ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 10 Μαρτίου 2023

Άσκηση 1. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Έστω $\vec{x}$ και $\vec{y}$ δύο ιδιοδιανύσματα του f τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του f. Αν $a, b \in \mathbb{K}$ και $ab \neq 0$, να δείξετε ότι το διάνυσμα $a\vec{x} + b\vec{y}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της f.*

Ένας ενδομορφισμός $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ καλείται **ομοθεσία με λόγο** λ, όπου $\lambda \in \mathbb{K}$, αν:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E} : \quad f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

δηλαδή $f = \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. Προφανώς για μια ομοθεσία $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ με λόγο λ, κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Άσκηση 2. *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$.*

(1) *Αν ο ενδομορφισμός f είναι ομοθεσία με λόγο λ, τότε το λ είναι η μόνη ιδιοτιμή του f και κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.*

(2) *Αν κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f, να δειχθεί ότι η f είναι ομοθεσία.*

Άσκηση 3. (1) *Αν A και B είναι δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, τότε:*

$$\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA)$$

(2) *Να δειχθεί ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.*

(3) *Να δειχθεί ότι αν A και B είναι 2×2 πίνακες, τότε[1] οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$.*

(4) *Αν ο πίνακας A ή ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι, και άρα:*

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$

(5) *Να δειχθεί ότι αν A και B είναι $n \times n$ πίνακες, τότε γενικά οι πίνακες AB και BA δεν είναι όμοιοι.*

(6) *Να δειχθεί ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων. Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;

---

[1] Αποδεικνύεται γενικότερα ότι για τυχόντες $n \times n$ πίνακες A και B, οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$.

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον ενδομορφισμό του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$:*
$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y, x+y, y-z)$$
και τον ενδομορφισμό[2] *του $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^3$:*
$$f\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y, x+y, y-z)$$

(1) *Να βρεθούν και στις δυο περιπτώσεις, οι ιδιοτιμές του f καθώς και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι.*
(2) *Και στις δύο περιπτώσεις, να διαγωνοποιηθεί, αν αυτό είναι εφικτό, ο ενδομορφισμός f.*

Άσκηση 6. *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \in \ \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$
Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 7. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του πίνακα*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \ \in \ \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Είναι ο πίνακας διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του σώματος $\mathbb{C}$, όταν θεωρηθεί ως πίνακας μιγαδικών αριθμών;*

Άσκηση 8. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του ενδομορφισμού*
$$f\colon \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t], \quad P(t) \longmapsto f(P(t)) = P(t) - P'(t)$$
Είναι διαγωνοποιήσιμος ο ενδομορφισμός f;

Άσκηση 9. *Αν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός ενδομορφισμού $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ή ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, να δείξετε ότι το λ^m είναι ιδιοτιμή του ενδομορφισμού f^m ή του πίνακα A^m αντίστοιχα, $\forall m \geq 1$. Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_f(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{f^m}(\lambda^m)$ ή των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_A(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{A^m}(\lambda^m)$ αντίστοιχα;*

Άσκηση 10. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$, και $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας. Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός f, αντίστοιχα ο πίνακας A, είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν για κάθε ιδιοτιμή λ του f, αντίστοιχα του A, ισχύει ότι: $\lambda \neq 0$.*

(1) *Αν ο f είναι ισομορφισμός, να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
  (α΄) *Το $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του f.*
  (β΄) *$\lambda \neq 0$ και το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του f^{-1}.*
  Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_f(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$;
(2) *Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
  (α΄) *Το $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του A.*
  (β΄) *$\lambda \neq 0$ και το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.*
  Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_A(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$;

[2] Αν και πρόκειται για διαφορετικές απεικονίσεις, συμβολίζουμε χάριν απλότητας και στις δύο περιπτώσεις τους ενδομορφισμούς με το ίδιο σύμβολο, επειδή έχουν τον ίδιο τύπο ορισμού.

Άσκηση 11. (1) *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Αν ο f είναι ισομορφισμός, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α΄) *Ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(β΄) *Ο f^{-1} είναι διαγωνοποιήσιμος.*
Επιπρόσθετα να δειχθεί ότι αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ στην οποία ο πίνακας του f είναι διαγώνιος, τότε ο πίνακας του f^{-1} στη βάση $\mathcal{B}$ είναι διαγώνιος. Ποιά είναι η σχέση των πινάκων $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ και $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$;

(2) *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α΄) *Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(β΄) *Ο A^{-1} είναι διαγωνοποιήσιμος.*
Επιπρόσθετα να δειχθεί ότι αν P είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος, τότε ο πίνακας $P^{-1}A^{-1}P$ είναι επίσης διαγώνιος. Ποιά είναι η σχέση των πινάκων $P^{-1}AP$ και $P^{-1}A^{-1}P$;

Άσκηση 12. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$

Ακολούθως να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
Ποιά είναι η n-οστή δύναμη του πίνακα A;

Άσκηση 13. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$

Να βρεθεί ο πίνακας $A^m, \forall\, m \geq 1$.

Άσκηση 14. *Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 3 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 4 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$

Να δειχθεί ότι: $A^{593} - 2A^{15} = -A$.

Άσκηση 16. *Βρείτε τις ιδιοτιμές καθώς και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{C})$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Αν ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος, τότε:*

(α′) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος* 3×3 *πίνακας μιγαδικών αριθμών* P *έτσι ώστε ο πίνακας* $P^{-1}AP$ *να είναι διαγώνιος.*

(β′) *Να βρεθεί ο πίνακας* A^{2018}.

Άσκηση 17. *Να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα* $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, *έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \mu \\ 3 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 18. (1) *Να εξετασθεί αν οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι όμοιοι.

(2) *Να εξετασθεί αν οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

είναι όμοιοι.

Άσκηση 19. (1) *Έστω* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ένας* 2×2 *πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι:*

$$P_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc) = t^2 - \mathsf{Tr}(A)t + \mathsf{Det}(A)$$

όπου $\mathsf{Tr}(A) = a + d$ *είναι το ίχνος του* A *και* $\mathsf{Det}(A) = ad - bc$ *είναι η οριζουσα του* A, *και:*

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = A^2 - \mathsf{Tr}(A)A + \mathsf{Det}(A)I_2 = \mathsf{O}$$

(2) *Να βρεθεί η* n*-οστή δύναμη του πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(3) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ είναι όμοιος με τον πίνακα } \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{αν } a = 0 \\[2ex] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{αν } a \neq 0 \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

(4) *Να εξετασθεί αν οι πίνακες* A *και* B *είναι όμοιοι, στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(α′)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(β′)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(γ′)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(δ΄)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 20. *Έστω A και B δύο όμοιοι πίνακες. Να δειχθεί ότι οι πίνακες A^2 και B^2 είναι όμοιοι. Ισχύει το αντίστροφο;*

Άσκηση 21. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $a + bi$ και $a - bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $a + bi$ και $a - bi$ είναι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ και ακολούθως να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας μιγαδικών αριθμών P έτσι ώστε:*

$$P^{-1}\, A\, P = \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}$$

Άσκηση 22. *Έστω A ένας διαγωνοποιήσιμος $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι οι μόνες ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί 1 και -1. Να δειχθεί ότι:*

$$A^2 = I_n$$

Άσκηση 23. *Να προσδιορισθούν όλοι οι 2×2 πίνακες πραγματικών αριθμών οι οποίοι έχουν ως ιδιοτιμές τους αριθμούς 2 και -1 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 24. *Υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός $n \times n$ διαγωνοποιήσιμου πίνακα A είναι το*

$$P_A(t) = t^3(t-1)^2(t-2)^5(t+2)^4$$

(1) *Να βρεθεί το n.*
(2) *Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα A.*

Άσκηση 25. *Να εξετασθούν ως προς τη διαγωνοποίηση οι πίνακες πραγματικών αριθμών:*

$$A_1 = (1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 26. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι οι μόνες ιδιοτιμές του A είναι οι 2, 1, -7, και 13, πιθανόν με κάποιες πολλαπλότητες. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 27. *Να βρεθεί ένας 3×3 πίνακας πραγματικών αριθμών A για τον οποίο τα διανύσματα στήλες*

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του A με αντίστοιχες ιδιοτιμές $1, 2$ και 3.

Άσκηση 28. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$, *όπου* $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$. *Αν*

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

να δειχθεί ότι ο f *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

(1) (α΄) *Αν* $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, *να δείξετε ότι ο* f *είναι διαγωνοποιήσιμος.*
    (β΄) *Αν* $f^2 = f$, *να δείξετε ότι ο* f *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

(2) *Έστω* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.
    (α΄) *Αν* $A^2 = I_n$, *να δείξετε ότι ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος.*
    (β΄) *Αν* $A^2 = A$, *να δείξετε ότι ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Άσκηση 29. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση :*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x + kz,\ 2ky,\ ky + 2z)$$

Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες η* f *είναι διαγωνοποιήσιμη.*

Άσκηση 30. *Να προσδιορισθεί ο* n*-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci* $(F_n)_{n\geq 0}$, *όπου*

$$F_0 = 0, \ \ F_1, \ \ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \ \forall n \geq 1$$

Άσκηση 31. *Έστω* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ *και* $(z_n)_{n\geq 0}$ *ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι οποίες συνδέονται με τις παρακάτω αναγωγικές σχέσεις,* $\forall n \geq 1$*:*

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} \\ y_n &= -2x_{n-1} - 3y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n &= 2x_{n-1} + 4y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{aligned}$$

Να βρεθούν οι ακολουθίες, αν γνωρίζουμε ότι : $x_0 = 2, \ y_0 = 3, \ z_0 = 1$.