ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 31 Μαρτίου 2023

Αν $\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων ενός Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$, τότε, για να μην δημιουργείται σύγχιση με το σύμβολο του εσωτερικού γινομένου $\langle,\rangle$, **ο υπόχωρος του** $\mathcal{E}$ **ο οποίος παράγεται** από το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C}$, αντί να συμβολίζεται με $\langle\mathcal{C}\rangle = \langle\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\rangle$, θα συμβολίζεται με:

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \big\{\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n \ \in \ \mathcal{E} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n\big\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η **ορθογώνια προβολή** ενός διανύσματος $\vec{x}$ σε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{y}$ είναι το διάνυσμα:

$$\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle}{\langle\vec{y}, \vec{y}\rangle}\,\vec{y} = \frac{\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle}{\|\vec{y}\|^2}\,\vec{y}$$

και έχει την ιδιότητα ότι:

$$\Big(\vec{x} - \Pi_{\vec{y}}(\vec{x})\Big) \perp \vec{y}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{E}$, τότε με τη **διαδικασία Gram-Schmidt** κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων $\mathcal{D} = \big\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\big\}$ και ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$, όπου:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{και} \quad \vec{y}_k = \vec{x}_k - \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) - \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_k) - \cdots - \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k), \quad 2 \leq k \leq n \tag{†}$$

και

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{y}_k}{\|\vec{y}_k\|}, \quad 1 \leq k \leq n$$

• • • • •

Άσκηση 1. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, και $\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{E}$. Έστω $\mathcal{D} = \big\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\big\}$ το ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων και $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ το ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων, τα οποία κατασκευάζονται με τη διαδικασία Gram-Schmidt. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k) = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

Έστω $(\mathcal{E},\, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Υπενθυμίζουμε από το Φυλλάδιο Ασκήσεων **4.** ότι ο **πίνακας Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως εξής:

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{pmatrix}$$

και η **ορίζουσα Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως η ορίζουσα του πίνακα Gram:

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{vmatrix}$$

Άσκηση 2. *Έστω $(\mathcal{E},\, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| \;\geq\; 0$$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\mathcal{V}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Υπενθυμίζουμε τότε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp}$ και η **ορθογώνια προβολή** του διανύσματος $\vec{x} \in \mathcal{E}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ είναι το (μοναδικό) διανυσμα $\vec{y} \in \mathcal{Y}$ έτσι ώστε $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, όπου $\vec{z} \in \mathcal{V}^{\perp}$, και συμβολίζεται με $\vec{y} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x})$. Το (μοναδικό) διάνυσμα $\vec{z}$ παραπάνω καλείται[1] η **κάθετη προβολή** του διανύσματος $\vec{x} \in \mathcal{E}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ και συμβολίζεται με $\vec{z} = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})$.

Με τους παραπάνω συμβολισμούς, έχουμε μοναδική γραφή:

$$\vec{x} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) + \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \quad \text{όπου} \quad \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V}^{\perp}$$

Άσκηση 3. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, και $\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Έστω $\mathcal{C} = \big\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\big\}$ το ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων το οποίο κατασκευάζεται ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt. Να δειχθεί ότι, $\forall k = 2, \cdots, n$:*

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}) \oplus \mathcal{L}(\vec{y}_k) \qquad \text{(ορθογώνιο ευθύ άθροισμα)} \qquad (\dagger)$$

Ιδιαίτερα να δειχθεί ότι για κάθε $k = 2, \cdots, n$, το διάνυσμα $\vec{y}_k$ είναι η κάθετη προβολή του $\vec{x}_k$ στον υπόχωρο $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})$:

$$\vec{y}_k = \mathsf{K}_{\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})}(\vec{x}_k)$$

Άσκηση 4. *Έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δυο υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$.*

(1) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^{\perp} \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$$

(2) *Να δειχθεί ότι:*

$$(\mathcal{V} + \mathcal{W})^{\perp} = \mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp}$$

(3) *Αν $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, να δειχθεί ότι:*

(α΄)

$$(\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{V}$$

(β΄)

$$(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^{\perp} = \mathcal{V}^{\perp} + \mathcal{W}^{\perp}$$

[1] Δηλαδή η κάθετη προβολή του $\vec{x}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στον $\mathcal{V}^{\perp}$:

$$\Pi_{\mathcal{V}^{\perp}}(\vec{x}) = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})$$

(4) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \quad \iff \quad \mathcal{E} = \mathcal{V}^{\perp} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$$

Άσκηση 5. *Έστω $\mathcal{V}$ ένας υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, όπου $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{E} < \infty$. Να δειχθεί ότι αν $\vec{x} \notin \mathcal{V}$, τότε υπάρχει διάνυσμα $\vec{w} \in \mathcal{V}^{\perp}$ έτσι ώστε:*

$$\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \neq 0$$

Άσκηση 6. *Έστω $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ δύο υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle\, , \,\rangle)$, και έστω ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Αν $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$, να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{U}$$

Άσκηση 7. *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\langle\, , \,\rangle_* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \big\langle (x_1, x_2, x_3)\,,\, (y_1, y_2, y_3) \big\rangle_* = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$. Ακολούθως να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $\big(\mathbb{R}^3, \langle\, , \,\rangle_*\big)$.

Άσκηση 8. *Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^3, \langle\, , \,\rangle)$ να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση των υπόχωρου $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, και $\mathcal{W}$ του $\mathbb{R}^3$, όπου:*

$$\mathcal{U} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y - 2z = 0\big\}$$
$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\big\}$$
$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y - 2z = 0 \;\text{ και }\; 2x - y - z = 0\big\}$$

Άσκηση 9. *Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^4, \langle\, , \,\rangle)$ να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \vec{x}_2 = (0, 0, -2, 1), \quad \vec{x}_3 = \vec{x}_3 = (0, -1, 0, 2)$$

και ακολούθως να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$, και η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $(0, 1, 0, 0)$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$.

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο $\mathcal{V}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$, όπου $\langle , \rangle$ είναι το κανονικό (συνηθισμένο) εσωτερικό γινόμενο:*

$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z = 0 \quad \text{και} \quad y - z - w = 0\big\}$$

1. *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$.*
2. *Να βρεθεί ο ορθογώνιος υπόχωρος $\mathcal{V}^{\perp}$ του $\mathcal{V}$.*

Άσκηση 11. *Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$:*

$$\mathcal{V} = \big\{\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0\big\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}^{\perp}$, όταν:

(1) *Ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.*
(2) *Ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \cdots + nx_ny_n$$

όπου: $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$.

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τους υποχώρους του*

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\} \\ \mathcal{W} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + w = 0\}\end{aligned}$$

(1) *Να εξετάσετε αν οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι ορθοσυμπληρωματικοί*[2].
(2) *Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^\perp$ του υπόχωρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.*

Άσκηση 13. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω*

$$\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\big\}$$

(1) *Να βρεθούν ορθοκανονικές βάσεις των υποχώρων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{V}^\perp$.*
(2) *Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{x} = (2, -1, 0)$ ως $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, όπου $\vec{y} \in \mathcal{V}$ και $\vec{z} \in \mathcal{V}^\perp$.*

Άσκηση 14. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x - y,\, y - z,\, z - x)$$

(1) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ της f.*
(2) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του ορθοσυμπληρωματικού υποχώρου $\mathsf{Im}(f)^\perp$.*

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (2,-3,1,0), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (7,3,0,1), \quad \vec{\varepsilon}_3 = (-1,0,1,0), \quad \vec{\varepsilon}_4 = (0,1,1,1)$$

Να βρεθεί ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$ στον $\mathbb{R}^4$ έτσι ώστε το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \vec{\varepsilon}_3,\ \vec{\varepsilon}_4\}$ να αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 16. *Έστω $\vec{e}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$. Να δειχθεί ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται μοναδικά ως εξής:*

$$\vec{x} = \alpha\vec{e} + \vec{y}, \qquad \text{όπου: } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \langle \vec{y}, \vec{e} \rangle = 0$$

Ο μοναδικά προσδιορισμένος από το διάνυσμα $\vec{x}$ αριθμός α καλείται η αριθμητική προβολή του $\vec{x}$ στην διεύθυνση του $\vec{e}$ και συμβολίζεται με[3]*:*

$$\alpha := \pi_{\vec{e}}(\vec{x})$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\pi_{\vec{e}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \pi_{\vec{e}}(\vec{x})$$

είναι γραμμική, δηλαδή, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $r \in \mathbb{R}$:
 (α΄) $\pi_{\vec{e}}(\vec{x} + \vec{y}) = \pi_{\vec{e}}(\vec{x}) + \pi_{\vec{e}}(\vec{y})$.
 (β΄) $\pi_{\vec{e}}(r\vec{x}) = r\pi_{\vec{e}}(\vec{x})$
(2) *Να δειχθεί ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:*

$$\pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e} \rangle$$

(3) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathrm{Ker}(\pi_{\vec{e}}) = \vec{e}^{\perp} = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{e}, \vec{x} \rangle = 0\big\} \qquad \text{και} \qquad \mathrm{Im}(\pi_{\vec{e}}) = \mathbb{R}$$

---

[2] Υπενθυμίζουμε ότι δύο υπόχωροι $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ ενός Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle\, , \rangle)$ καλούνται **ορθοσυμπληρωματικοί**, αν

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{U} \perp \mathcal{V}$$

και τότε ο $\mathcal{U}$ καλείται ορθοσυμπληρωματικός του $\mathcal{V}$ και ο $\mathcal{V}$ καλείται ορθοσυμπληρωματικός του $\mathcal{U}$.

[3] Έτσι, επειδή το $\vec{e}$ είναι μοναδιαίο, η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στο διάνυσμα $\vec{e}$ είναι το διάνυσμα $\Pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \pi_{\vec{e}}(\vec{x})\vec{e}$.

(4) *Αν* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \vec{\varepsilon}_n\}$ *είναι μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{E}$, *να δειχθεί ότι:*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \pi_{\vec{\varepsilon}_i}(\vec{x})\vec{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_i \rangle \vec{\varepsilon}_i = \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle \vec{\varepsilon}_1 + \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_2 \rangle \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_n \rangle \vec{\varepsilon}_n$$

Άσκηση 17. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και* $\mathcal{V}$ *ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι οι απεικόνισεις*

$$\Pi_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \textit{ορθογώνια προβολή του } \vec{x} \textit{ στον υπόχωρο } \mathcal{V}$$

$$\mathsf{K}_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \textit{κάθετη προβολή του } \vec{x} \textit{ στον υπόχωρο } \mathcal{V}$$

είναι προβολές.

Επιπλέον, αν $\mathcal{C} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\big\}$ *είναι μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{D} = \big\{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ *μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}^{\perp}$, *τότε:*

(1)
$$\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$$

(2)
$$\mathrm{Ker}(\Pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}^{\perp} \quad \textit{και} \quad \mathrm{Im}(\Pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$$

(3)
$$\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+1} \rangle \vec{e}_{k+1} + \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+2} \rangle \vec{e}_{k+2} + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_n \rangle \vec{e}_n$$

(4)
$$\mathrm{Ker}(\mathsf{K}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V} \quad \textit{και} \quad \mathrm{Im}(\mathsf{K}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}^{\perp}$$

(5) *Αν* $\iota_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}$ *και* $\iota_{\mathcal{V}^{\perp}} \colon \mathcal{V}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι οι κανονικές εγκλείσεις, τότε:*

$$\Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \mathsf{Id}_{\mathcal{V}} \quad \textit{και} \quad \mathsf{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^{\perp}} = \mathsf{Id}_{\mathcal{V}^{\perp}}$$

$$\Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^{\perp}} = \mathsf{O} \quad \textit{και} \quad \mathsf{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \mathsf{O}$$

$$\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_{\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}} + \iota_{\mathcal{V}^{\perp}} \circ \mathsf{K}_{\mathcal{V}}$$

Άσκηση 18. *Θεωρούμε τον Ευκλειδειο χώρο* $(\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$, *όπου* $\langle , \rangle$ *είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο:*

$$\langle , \rangle \ : \ \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B \rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^{t}B)$$

Έστω $\mathsf{D}_n(\mathbb{R})$ *ο υπόχωρος των* $n \times n$ *διαγώνιων πινάκων, και* $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$, *αντίστοιχα* $\mathsf{A}_n(\mathbb{R})$, *ο υπόχωρος των* $n \times n$ *συμμετρικών, αντίστοιχα αντισυμμετρικών, πινάκων.*

(1) *Να δειχθεί ότι:*
$$\mathsf{D}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid a_{ii} = 0,\ 1 \leq i \leq n\big\}$$

(2) *Να δειχθεί ότι:*
$$\mathsf{S}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathsf{A}_n(\mathbb{R}) \quad \textit{και} \quad \mathsf{A}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$$

(3) *Να βρεθούν οι ορθογώνιες προβολές ενός* $n \times n$ *πίνακα* A *στους υπόχωρους* $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$ *και* $\mathsf{A}_n(\mathbb{R})$.

Άσκηση 19. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, *και έστω* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι αν* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, *τότε*[4] *υπάρχει* $c \in \mathbb{R}$:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E}: \quad \|f(\vec{x})\| \leq c\,\|\vec{x}\|$$

---

[4]Ένας ενδομορφισμός $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ καλείται **φραγμένος**, αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\|f(\vec{x})\| \leq c\|\vec{x}\|$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$. Έτσι σύμφωνα με την Άσκηση, κάθε ενδομορφισμός ενός Ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι φραγμένος.

Άσκηση 20. *Στον Ευκλείδειο χώρο* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *θεωρούμε τρία σύνολα διανυσμάτων*

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \cdots, \vec{e}_n\right\}$$
$$\mathcal{C} = \left\{\vec{f}_1,\, \vec{f}_2,\, \cdots, \vec{f}_n\right\}$$
$$\mathcal{D} = \left\{\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \cdots, \vec{g}_n\right\}$$

και υποθέτουμε ότι:

(1) *Το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
(2) *Το σύνολο* $\mathcal{C}$ *είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα.*
(3) *Το σύνολο* $\mathcal{D}$ *είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα.*
(4) *Για κάθε* $k = 1, 2, \cdots, n$, *κάθε ένα από τα διανύσματα* $\vec{f}_1,\, \vec{f}_2,\, \cdots, \vec{f}_k$ *και κάθε ένα από τα διανύσματα διάνυσμα* $\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \cdots, \vec{g}_k$, *είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων* $\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \cdots, \vec{e}_k$.

Να δειχθεί ότι υπάρχουν μη-μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha_k \in \mathbb{R}$, *έτσι ώστε,* $\forall k = 1, 2, \cdots, n$:

$$\vec{f}_k = \alpha_k \vec{g}_k$$