

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

## ΛΥΣΗ ΠΡΟΧΕΙΡΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ 9

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 13 Ιανουαρίου 2023

**Πρόχειρη Δοκιμασία.** Για τις διάφορες τιμές των  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  να ληθεί το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + \lambda y - z = 2 \\ 2x - y + \lambda z = 5 \\ x + 10y - 6z = \mu \end{cases}$$

**Λύση.** Ο πίνακας του συστήματος  $(\Sigma)$  είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \mu \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 - 2\lambda & \lambda + 2 \\ 0 & 10 - \lambda & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 - 2\lambda & \lambda + 2 \\ 10 - \lambda & -5 \end{vmatrix} \\ = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda - 3)(\lambda + 5)$$

(1) Αν  $\lambda \neq 3$  και  $\lambda \neq -5$  έχουμε  $|A| \neq 0$  και άρα το  $(\Sigma)$  είναι σύστημα Cramer. Συνεπώς έχουμε μοναδική λύση:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ 5 & -1 & \lambda \\ \mu & 10 & -6 \end{vmatrix}}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} = \frac{\mu\lambda^2 + 10\lambda - (\mu + 38)}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & \lambda \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix}}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} = \frac{\lambda(2 - \mu) - 2\mu - 1}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} = \frac{\lambda(5 - 2\mu) - \mu - 8}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)}$$

(2) Έστω  $\lambda = 3$ . Τότε έχουμε το σύστημα

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ x + 10y - 6z = \mu \end{cases}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \mu \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα  $A$  είναι  $r(A) = 2$  διότι υπάρχει μια ελάχιστη οριζούσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

και η μοναδική ελάχιστη οριζούσα τάξης 3 η οποία πλαισιώνει την  $\Delta$  είναι ίση με την  $|A| = 0$ . Στην συνέχεια εξετάζουμε τη βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα  $(A|B)$ . Έχουμε:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & \mu - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 1 \end{pmatrix}$$

(α) Αν  $\mu \neq 1$ , τότε  $\mu - 1 \neq 0$ , και τότε ο παραπάνω πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 1 \end{pmatrix} \implies r(A|B) = 3$$

διότι ο πίνακας  $(A|B)$  έχει την ακόλουθη μη-μηδενική ελάχιστη οριζούσα τάξης 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & \mu - 1 \end{vmatrix} = -7(\mu - 1) \neq 0$$

και δεν υπάρχουν ελάχιστες οριζούσες τάξης 4. Έτσι θα έχουμε  $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B)$  και το σύστημα  $(\Sigma)$  είναι αδύνατο.

(β) Αν  $\mu = 1$ , τότε ο παραπάνω πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(A|B) = 2$$

διότι ο πίνακας  $(A|B)$  έχει την ακόλουθη μη-μηδενική ελάχιστη οριζούσα τάξης 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

και όλες οι ελάχιστες οριζούσες τάξης 3 που την περιβάλλουν είναι ίσες με μηδέν. Επομένως το σύστημα  $(\Sigma)$  είναι συμβιβάσιμο αφού  $r(A) = r(A|B)$ . Σε αυτή την περίπτωση, οι παραπάνω πράξεις επί των γραμμών του  $(A|B)$  δείχνουν ότι το  $(\Sigma)$  είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$A'X = B'$$

όπου:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ -7y + 5z = 1 \end{cases} \implies y = -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}z \implies x = 2 + z - 3\left(-\frac{1}{7} + \frac{5}{7}z\right) = \frac{17}{7} - \frac{8}{7}z$$

Θέτουμε  $z = t \in \mathbb{R}$ . Τότε η γενική λύση του  $(\Sigma)$  είναι

$$\begin{cases} x = \frac{17}{7} - \frac{8}{7}t \\ y = -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}t \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Εναλλακτικά επιλέγοντας την ελάχισσα οριζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

θα μπορούσαμε να λύσουμε το  $(\Sigma)$ , ως σύστημα Cramer με αγνώστους τα  $x$  και  $y$ , δίνοντας αυθαίρετες τιμές στο  $z$ .

(3) Έστω  $\lambda = -5$ . Τότε έχουμε το σύστημα

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x - 5y - z = 2 \\ 2x - y - 5z = 5 \\ x + 10y - 6z = \mu \end{cases}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \mu \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα  $A$  είναι  $r(A) = 2$  διότι υπάρχει μια ελάχισσα οριζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

Για τη βαθμίδα του επαυξημένου  $(A|B)$ , θα έχουμε:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 15 & -5 & \mu - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{15}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{9}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{\mu-2}{15} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9\mu-33}{135} \end{pmatrix}$$

(α) Αν  $\mu \neq \frac{11}{3}$ , τότε  $\frac{9\mu-33}{135} \neq 0$  και άρα  $r(A|B) = 3$ , διότι ο παραπάνω πίνακας έχει την ακόλουθη μη-μηδενική ελάχισσα οριζουσα τάξης 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{9\mu-33}{135} \end{vmatrix} = \frac{9\mu-33}{135} \neq 0$$

και δεν υπάρχουν ελλείψεις οριζουσες τάξης 4. Έτσι θα έχουμε  $2 = r(A) \neq 3 = r(A|B)$  και το σύστημα  $(\Sigma)$  είναι αδύνατο.

(β) Αν  $\mu = \frac{11}{3}$ , τότε οι παραπάνω πράξεις επί των γραμμών του  $(A|B)$  δείχνουν ότι το  $(\Sigma)$  είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$A'X = B'$$

όπου:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$(A'|B') = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(A'|B') = 2$$

διότι ο  $(A'|B')$  περιέχει την μη-μηδενική ελάχισσα οριζουσα τάξης 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και όλες οι ελάχιστες οριζουσες τάξης 3 οι οποίες την περιβάλλουν είναι ίσες με 0. Έτσι  $r(A') = 2 = r(A'|B')$ , και το  $(\Sigma)$  είναι συμβιβαστό. Για τη γενική λύση του συστήματος, θα έχουμε:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{9} \end{cases} \implies y = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}z \implies x = 2 + z - 3\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}z\right) = \frac{5}{3}$$

Θέτουμε  $z = t \in \mathbb{R}$ . Τότε η γενική λύση του  $(\Sigma)$  είναι

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}t \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Συνοψίζοντας δείξαμε ότι:**

(1) Το  $(\Sigma)$  έχει μοναδική λύση αν και μόνον αν  $\lambda \neq 3$  και  $\lambda \neq -5$ , και τότε η μοναδική λύση είναι:

$$\begin{cases} x = \frac{\mu\lambda^2 + 10\lambda - (\mu + 38)}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} \\ y = \frac{\lambda(2 - \mu) - 2\mu - 1}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} \\ z = \frac{\lambda(5 - 2\mu) - \mu - 8}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} \end{cases}$$

(2) Αν  $\lambda = 3$ , τότε:

(α) Αν  $\mu \neq 1$ , τότε το  $(\Sigma)$  είναι αδύνατο.

(β) Αν  $\mu = 1$ , τότε το  $(\Sigma)$  έχει άπειρες λύσεις:

$$\begin{cases} x = \frac{17}{7} - \frac{8}{7}t \\ y = -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}t \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3) Αν  $\lambda = -5$ , τότε:

(α) Αν  $\mu \neq \frac{11}{3}$ , τότε το  $(\Sigma)$  είναι αδύνατο.

(β) Αν  $\mu = \frac{11}{3}$ , τότε το  $(\Sigma)$  έχει άπειρες λύσεις:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}t \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$