ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 17 Μαρτίου 2023

Άσκηση 1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$. Να δειχθεί ότι η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 0$ αν και μόνον αν $A^n = 0$.*

Άσκηση 2. *Να δείξετε ότι ένας μηδενοδύναμος πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, δηλαδή υπάρχει $m \geq 1$ έτσι ώστε $A^m = O$, είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μονον αν $A = O$.*

Άσκηση 3. *Να εξετασθεί αν υπάρχει 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ έτσι ώστε $A^3 = O$ και $A^2 \neq O$.*

Άσκηση 4. *Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ και ισχύει ότι $A^k = O$, για κάποιον θετικό ακέραιο k, να δειχθεί ότι: $A^n = 0$.*

Άσκηση 5. *Έστω $A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$.*

(1) *Αν $\mathsf{Tr}(A^2) = 5$ και $\mathsf{Tr}(A) = 3$, να βρεθεί η ορίζουσα $|A|$ του πίνακα A.*
(2) *Αν $\mathbf{r}(A) = 1$ και $\mathsf{Tr}(A) = 5$, να βρεθεί το ίχνος $\mathsf{Tr}(A^2)$ του πίνακα A^2.*
(3) *Αν $B \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ είναι ένας πίνακας όμοιος με τον A, τότε: $\mathsf{Tr}(A) = \mathsf{Tr}(B)$.*
(4) *Αν ο A έχει θετικές ακέραιες ιδιοτιμές και ορίζουσα $|A| = 5$, να βρεθεί το ίχνος $\mathsf{Tr}(A)$ του πίνακα A.*

Άσκηση 6. *Έστω A και B δύο 2×2 πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, και υποθέτουμε ότι $(AB)^2 = O$. Να εξετασθεί αν $(BA)^2 = O$.*

Άσκηση 7. *Έστω A και B δύο 2×2 πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, και υποθέτουμε ότι:*

$$A = AB - BA$$

Να δειχθεί ότι:

$$A^2 = O$$

Άσκηση 8. *Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, και υποθέτουμε ότι:*

$$|A| = 0 \quad \text{και} \quad \mathsf{Tr}(A) \neq -1$$

Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A + I_2$ είναι αντιστρέψιμος και:

$$A^{-1} = I_2 - \frac{1}{1 + \mathsf{Tr}(A)} A$$

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

και έστω ο πίνακας

$$B = A^4 - 3A^3 + 3A^2 - 2A + 8I_2$$

(1) *Να δειχθεί ότι:*

$$B^2 = -I_2$$

(2) *Είναι ο πίνακας B ή ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$;*
(3) *Είναι ο πίνακας B ή ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{C}$;*

Αν είναι στις παραπάνω περοιπτώσεις ο πίνακας B ή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, να διαγωνοποιηθεί.

Άσκηση 10. *Να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$, δηλαδή να βρεθεί ένας πίνακας $B \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ έτσι ώστε $B^2 = A$.*

Άσκηση 11. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και $\mathcal{B}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ και $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο. Τότε:*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big(P(f)\big) = P\big(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\big)$$

Άσκηση 12. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου$\mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$. Να δειχθεί ότι το ελάχιστο πολυώνυμο της f συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακά της σε μια τυχούσα βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$:*

$$Q_f(t) = Q_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(t)$$

Άσκηση 13. (1) *Έστω $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$ και $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Τότε για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ισχύει ότι:*

$$Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P$$

(2) *Να δειχθεί ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.*
(3) *Να δειχθεί ότι[1], για κάθε τετραγωνικό πίνακα A, οι πίνακες A και ${}^tA$ έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.*

Άσκηση 14. *Βρείτε τα ελάχιστα πολυώνυμα των ακόλουθων πινάκων πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 15. *Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον πίνακα

$$B = A^{23} - 3A^{22} - 4A^{21} + 10A^{20} - A^6 + 3A^5 + 4A^4 - 11A^3 + 4A^2 + 5A + I_3$$

[1] Αποδεικνύεται ότι οι πίνακες A κα ${}^tA$ είναι όμοιοι.

Άσκηση 16. *Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο σταθερός όρος του ελαχίστου πολυωνύμου $Q_A(t)$ του A είναι μη-μηδενικός.*

Άσκηση 17. *Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να εκφράσετε τον αντίστροφο του πίνακα*

$$B = A^4 + 5A^3 - 48A^2 - I_2$$

στη μορφή $\kappa A + \lambda I_2$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ είναι κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί.

Άσκηση 18. *Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{K}$, και έστω k ένας φυσικός αριθμός, $k > 2$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να αποδειχθεί ότι*

$$A^k = 0 \quad \Longrightarrow \quad A^2 = 0$$

Άσκηση 19. *Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών, όπου n είναι περιττός, να δειχθεί ότι*

$$A^2 + I_n \neq O$$

Λύση. *Υποθέτουμε ότι $A^2 + I_n = O$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^2 + 1$. Τότε $Q(A) = O$ και επομένως*

$$Q_A(t) \mid t^2 + 1$$

Επειδή το πολυώνυμο t^2+1 είναι ανάγωγο, έπεται ότι $Q_A(t) = t^2+1$. Το πολυώνυμο t^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Από την άλλη πλευρά, επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ είναι περιττού βαθμού, έπεται ότι[2] έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα. Επειδή το ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυλωνυμο έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t) = t^2 + 1$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα, και αυτό είναι άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $A^2 + I_n = O$. Άρα $A^2 + I_n \neq O$.

Άσκηση 20. *Έστω $R(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$ ένα πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{K}$ με $a_0 \neq 0$.*

(1) *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $R(f) = 0$, να δειχθεί ότι ο f είναι ισομορφισμός και να υπολογισθεί ο f^{-1}.*

(2) *Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ και $R(A) = 0$, να δεχιθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογισθεί ο A^{-1}.*

Άσκηση 21. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος (α) υπεράνω του $\mathbb{R}$; (β) υπεράνω του $\mathbb{C}$;

Άσκηση 22. *Έστω ο $n \times n$ πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι ταυτοδύναμος, δηλαδή $(\frac{1}{n}A)^2 = \frac{1}{n}A$.*

(2) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του $\frac{1}{n}A$.*

(3) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*

---

[2] Θεωρούμε γνωστό ότι: *«κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα».*

Υπενθυμίζουμε ότι η σχέση ομοιότητας $n \times n$ πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Η κλάση ομοιότητας ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ αποτελείται από το σύνολο ολων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ οι οποίοι είναι όμοιοι με τον A.

Άσκηση 23. *Να περιγραφούν οι διαφορετικές κλάσεις ομοιότητας ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ για τον οποίο ισχύει*

$$A^3 = A$$

Άσκηση 24. *Θεωρούμε τον πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) *Να βρεθεί μη-μηδενικό πολυώνυμο $Q(t)$ έτσι ώστε $Q(A) = 0$.*
(2) *Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί πολυώνυμο $P(t)$ έτσι ώστε $P(A) = A^{-1}$.*

Άσκηση 25. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί πολυώνυμο $P(t)$ έτσι ώστε:*

$$A^{-2} = P(A)$$

(2) *Να δειχθεί ότι*

$$A^{2018} - 2A^{2017} = A^2 - 2A$$

Άσκηση 26. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 27. *Έστω ότι $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^3 = 2A$. Αν ο A είναι πίνακας πραγματικών αριθμών, δηλαδή αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*

Αν ο A είναι πίνακας ρητών αριθμών, δηλαδή αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, είναι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 28. *Έστω A ένας 4×4 πίνακας πραγματικών αριθμών για τον οποίο ισχύουν τα εξής:*

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

Υπενθυμίζουμε ότι:

(1) Ένας ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται *μηδενοδύναμος* αν: $f^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.
(2) Ο πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ καλείται *μηδενοδύναμος* αν: $A^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.

Άσκηση 29. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος διάστασης $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$ και $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(1) *Ο f είναι μηδενοδύναμος: $f^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.*
(2) *Η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η μηδενική.*
(3) $f^n = 0$.
(4) *Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f είναι της μορφής: $Q_f(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$.*

Άσκηση 30. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(1) *Ο A είναι μηδενοδύναμος: $A^m = O$, για κάποιο $m \geq 1$.*
(2) *Η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η μηδενική.*
(3) $A^n = O$.
(4) *Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι της μορφής: $Q_A(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$.*

Άσκηση 31. *Αν $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Τότε οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηρισικό πολυώνυμο:*

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$

Άσκηση 32. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω $f,\ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Τότε οι ενδομορφισμοί $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:*

$$P_{f\circ g}(t) = P_{g\circ f}(t)$$

Άσκηση 33. *Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι 3 και -1. Έστω $n \geq 0$. Να βρεθεί ο πίνακας A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$, συναρτήσει των πινάκων A και I_2, σε δύο μέρη:*
(1) *Να βρεθούν αριθμοί $a_n, b_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{n+1} = a_n A + b_n I_2$.*
(2) *Να βρεθούν αριθμοί $c_n, d_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{-n-1} = c_n A + d_n I_2$.*

Άσκηση 34 (Θεώρημα Cayley-Hamilton)**.** *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Αν $P_A(t)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, να δειχθεί ότι:*

$$P_A(A) = O$$

Η επόμενη ομάδα ασκήσεων **33** - **38** αφορά ταυτόχρονη διαγωνοποίηση ενδομορφισμών και τετραγωνικών πινάκων, με την ακόλουθη έννοια.

(1) Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f,\ g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Τότε οι ενδομορφισμοί f και g καλούνται **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι**, αν υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g.
(2) Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Οι πίνακες A, B καλούνται **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1 \qquad \text{και} \qquad P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$$

όπου οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι διαγώνιοι. Δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ο οποίος διαγωνοποιεί ταυτόχρονα τους A, B.

Άσκηση 35. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Αν οι πίνακες A, B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι, τότε ισχύει ότι:*

$$A\,B = B\,A$$

Άσκηση 36. *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \qquad \text{και} \qquad f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$$

Θεωρούμε τον επαγόμενο ενδομορφισμό $f_{\mathcal{V}} = f|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, όπου $f|_{\mathcal{V}}$ είναι ο περιορισμός του f στον υπόχωρο $\mathcal{V}$.

(1) *Να δειχθεί ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t)$ του $f_{\mathcal{V}}$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f:*

$$Q_{f_{\mathcal{V}}}(t) \mid Q_f(t)$$

(2) *Να δειχθεί ότι*

$$\text{Ο } f \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Ο } f_{\mathcal{V}} \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος}$$

Άσκηση 37. *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k \qquad \text{και} \qquad f(\mathcal{V}_i) \subseteq \mathcal{V}_i, \;\; 1 \leq i \leq k$$

Θεωρούμε τους επαγόμενους ενδομορφισμούς $f_{\mathcal{V}_i} : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{V}_i$, όπου $f_{\mathcal{V}_i} = f|_{\mathcal{V}_i}$ είναι ο περιορισμός του f στον υπόχωρο $\mathcal{V}_i$. Τότε:

$$\text{Ο } f \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{Ο } f_{\mathcal{V}_i} \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος}, \quad 1 \leq i \leq k$$

Άσκηση 38. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι διαγωνοποιήσιμοι και $f \circ g = g \circ f$. Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g.*

Η ακόλουθη Άσκηση παρουσιάζει ένα κριτήριο ταυτόχρονης διαγωνοποίησης για ενδομορφισμούς.

Άσκηση 39. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Οι f και g είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.*
(2) *Οι f και g είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $f \circ g = g \circ f$.*

Η ακόλουθη Άσκηση παρουσιάζει ένα κριτήριο ταυτόχρονης διαγωνοποίησης για τετραγωνικούς πίνακες.

Άσκηση 40. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Οι πίνακες A και B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.*
(2) *Οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $A\,B = B\,A$.*

Άσκηση 41. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός.*

Άσκηση 42. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 11 \\ -3 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P *έτσι ώστε ο πίνακας* $P^{-1}AP$ *να είναι άνω τριγωνικός.*