄) *Αν $k \neq 1$ και $k \neq -\frac{1}{2}$, τότε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του $\mathcal{V}$. Ιδιαίτερα:*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 3$$

Παρατηρούμε ότι επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$, θα έχουμε: $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

(β΄) *Αν $k = 1$, τότε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και έχουμε:*

$$\vec{x} = (1,\ 1,\ -1), \qquad \vec{y} = (0,\ 1,\ 1), \qquad \vec{z} = (1,\ 1,\ -1)$$

δηλαδή $\vec{x} = \vec{z}$, και τότε:

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x},\ \vec{y}\, \rangle$$

Προφανώς τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{0}$, τότε θα έχουμε $\lambda_1(1,1,-1)+\lambda_2(0,1,1) = (0,0,0)$ και άρα $(\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2, -\lambda_1+\lambda_2) = (0,0,0)$ από όπου προκύπτει άμεσα ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Επομένως τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ αποτελούν βάση του $\mathcal{V}$ και ιδιαίτερα

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 2$$

(γ΄) *Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και έχουμε:*

$$\vec{x} = (-\frac{1}{2},\ 1,\ -1), \qquad \vec{y} = (0,\ -\frac{1}{2},\ 1), \qquad \vec{z} = (1,\ -\frac{1}{2},\ -1)$$

Ο πίνακας A τότε παίρνει την μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to -2\Gamma_3]{\Gamma_1 \to -2\Gamma_1,\ \Gamma_2 \to -2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 2\Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to -\frac{1}{3}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Θεωρώντας τα διανύσματα

$$\vec{u} = (1,\ 0,\ -2) \quad \text{και} \quad \vec{v} = (0,\ 1,\ -2)$$

έπεται ότι

$$\mathcal{V} = \langle \vec{u},\ \vec{v}\, \rangle$$

Επειδή όπως προκύπτει άμεσα τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι το σύνολο $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$. Ιδιαίτερα:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 2$$

3. *Διακρίνουμε περιπτώσεις:*

(α΄) *Αν $k \neq 1$ και $k \neq -\frac{1}{2}$, τότε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ αποτελούν ήδη βάση του $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.*

(β΄) *Αν $k = 1$, τότε $\vec{x} = (1,\ 1,\ -1)$, $\vec{y} = (0,\ 1,\ 1)$, και θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Επειδή*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ και $\vec{e}_3$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ του $\mathcal{V}$.

(γ΄) *Θεωρούμε τη βάση $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$ του $\mathcal{V}$, όπου $\vec{u} = (1, 0, -2)$, και $\vec{v} = (0, 1, -2)$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Επειδή:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{e}_3$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ του $\mathcal{V}$.

4. *Τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνον αν $k \neq 1, -\frac{1}{2}$. Θα έχουμε:*

$$(1,1,1) = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} \implies (1,1,1) = a(k,1,-1) + b(0,k,1) + c(1,k,-1) \implies$$

$$\implies (1,1,1) = (ak + ck, a + bk + ck, -a + b - c) \implies \begin{cases} ak + ck = 1 \\ a + bk + ck = 1 \\ -a + b + c = 1 \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

Επειδή ο πίνακας του συστήματος (Σ) *με αγνώστους τα* a, b, c *είναι ο ανάστροφος*

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & k & k \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} $$

του A *ο οποίος είναι αντιστρέψιμος διότι* $|{}^tA| = |A| = -2(k-1)(k+\frac{1}{2}$*, έπεται ότι το* (Σ) *είναι σύστημα Cramer και άρα έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται από τους γνωστούς τύπους:*

$$ a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k}{2k+1} $$

$$ b = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k-1)}{2k+1} $$

$$ c = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{k^2+1}{(k-1)(2k+1)} $$

Άρα:

$$ (1,1,1) = \frac{k}{2k+1}\,\vec{x} \ + \ \frac{k-1}{2k+1}\,\vec{y} \ - \ \frac{k^2+1}{(k-1)(2k+1)}\,\vec{z} $$