# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

## Λυση Προχειρης Δοκιμασιας 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

**Παρασκευή 26 Νοεμβρίου 2021**

**Πρόχειρη Δοκιμασία.** *Έστω $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ δύο υπόχωροι του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_6[x]$ και υποθέτουμε ότι:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 3 \qquad \text{και} \qquad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 5$$

(1) *Να βρεθούν οι πιθανές διαστάσεις για την τομή $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.*
(2) *Για κάθε πιθανή τιμή της διάστασης $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ της τομής $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ των υπόχωρων $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$, να δοθούν συγκεκριμένα παραδείγματα υπόχωρων $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ του $\mathbb{K}_6[x]$ για τους οποίους έχουμε την τιμή αυτή.*

**Λύση.** *Υπενθυμίζουμε ότι*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \tag{$\dagger$}$$

*Χρησιμοποιώντας ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_6[x] = 7$, διότι $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}_6[x]$, θα έχουμε:*

$$3 + 5 - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \ \leq \ 7 \quad \Longrightarrow \quad 1 \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

*Επειδή ο $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{U}$, έπεται ότι θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 3$ και επομένως:*

$$1 \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \ \leq \ 3$$

(1) *Αν $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$, τότε από τη σχέση ($\dagger$) έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 7$. Επειδή ο $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}_6[x]$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_6[x] = 7$, θα έχουμε ότι $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$. Αντίστροφα, αν $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$, τότε από τη σχέση ($\dagger$) έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$. Άρα:*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$$

— *Παράδειγμα υπόχωρων $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ του $\mathbb{K}_6[x]$ οι οποίοι ικανοποιούν τα παραπάνω δεδομένα αποτελούν οι:*

$$\mathcal{U} = \langle 1, \, x, \, x^2 \rangle \qquad \text{και} \qquad \mathcal{U} = \langle x^2, \, x^3, \, x^4, \, x^5, \, x^6 \rangle$$

*διότι προφανώς $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 3$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 5$, και $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{ax^2 \in \mathbb{K}_6[x] \mid a \in \mathbb{K}\} = \langle x^2 \rangle$ και $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$.*

(2) *Αν $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3$, τότε από τη σχέση ($\dagger$) έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 5$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 5$ και ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, έπεται ότι $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Αυτό όμως προφανώς σημαίνει ότι $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Αντίστροφα αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, τότε προφανώς $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ και τότε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 5$. Από τη σχέση ($\dagger$) προκύπτει τότε ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3$. Άρα:*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$$

— *Παράδειγμα υπόχωρων $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ του $\mathbb{K}_6[x]$ οι οποίοι ικανοποιούν τα παραπάνω δεδομένα αποτελούν οι:*

$$\mathcal{U} = \langle 1, \, x, \, x^2 \rangle \qquad \text{και} \qquad \mathcal{U} = \langle 1, \, x, \, x^2, \, x^3, \, x^4 \rangle$$

*διότι προφανώς $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 3$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 5$, και $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{K}_6[x] \mid k \in \mathbb{K}\} = \langle 1, \, x, \, x^2 \rangle$ και $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3$.*

(3) *Έστω* $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$. *Τότε* $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 6$ *και προφανώς* $\mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{V}$ *(διότι διαφορετικά αν* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ *θα είχαμε ότι* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}$ *και άρα* $2 = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 3$ *που είναι άτοπο)* *και* $\mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$. *Αντίστροφα αν* $\mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{V}$ *και* $\mathcal{U}+\mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$, *τότε* $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}+\mathcal{V}) \neq 7$ *και* $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}+\mathcal{V}) \neq 5$ *διότι διαφορετικά θα είχαμε* $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$ *το οποίο σημαίνει ότι* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ *το οποίο είναι άτοπο. Άρα:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{V} \quad \textit{και} \quad \mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$$

– *Παράδειγμα υπόχωρων* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{V}$ *του* $\mathbb{K}_6[x]$ *οι οποίοι ικανοποιούν τα παραπάνω δεδομένα αποτελούν οι:*

$$\mathcal{U} = \big\langle 1,\, x,\, x^2 \big\rangle \quad \textit{και} \quad \mathcal{U} = \big\langle x,\, x^2,\, x^3,\, x^4,\, x^6 \big\rangle$$

*διότι προφανώς* $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 3$, $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$, *και* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \big\{ a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{K}_6[x] \mid k \in \mathbb{K} \big\} = \big\langle x,\, x^2 \big\rangle$ *και* $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$.