ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Τμημα Β′ (Μ-Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 24 Φεβρουαρίου 2023

Άσκηση 1. *Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο* $\mathbb{R}[t]$ *του πολυωνύμου* $A(t) = t^6 - 7t^5 + 16t^4 - 10t^3 - 14t^2 + 33t - 23$ *με το πολυώνυμο* $B(t) = t^3 - 7t^2 + 16t - 12$.

Άσκηση 2. *Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο* $\mathbb{R}[t]$ *του πολυωνύμου* $A(t) = 3t^5 + 4t^2 + 1$ *με το πολυώνυμο* $B(t) = t^2 + 2t + 3$.

Άσκηση 3. *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$P(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n, \qquad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \;\; 0 \leq i \leq n \quad \text{και} \quad a_n \neq 0$$

Αν $\dfrac{r}{s}$ *είναι μια ρητή ρίζα του* $P(t)$, *όπου* $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$ *και* $(r, s) = 1$, *τότε:*

$$r \mid a_0 \qquad \& \qquad s \mid a_n$$

Ακολούθως να εξετασθεί αν το πολυώνυμο

$$P(t) = t^3 + 8t^2 - t + 9$$

είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[t]$.

Άσκηση 4. *Να δειχθεί το ακόλουθο* <u>Κριτηριο Eisenstein</u>*: Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n, \qquad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \;\; 0 \leq i \leq n \quad \text{και} \quad a_n \neq 0$$

και έστω p *ένας πρώτος αριθμός. Τότε:*

$$p \mid a_0, \; p \mid a_1, \; \cdots, \; p \mid a_{n-1} \quad \& \quad p \nmid a_n \quad \& \quad p^2 \nmid a_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t): \;\; \text{ανάγωγο}$$

<u>Εφαρμογη</u>*: Δείξτε ότι τα πολυώνυμα* $g_1(t) = t^4 - 6t^3 + 24t^2 - 30t + 14$, $g_2(t) = t^7 + 48t - 24$, $g_3(t) = t^5 + 5t + 5$, *και* $g_4(t) = t^n - p$, *όπου* p *είναι ένας πρώτος αριθμός και* $n > 1$, *είναι ανάγωγα υπεράνω του* $\mathbb{Q}$. *Είναι το πολυώνυμο* $t^4 + 4$ *και ανάγωγο υπεράνω του* $\mathbb{Q}$;

Άσκηση 5. *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$P(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots c_1t + c_0,$$

Αν ρ *είναι μια πραγματική ρίζα του* $P(t)$, *να δειχθεί ότι: είτε ο* ρ *είναι ακέραιος ή ο* ρ *είναι άρρητος.*

Άσκηση 6. (1) *Να αναλυθεί το πολυώνυμο*

$$P(t) = t^3 - 2t^2 - 3t + 6$$

σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{Q}[t]$.

(2) *Να αναλυθεί το πολυώνυμο*

$$P(t) = 2t^3 - (5+6i)t^2 + 9it + 1 - 3i$$

σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{C}[t]$, *γνωρίζοντας ότι το* $P(t)$ *έχει μια πραγματική ρίζα.*

Άσκηση 7. *Να γραφούν τα ακόλουθα πολυώνυμα ως γινόμενα αναγώγων πολυωνύμων στα* $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, *και* $\mathbb{C}[t]$:

$$P(t) = t^3 - 2t^2 + 2t - 1, \quad Q(t) = 2t^4 - 5t^3 + 4t^2 - 5t + 2, \quad R(t) = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4$$

• • •

Άσκηση 8. *Θεωρούμε τους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \ \ \textit{και} \ \ 3x+2y+z=0\big\}$$

$$\mathcal{W} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x+4y+3z=0\big\}$$

Να εξετάσετε αν ισχύει ότι: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. *Αν αυτό δεν ισχύει να βρείτε υπόχωρους* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{Z}$ *έτσι ώστε*

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$$

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{V} = \big\langle (1,2,1,-1), \ (1,1,1,1) \big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W} = \big\langle (-1,1,-1,1), \ (0,1,0,1) \big\rangle$$

(1) *Είναι το άθροισμα* $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ *ευθύ;*
(2) *Πόσοι υπόχωροι* $\mathcal{Z}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *υπάρχουν έτσι ώστε* $\mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$; *Δικαιολογήστε την απάντηση σας.*

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{C}$-*διανυσματικού χώρου* $\mathbb{C}^3$:

$$\mathcal{V} = \big\langle (1,1,0), \ (i, 1+i, 1), \ (1+i, 1+i, 0) \big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W} = \big\langle (1,0,1), \ (i,-i,0), \ (0,i,i) \big\rangle$$

Να βρείτε υπόχωρο $\mathcal{U}$ *του* $\mathbb{C}^3$ *έτσι ώστε*

$$(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \oplus \mathcal{U} = \mathbb{C}^3$$

Άσκηση 11. *Να εξετάσετε αν ισχύει ότι:* $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, *όπου* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι οι ακόλουθοι υπόχωροι του* $\mathbb{R}_3[t]$:

$$\mathcal{V} = \big\langle 1, t+t^2, \ 2+3t+3t^2 \big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W} = \big\langle t, \ t^3 \big\rangle$$

Άσκηση 12. *Να δείξετε, με ένα αντιπαράδειγμα, ότι αν* $\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_n$ *είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$, $n \geq 3$, *και ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\vec{0}\}, \quad \forall i,j = 1, \cdots, n, \ \ 1 \leq i \neq j \leq n \qquad (*)$$

τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$ *είναι ευθύ.*

Άσκηση 13. *Έστω ότι* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ *είναι υπόχωροι ενός* $\mathbb{K}$-*διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το άθροισμα* $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ *είναι ευθύ.*

(2) $\mathcal{V}_i \cap \big(\mathcal{V}_{i+1} + \mathcal{V}_{i+2} + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}, \forall i = 1, 2, \cdots, n-1$, *δηλαδή:*

$$\mathcal{V}_1 \bigcap \big(\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$$
$$\mathcal{V}_2 \bigcap \big(\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{V}_{n-2} \bigcap \big(\mathcal{V}_{n-1} + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$$
$$\mathcal{V}_{n-1} \cap \mathcal{V}_n = \{\vec{0}\}$$

Άσκηση 14. *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^4$ *:*

$$\mathcal{W}_1 = \{(t, 2t, -t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{W}_2 = \{(t, s, t-3s, -s) \in \mathbb{R}^4 \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{W}_3 = \{(t, s, 0, r) \in \mathbb{R}^4 \mid t - 2s + r = 0\}$$

(1) *Να δείχθεί ότι τα υποσύνολα* $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ *είναι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^4$ *και να βρεθεί η διάσταση τους.*
(2) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ *είναι ευθύ.*
(3) *Να δείχθεί ότι* $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$.

Άσκηση 15. *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση. Αν* $f^2 = f$, *να δειχθεί ότι*

$$\mathcal{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$$

Επιπρόσθετα, αν $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n < \infty$, *να δειχθεί ότι υπάρχει βάση* $\mathcal{C}$ *του* $\mathcal{E}$ *έτσι ώστε ο πίνακας της* f *στη βάση* $\mathcal{C}$ *να είναι ο εξής:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των μονάδων στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $r = \mathbf{r}(f)$.

Άσκηση 16. *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση. Αν* $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, *να δειχθεί ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-$$

όπου:

$$\mathcal{V}_+ = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{V}_- = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$$

Επιπρόσθετα, αν $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n < \infty$, *να δειχθεί ότι υπάρχει βάση* $\mathcal{C}$ *του* $\mathcal{E}$ *έτσι ώστε ο πίνακας της* f *στη βάση* $\mathcal{C}$ *είναι ο εξής:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 *στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V}_+$ *και το πλήθος των εμφανίσεων του* -1 *στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V}_-$.

Άσκηση 17. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) *Αν* $A^2 = A$, *να δειχθεί ότι ο* A *είναι όμοιος με τον πίνακα:*

$$B = \begin{pmatrix} O_{(n-r)\times(n-r)} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου I_r *είναι ο μοναδιαίος* $r \times r$ *πίνακας και* $r = \mathbf{r}(A)$.

(2) *Αν* $A^2 = I_n$, *να δειχθεί ότι ο* A *είναι όμοιος με τον πίνακα*

$$B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & -I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 *στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου* $\big\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = X\big\}$ *και το πλήθος των εμφανίσεων του* -1 *στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου* $\big\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = -X\big\}$.

Άσκηση 18. *Έστω ο* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *και η γραμμικές απεικονίσεις*

$$f \colon \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(A) = {}^tA$$

(1) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$$

όπου

(α΄) $\mathsf{S}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = A\big\}$ *είναι ο υπόχωρος των συμμετρικών πινάκων.*

(β΄) $\mathsf{A}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = -A\big\}$ *είναι ο υπόχωρος των αντισυμμετρικών πινάκων.*

(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση* $\mathcal{C}$ *του* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:*

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου η μονάδα 1 *εμφανίζεται* $\frac{n^2+n}{2}$*-φορές και το* -1 *εμφανίζεται* $\frac{n^2-n}{2}$*-φορές.*

Υπενθυμίζουμε ότι μια γραμμική απεικόνιση $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **προβολή**[1], αν: $f^2 = f$.
Η γραμμική επεικόνιση $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **ενέλιξη**, αν: $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

[1] Ακριβέστερα η f καλείται **προβολή του χώρου** $\mathcal{E}$ **στον υπόχωρο** $\mathrm{Im}(f)$ **παράλληλα με τον υπόχωρο** $\mathrm{Ker}(f)$.

Άσκηση 19. (1) *Αν η γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι μια προβολή, τότε η γραμμική απεικόνιση*

$$2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = 2f(\vec{x}) - \vec{x}$$

είναι μια ενέλιξη.

(2) *Αν η γραμμική απεικόνιση* $g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι μια ενέλιξη, τότε η γραμμική απεικόνιση*

$$\frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \left(\frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{4}\right)(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x}) + \vec{x}}{4}$$

είναι μια προβολή.

Άσκηση 20. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια προβολή. Τότε η γραμμική απεικόνιση* $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι προβολή και και ισχύει ότι:*

$$\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f + (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \quad \text{και} \quad f \circ (\mathsf{Id}_{\mathcal{F}} - f) = 0 = (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \circ f$$

Επιπλέον:

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \quad \text{και} \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$$

και

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \oplus \mathrm{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$$

Άσκηση 21. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *και υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

όπου $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$, *είναι υπόχωροι του* $\mathcal{E}$.

(1) *Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις,* $1 \leq j \leq n$:

$$\pi_j\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}_j, \quad \pi_j(\vec{x}) = \vec{x}_j$$

όπου $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$ *είναι η μοναδική γραφή του διανύσματος* $\vec{x}$ *του* $\mathcal{E}$ *ως άθροισμα διανυσμάτων* $\vec{x}_i$ *των υπόχωρων* $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$, *και*

$$\iota_j\colon \mathcal{V}_j \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \iota_j(\vec{x}_j) = \vec{x}_j$$

είναι γραμμικές.

(2) *Να δειχθεί ότι,* $\forall \kappa, \mu = 1, 2, \cdots, n$:

$$\pi_k \circ \iota_\mu = \begin{cases} 0, & \text{αν } \kappa \neq \mu \\ \mathsf{Id}_{\mathcal{V}_k}, & \text{αν } \kappa = \mu \end{cases}$$

(3) *Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις,* $1 \leq j \leq n$:

$$\iota_j \circ \pi_j\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι προβολές και ισχύει ότι:

$$\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 + \cdots + \iota_n \circ \pi_n$$

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει ένα αντίστροφο του βασικού ισχυρισμού της προηγούμενης Άσκησης.

Άσκηση 22. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος και έστω ότι, για κάθε* $j = 1, 2, \cdots, n$, *η γραμμική απεικόνιση*

$$\mathsf{p}_j\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι προβολή και ισχύει ότι:

$$1 \leq i \neq j \leq n: \quad \mathsf{p}_i \circ \mathsf{p}_j = 0 \quad \text{και} \quad \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + \cdots + \mathsf{p}_n$$

Τότε θέτοντας $\mathcal{V}_i = \mathrm{Im}(\mathsf{p}_i)$, $1 \leq i \leq n$, *να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2,\ \cdots,\ \mathcal{V}_m$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

$$\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m = \big\{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i,\ 1 \le i \le m\big\}$$

εφοδιασμένο με τις ακόλουθες πράξεις

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) + (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m) = (\vec{v}_1 + \vec{u}_1, \vec{v}_2 + \vec{u}_2, \cdots, \vec{v}_m + \vec{u}_m)$$

$$\lambda(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) = (\lambda\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \cdots, \lambda\vec{v}_m)$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Άσκηση 23. *Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_m$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Θεωρούμε τον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m$ και ορίζουμε μια απεικόνιση*

$$f\ :\ \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m \ \longrightarrow\ \mathcal{E}, \quad f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m$$

(1) *Να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική.*
(2) *Ποιά είναι η εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ της f;*
(3) *Να δειχθεί ότι η f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ.*
(4) *Να δειχθεί ότι η f είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$.*
(5) *Να δειχθεί ότι η f είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$.*

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει ένα αντίστροφο του βασικού ισχυρισμού της προηγούμενης Άσκησης.

Άσκηση 24. *Έστω ότι $\mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2,\ \cdots,\ \mathcal{V}_m$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m$$

Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$, θέτουμε:

$$\mathcal{V}'_i = \Big\{ \underbrace{(\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0})}_{i\text{-θέση}} \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_i \in \mathcal{V}_i \Big\}$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{V}'_i$, $1 \le i \le m$, είναι υπόχωροι του $\mathcal{E}$ και ισχύει ότι:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$$

Άσκηση 25. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι η f είναι επιμορφισμός.*

(1) *Να δειχθεί ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $g\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.*
(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$\mathcal{E} \ \xrightarrow{\cong}\ \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$$

Άσκηση 26. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι η f είναι μονομορφισμός.*

(1) *Να δειχθεί ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $h\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $h \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.*
(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$\mathcal{F} \ \xrightarrow{\cong}\ \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(h)$$

Άσκηση 27. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ *ένας* 2×2*-πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$ *και υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη-μηδενικές στήλες* $X, Y \in \mathbb{K}_2$ *έτσι ώστε:*

$$AX = X \quad \text{και} \quad AY = -Y$$

Να βρεθεί ο πίνακας A^{2021}.