ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυση Προχειρης Δοκιμασιας 8

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 16 Δεκεμβρίου 2022

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z,w) = (x+z,\, y+w)$$

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας* A *της* f *ως προς τις κανονικές βάσεις* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *και* $\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2\}$ *των* $\mathbb{R}^4$ *και* $\mathbb{R}^2$ *αντίστοιχα.*

(2) *Να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f)$ *και μια βάση για την εικόνα* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f.

(3) *Να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος* 2×2 *πίνακας* Q *και ένας αντιστρέψιμος* 4×4 *πίνακας* P *έτσι ώστε:*

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } r = \mathbf{r}(A)$$

Λύση. (1) *Θα έχουμε:*

$$f(\vec{e}_1) = f(1,0,0,0) = (1,0) = \vec{\epsilon}_1 = 1\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2$$
$$f(\vec{e}_2) = f(0,1,0,0) = (0,1) = \vec{\epsilon}_2 = 0\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2$$
$$f(\vec{e}_3) = f(0,0,1,0) = (1,0) = \vec{\epsilon}_1 = 1\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2$$
$$f(\vec{e}_4) = f(0,0,0,1) = (0,1) = \vec{\epsilon}_2 = 0\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2$$

Επομένως:

$$A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) *Έστω* $(x,y,z,w) \in \mathsf{Ker}(f)$ *και επομένως* $f(x,y,z,w) = \vec{0} = (0,0)$. *Τότε* $(x+z, y+w) = (0,0)$, *δηλαδή* $x+z=0$ *και* $y+w=0$. *Προφανώς τότε* $z=-x$ *και* $w=-y$, *και επομένως*

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid z=-x \text{ και } w=-y\big\} = \big\{(x,y,-x,-y) \in \mathbb{R}^4 \mid z=-x \text{ και } w=-y\big\} =$$
$$= \big\{x(1,0,-1,0) + y(0,1,0,-1) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y \in \mathbb{R}\big\} = \big\langle (1,0,-1,0),\ (0,1,0,-1)\big\rangle$$

Προφανώς τα διανύσματα $\vec{e}\,'_3 = (1,0,-1,0)$ *και* $\vec{e}\,'_4 = (0,1,0,-1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του* $\mathsf{Ker}(f)$.

Συμπληρώνουμε τη βάση $\{\vec{e}\,'_3,\, \vec{e}\,'_4\}$ *σε μια βάση*

$$\mathcal{B}' = \big\{\vec{e}\,'_1 = (1,0,0,0),\ \vec{e}\,'_2 = (1,0,0,0),\ \vec{e}\,'_3 = (1,0,-1,0),\ \vec{e}\,'_4 = (0,1,0,-1)\big\}$$

του $\mathbb{R}^4$. *Το σύνολο* $\mathcal{B}'$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}^4$, *διότι:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε τότε ότι τα διανύσματα $f(\vec{e}'_1)$ *και* $f(\vec{e}'_2)$ *αποτελούν μια βάση* $\mathcal{C}'$ *της* $\mathsf{Im}(f)$. *Υπολογίζουμε:*

$$\vec{\epsilon}'_1 := f(\vec{e}'_1) = f(1,0,0,0) = (1,0) = \vec{\epsilon}_1 \quad \text{και} \quad \vec{\epsilon}'_2 := f(\vec{e}'_2) = f(0,1,0,0) = (0,1) = \vec{\epsilon}_2$$

Έτσι μια βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ *είναι η*

$$\mathcal{C}' = \big\{\vec{\epsilon}'_1,\ \vec{\epsilon}'_2\big\} = \big\{\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2\big\} = \mathcal{C}$$

Ιδιαίτερα προκύπτει ότι η βαθμίδα της f *είναι*

$$\mathbf{r}(f) = 2$$

(3) *Θα προσδιορίσουμε τον πίνακα* $B = M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}$ *της* f *ως προς το ζευγάρι βάσεων* $\mathcal{B}'$ *και* $\mathcal{C}'$. *Επειδή* $\mathbf{r}(f) = 2$, *από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι*

$$B = M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} I_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}'_1) &= \vec{\epsilon}'_1 = 1\vec{\epsilon}'_1 + 0\vec{\epsilon}'_2 \\ f(\vec{e}'_2) &= \vec{\epsilon}'_2 = 0\vec{\epsilon}'_1 + 1\vec{\epsilon}'_2 \\ f(\vec{e}'_3) &= \vec{0} = 0\vec{\epsilon}'_1 + 0\vec{\epsilon}'_2 \\ f(\vec{e}'_4) &= \vec{0} = 0\vec{\epsilon}'_1 + 0\vec{\epsilon}'_2 \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ο πίνακας $B = M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}$.

Επειδή $\mathcal{B}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^4$, *ο πίνακας μετάβασης* $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ *από τη βάση* $\mathcal{B}$ *στην βάση* $\mathcal{B}'$, *αποτελείται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{B}'$ *οι οποίες είναι οι στήλες του πίνακα* $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$*:*

$$P = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και επειδή $\mathcal{C}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^2$, *ο πίνακας μετάβασης* $M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}$ *από τη βάση* $\mathcal{C}$ *στην βάση* $\mathcal{C}'$, *αποτελείται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{C}'$ *οι οποίες είναι οι στήλες του πίνακα* $M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}$*:*

$$Q = M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επαληθεύουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$