

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΛΥΣΗ ΠΡΟΧΕΙΡΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ 7

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 2 Δεκεμβρίου 2022

Πρόχειρη Δοκιμασία. Έστω η ακόλουθη βάση του \mathbb{R}^3

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 1, 1)\}$$

και έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_1) = (-1, 2, 0), \quad f(\vec{e}_2) = (0, -1, 1), \quad f(\vec{e}_3) = (-2, 3, 1)$$

- (1) Να βρεθεί η γραμμική απεικόνιση f .
- (2) Να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ της f η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση \mathcal{C} του \mathbb{R}^3 .
- (3) Να βρεθεί μια βάση της εικόνας $\text{Im}(f)$ της f , η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση \mathcal{D} του \mathbb{R}^3 .
- (4) Πότε το διάνυσμα $\vec{x} = (a, b, c)$ του \mathbb{R}^3 ανήκει στην εικόνα $\text{Im}(f)$ της f ;
- (5) Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ και ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$.
- (6) Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $(1, 1, 1)$ ως προς τις βάσεις \mathcal{C} και \mathcal{D} .

Λύση. (1) Έστω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Επειδή το σύνολο \mathcal{B} είναι βάση του \mathbb{R}^3 , υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) = (a + b, b + c, a + c) \implies \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ a + c = z \end{cases}$$

$$\text{Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με αγνώστους τα } a, b, c, \text{ βλέπουμε εύκολα ότι: } \begin{cases} a = \frac{x - y + z}{2} \\ b = \frac{x + y - z}{2} \\ c = \frac{-x + y + z}{2} \end{cases}.$$

Επομένως:

$$(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2}\vec{e}_1 + \frac{x + y - z}{2}\vec{e}_2 + \frac{-x + y + z}{2}\vec{e}_3 =$$

Τότε:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f\left(\frac{x - y + z}{2}\vec{e}_1 + \frac{x + y - z}{2}\vec{e}_2 + \frac{-x + y + z}{2}\vec{e}_3\right) = \\ &= \frac{x - y + z}{2}f(\vec{e}_1) + \frac{x + y - z}{2}f(\vec{e}_2) + \frac{-x + y + z}{2}f(\vec{e}_3) = \\ &= \frac{x - y + z}{2}(-1, 2, 0) + \frac{x + y - z}{2}(0, -1, 1) + \frac{-x + y + z}{2}(-2, 3, 1) \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η παραπάνω παράσταση ισούται με: $\left(\frac{x - y - 3z}{2}, -x + 3z, y\right)$.

Άρα:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x - y - 3z}{2}, -x + 3z, y \right)$$

(2) Έστω $(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$, δηλαδή $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Τότε: $\left(\frac{x-y-3z}{2}, -x+3z, y \right) = (0, 0, 0)$ και άρα:

$$\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ -x + 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies y = 0 \text{ και } x = 3z, z \in \mathbb{R}$$

Άρα $\text{Ker}(f) = \{(3z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(3, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (3, 0, 1) \rangle$, και επομένως το μονοσύνολο $\{\vec{e}_1 = (3, 0, 1)\}$ είναι μια βάση του $\text{Ker}(f)$. Συμπληρώνουμε σε μια βάση του \mathbb{R}^3 : επειδή

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 = (3, 0, 1), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

είναι μια βάση του \mathbb{R}^3 η οποία συμπληρώνει τη βάση του $\text{Ker}(f)$.

(3) Γνωρίζουμε από τη Θεωρία ότι το σύνολο $\{f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\}$ είναι μια βάση του $\text{Im}(f)$. Επειδή: $f(\vec{e}_2) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ και $f(\vec{e}_3) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, έπεται ότι το σύνολο $\{(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)\}$ είναι μια βάση της $\text{Im}(f)$. Προφανώς τότε, για να απλοποιήσουμε τα διανύσματα, το σύνολο $\{\vec{e}'_2 = (-1, 0, 1), \vec{e}'_3 = (-1, 1, 0)\}$ είναι μια βάση του $\text{Im}(f)$. Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{D} = \{\vec{e}'_1 = (1, 0, 0), \vec{e}'_2 = (-1, 0, 1), \vec{e}'_3 = (-1, 1, 0)\}$$

είναι μια βάση του \mathbb{R}^3 η οποία συμπληρώνει τη βάση της $\text{Im}(f)$.

(4) Επειδή το σύνολο $\{\vec{e}'_2 = (-1, 0, 1), \vec{e}'_3 = (-1, 1, 0)\}$ είναι μια βάση του $\text{Im}(f)$, έπεται ότι:

$$(a, b, c) \in \text{Im}(f) \iff (a, b, c) \in \langle (-1, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle \iff$$

$$\iff \exists \kappa, \lambda \in \mathbb{R} : (a, b, c) = \kappa(-1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0) = (-\kappa - \lambda, \lambda, \kappa) \iff \begin{cases} a = -\kappa - \lambda \\ b = \lambda \\ c = \kappa \end{cases}$$

$$\iff a = -b - c \iff a + b + c = 0$$

(5) Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης \mathcal{D} ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης \mathcal{C} :

(α)

$$\vec{e}'_1 = (1, 0, 0) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(3, 0, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (3a, b, a + c) \implies$$

$$\implies \begin{cases} 3a = 1 \\ b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3a = \frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3$$

(β)

$$\vec{\epsilon}'_2 = (-1, 0, 1) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(3, 0, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (3a, b, a + c) \implies$$

$$\implies \begin{cases} 3a = -1 \\ b = 0 \\ a + c = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\epsilon}'_2 = -\frac{1}{3}\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 + \frac{4}{3}\vec{\epsilon}_3$$

(γ)

$$\vec{\epsilon}'_3 = (-1, 1, 0) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(3, 0, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (3a, b, a + c) \implies$$

$$\implies \begin{cases} 3a = -1 \\ b = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\epsilon}'_3 = -\frac{1}{3}\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2 + \frac{1}{3}\vec{\epsilon}_3$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Για την εύρεση του πίνακα μετάβασης $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης \mathcal{C} ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης \mathcal{D} . Εναλλακτικά, γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}})^{-1}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο του $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ προκύπτει ότι:

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) Γνωρίζουμε ότι αν X είναι το διάνυσμα στήλη των συνιστωσών του διανύσματος \vec{x} ως προς τη βάση \mathcal{C} και Y είναι το διάνυσμα στήλη των συνιστωσών του διανύσματος \vec{x} ως προς τη βάση \mathcal{D} , τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$X = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} Y \quad \text{και} \quad Y = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} X$$

Θα έχουμε

$$(1, 1, 1) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 \implies (1, 1, 1) = a(3, 0, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) \implies$$

$$\implies (1, 1, 1) = (3a, b, a + c) \implies \begin{cases} 3a = 1 \\ b = 1 \\ a + c = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Άρα

$$(1, 1, 1) = \frac{1}{3}\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 + \frac{2}{3}\vec{\epsilon}_3 \implies X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Αν $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ είναι το διάνυσμα στήλη των συνιστωσών του διανύσματος $(1, 1, 1)$ ως προς τη βάση \mathcal{D} , τότε θα έχουμε:

$$Y = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Apra

$$(1, 1, 1) = 3\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3$$