

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 24 Μαρτίου 2023

Άσκηση 1. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας μονομορφισμός. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle$$

Ναδειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathcal{E}, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος.

Άσκηση 2. Έστω η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 5x_1x_2 - 2(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2$$

(1) Ναδειχθεί ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^2 .

(2) Να βρεθούν τα μήκη των διανυσμάτων $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(-1, 2)$ ως προς το παραπάνω το εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 3. Έστω $\mathbb{R}_n[t]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$, με πραγματικούς συντελεστές. Έστω ότι $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι ανα δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Ναδειχθεί ότι η σχέση

$$\langle P(t), Q(t) \rangle = P(\alpha_0)Q(\alpha_0) + P(\alpha_1)Q(\alpha_1) + \dots + P(\alpha_n)Q(\alpha_n)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}_n[t]$. Να βρεθεί το μήκος καθενός από τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ του $\mathbb{R}_n[t]$ ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 4. Θεωρούμε τη βάση $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 1), \vec{\varepsilon}_2 = (1, -1)\}$ του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^2 . Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του \mathbb{R}^2 έτσι ώστε:

$$\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1 \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2 \rangle = 1, \quad \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2 \rangle = 0$$

Να υπολογισθούν οι αριθμοί $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle$, όπου $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Άσκηση 5. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_2[t]$ με εσωτερικό γινόμενο, $\forall P(t), Q(t) \in \mathbb{R}_2[t]$:

$$\langle P(t), Q(t) \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

και τα πολυώνυμα

$$P(t) = 1, \quad Q(t) = t - \frac{1}{2}, \quad W(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

Να υπολογισθούν τα μήκη

$$\|P(t)\|, \quad \|Q(t)\|, \quad \|W(t)\|$$

Άσκηση 6. Να υπολογισθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x} = (1, 0, 1)$, $\vec{y} = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ ως προς το συνήδες εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^3 . Ακολουθώντας να βρεθούν όλα τα διανύσματα του \mathbb{R}^3 τα οποία είναι κάθετα στα διανύσματα \vec{x} και \vec{y} .

Άσκηση 7. Έστω ότι $(\mathcal{E}_i, \langle, \rangle_i)$, $1 \leq i \leq n$, είναι Ευκλείδειοι χώροι. Στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \cdots \times \mathcal{E}_n$, ορίζουμε απεικόνιση:

$$\langle, \rangle: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n), (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n) \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1 \rangle_1 + \langle \vec{x}_2, \vec{y}_2 \rangle_2 + \dots + \langle \vec{x}_n, \vec{y}_n \rangle_n$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος.

Ένας συμμετρικός πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται **θετικά ορισμένος**, αν:

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n: \quad {}^t X \cdot A \cdot X \geq 0 \quad \text{και} \quad {}^t X \cdot A \cdot X = 0 \implies X = 0$$

όπου:

$${}^t X \cdot A \cdot X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j a_{ij}$$

Άσκηση 8. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n\}$ μια βάση του \mathcal{E} . Θεωρούμε τον πίνακα:

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = {}^t X \cdot A \cdot Y$$

όπου:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων \vec{x}, \vec{y} στη βάση \mathcal{B} , και ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Άσκηση 9. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος και $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n\}$ μια βάση του \mathcal{E} . Αν $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, τότε ορίζουμε απεικόνιση:

$$\langle, \rangle: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = {}^t X \cdot A \cdot Y$$

όπου:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων \vec{x}, \vec{y} στη βάση \mathcal{B} . Να δειχθεί ότι η απεικόνιση \langle, \rangle είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του \mathcal{E} αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Άσκηση 10. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν η απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_* = {}^t X \cdot A \cdot Y$$

όπου $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, και:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^3 . Αν η απάντηση είναι θετική, τότε:

- (1) Να προσδιορισθούν τα μήκη, καθώς και οι μεταξύ τους γωνίες, των διανυσμάτων της κανονικής βάσης του \mathbb{R}^3 ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο.
- (2) Να βρεθούν όλα τα διανύσματα $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε:

$$\langle (1, 1, 1), (x_1, x_2, x_3) \rangle_* = 0$$

Άσκηση 11. Να εξετασθεί αν απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_* = -x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_3 y_3$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^3 .

Άσκηση 12. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος.

- (1) Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι: $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \iff \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0$. Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ισοδυναμίας;
- (2) Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \iff \forall a, b \in \mathbb{R} : \|a\vec{x} + b\vec{y}\| = \|b\vec{x} + a\vec{y}\|$$

- (3) Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:

$$\left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας;

- (4) Έστω ότι $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, έτσι ώστε $\|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.
 - (α) Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| > 1$, ο ενδομορφισμός $f - \lambda \text{Id}_{\mathcal{E}}$ του \mathcal{E} είναι αντιστρέψιμος.
 - (β) Να δειχθεί ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του f , $|\lambda| \leq 1$.

Ένας **μετρικός χώρος** είναι ένα ζεύγος (E, d) αποτελούμενο από ένα μη-κενό σύνολο X και από μια απεικόνιση

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto d(x, y)$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

- (1) $\forall x, y \in E : d(x, y) \geq 0$. (Μη-αρνητικότητα)
- (2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (3) $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$. (Συμμετρία)
- (4) $\forall x, y, z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (Τριγωνική ανισότητα)

Η απεικόνιση d καλείται **μετρική**.

Άσκηση 13. Έστω ότι $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Ορίζουμε απεικόνιση

$$d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto d(x, y) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad (\text{απόσταση των } \vec{x}, \vec{y})$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση d είναι μια μετρική και άρα το ζεύγος (\mathcal{E}, d) είναι ένας μετρικός χώρος.

Άσκηση 14. Έστω ότι a_1, a_2, \dots, a_n είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δείχθεί ότι:

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

Άσκηση 15. Έστω η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$$

- (1) Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^3 .
- (2) Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του \mathbb{R}^3 τα οποία είναι κάθετα, ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle'$, με κάθε διάνυσμα του υπόχωρου

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ καλείται:

- (1) **ορθογώνιο**, αν: $1 \leq i \neq j \leq n \implies \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$.
- (2) **ορθοκανονικό**, αν είναι ορθογώνιο και, $\forall i = 1, 2, \dots, n: \|\vec{e}_i\| = 1$.
- (3) **ορθοκανονική βάση**, αν είναι βάση και ορθοκανονικό σύνολο.

Άσκηση 16. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}_2[t], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle P(t), Q(t) \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

- (1) Να βρεθούν τα μήκη και οι γωνίες των διανυσμάτων $t, 1+t$.
- (2) Να δείχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων

$$P(t) = 1, \quad Q(t) = t - \frac{1}{2}, \quad R(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

είναι μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.

- (3) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.

Άσκηση 17. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, και $\vec{x} \in \mathcal{E}$ ένα μη-μηδενικό διάνυσμα. Αν θ_i είναι η γωνία των διανυσμάτων \vec{x} και \vec{e}_i , $1 \leq i \leq n$, να δείχθεί ότι:

$$\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2) + \dots + \cos^2(\theta_n) = 1$$

Άσκηση 18. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{E} . Να δείξετε ότι, $\forall \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle^2 + \dots + \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_m \rangle^2 \leq \|\vec{y}\|^2$$

και:

$$\langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle^2 + \dots + \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_m \rangle^2 = \|\vec{y}\|^2 \iff m = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}$$

Άσκηση 19. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Να δείχθεί ότι:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \iff \|\vec{x}\| \leq \|\vec{x} + \lambda \vec{y}\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Ο **πίνακας Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως εξής:

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{pmatrix}$$

και η **ορίζουσα Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως η ορίζουσα του πίνακα Gram:

$$|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)| = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{vmatrix}$$

Άσκηση 20. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:

$$|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)| \neq 0 \iff \text{το σύνολο διανυσμάτων } \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο}$$

Άσκηση 21. Έστω ότι $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, και c_1, c_2, \dots, c_n είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν $c_1, c_2, \dots, c_n > 0$, να δειχθεί ότι:

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i b_i^2}$$

Άσκηση 22. Έστω ότι $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Να δείξετε ότι, $\forall \vec{z}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\|\vec{z} - \vec{x}\|^2 + \|\vec{z} - \vec{y}\|^2 = \frac{1}{2} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + 2 \left\| \vec{z} - \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) \right\|^2 \quad (\text{Ταυτότητα του Απολλώνιου})$$

Τι εκφράζει γεωμετρικά η ταυτότητα του Απολλώνιου;

Άσκηση 23. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ τρία διανύσματα του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \cdot \|\vec{z}\| \leq \|\vec{y} - \vec{z}\| \cdot \|\vec{x}\| + \|\vec{z} - \vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad (\text{Ανισότητα του Πτολεμαίου})$$

Άσκηση 24. Έστω ότι $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:

(1)

$$2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \quad (\text{Νόμος του Παραλληλογράμμου})$$

Τι εκφράζει γεωμετρικά ο Νόμος του παραλληλογράμμου;

(2)

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2}{4}$$

Τι εκφράζει αλγεβρικά η παραπάνω ταυτότητα;

Αν \mathcal{E} είναι ένας \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος, τότε μια απεικόνιση

$$\|\cdot\|: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\|$$

καλείται **στάθμη** επί του \mathcal{E} , αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- (1) $\|\vec{x}\| \geq 0$, και $\|\vec{x}\| = 0$ αν και μόνον αν $\vec{x} = \vec{0}$.
- (2) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$.
- (3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Το ζεύγος $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ καλείται **σταθμητός χώρος**, αν \mathcal{E} είναι ένας \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος και $\|\cdot\|: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια στάθμη επί του \mathcal{E} .

Για παράδειγμα, αν $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος, τότε γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$\|\cdot\|: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\| = +\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

είναι μια στάθμη επί του \mathcal{E} . Η στάθμη αυτή καλείται η **στάθμη η οποία επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο** $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Επομένως κάθε Ευκλείδειος χώρος είναι σταθμητός χώρος.

Οι επόμενες δύο Ασκήσεις δείχνουν ότι υπάρχουν στάθμες επί ενός \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου οι οποίες δεν επάγονται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 25. Στον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^n , θεωρούμε την απεικόνιση

$$\|\cdot\|_\infty: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_\infty$ είναι μια στάθμη επί του \mathbb{R}^n η οποία **δεν** επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 26. Για κάθε πραγματικό αριθμό $p > 1$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\|\cdot\|_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(1) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_p$ είναι μια στάθμη επί του \mathbb{R}^n .

(2) Να δειχθεί ότι η στάθμη $\|\cdot\|_p$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^n αν και μόνον αν $p = 2$.