# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

## Ασκησεις - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

**Παρασκευή 7 Απριλίου 2023**

**Άσκηση 1.** *Να εξετασθεί αν οι ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ Ευκλείδειων χώρων είναι ισομετρίες.*

(1) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x,y,0)$.
(2) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x,y)$.
(3) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$.
(4) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (ay, bz, cx)$, *όπου* $a,b,c \in \mathbb{R}$.

**Άσκηση 2.** *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος και θεωρούμε τον ενδομορφισμό*

$$f\ :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

*όπου* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. *Να δείξετε ότι η* $f$ *είναι ισομορφισμός, αλλά γενικά όχι ισομετρία. Να βρεθεί αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε η* $f$ *να είναι ισομετρία.*

**Άσκηση 3.** (1) *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος και υποθέτουμε ότι* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *είναι μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{E}$.

*Έστω* $f\ :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ο μοναδικός ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2, \qquad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_3, \qquad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_4, \qquad f(\vec{e}_4) = \vec{e}_1$$

*Να εξετασθεί αν ο ενδομορφισμός* $f$ *είναι ισομετρία.*

(2) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα* $f+g$ *δύο ισομετριών* $f,\ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ισομετρία.*

(3) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα* $A+B$ *ή* $A+B^2$, *όπου* $A$ *και* $B$ *είναι δύο* $n \times n$ *ορθογώνιοι πίνακες, είναι ορθογώνιος πίνακας.*

**Άσκηση 4.** *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος. Αν* $\kappa \in \mathbb{R}$ *και* $\vec{v} \in \mathcal{E}$, *να εξεταστεί αν ο ενδομορφισμός*

$$f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{x}, & \text{αν } \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{x} + \kappa\dfrac{\langle \vec{x}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}\,\vec{v}, & \text{αν } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

*είναι ισομετρία.*

Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος διάστασης $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = n$. Ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ καλείται **υπερεπίπεδο** του $\mathcal{E}$, αν έχει διάσταση $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = n-1$. Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Ένας ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **ανάκλαση**, αν υπάρχει ένα υπερεπίπεδο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{x}, & \text{αν } \vec{x} \in \mathcal{V} \\ -\vec{x}, & \text{αν } \vec{x} \notin \mathcal{V} \end{cases}$$

και τότε ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ καλείται **υπερεπίπεδο ανάκλασης** για τον $f$.

**Άσκηση 5.** *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\,,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, όπου $f \neq \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. Να δειχθεί ότι ο $f$ είναι μια ανάκλαση αν και μόνον αν υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:*

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{\langle \vec{x}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}\,\vec{v} \tag{$*$}$$

**Άσκηση 6.** *Έστω $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

(1) *Αν $\vec{x}, \vec{y}$ είναι δύο διανύσματα του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, να δείξετε ότι υπάρχει μια ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε: $f(\vec{x}) = \vec{y}$.*

(2) *Αν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}$ είναι τέσσερα διανύσματα του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \qquad \text{και} \qquad \|\vec{z}\| = \|\vec{w}\|$$

*να εξετασθεί αν υπάρχει ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε:*

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \qquad \text{και} \qquad f(\vec{z}) = \vec{w}$$

**Άσκηση 7.** *Έστω $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}$ είναι τέσσερα διανύσματα του $\mathcal{E}$, να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Υπάρχει μια ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \quad \text{και} \quad f(\vec{z}) = \vec{w}$$

(2) *Ισχύουν τα εξής:*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|, \quad \|\vec{z}\| = \|\vec{w}\|, \quad \langle \vec{x}, \vec{z}\rangle = \langle \vec{y}, \vec{w}\rangle \tag{$*$}$$

**Άσκηση 8.** *Έστω $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

*μια ισομετρία. Να δειχθεί ότι αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε:*

$$f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \qquad \Longrightarrow \qquad f(\mathcal{V}^{\perp}) \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$$

*Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;*

**Άσκηση 9.** (1) *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τους υποχώρους του*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\} \\ \mathcal{W} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + w = 0\} \end{aligned}$$

*Να βρεθεί μια ισομετρία $f\colon (\mathcal{V}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}_2[t], \langle,\rangle)$ και μια ισομετρία $g\colon (\mathcal{W}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$.*

(2) *Να εξετασθεί αν υπάρχει ισομετρία $h\colon (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$, για κατάλληλο $n \geq 1$.*

**Άσκηση 10.** *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ένας $m \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Έστω*[1] *$\sigma(A)$ η βαθμίδα γραμμών του $A$ και $\gamma(A)$ η βαθμίδα στηλών του $A$. Να δειχθεί ότι αν $\Lambda(\Sigma)$ είναι ο χώρος λύσεων του ομογενούς συστήματος*

$$(\Sigma) \qquad A \cdot X = O$$

*τότε:*

(1)
$$\Lambda(\Sigma) = \mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)^{\perp}$$
*όπου $\mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από τις γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ του πίνακα $A$.*

(2) $\sigma(A) = \gamma(A)$.

(3) *Υπάρχει μια ισομετρία:*
$$\Lambda(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-\mathbf{r}(A)}$$

**Άσκηση 11.** *Έστω $\in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ ένας $2 \times 2$ ορθογώνιος πίνακας.*

(1) *Αν $|A| = 1$, να δειχθεί ότι ο πίνακας $A$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή αν και μόνον αν*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \acute{\eta} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) *Αν $|A| = -1$, να δειχθεί ότι ο πίνακας $A$ έχει πάντα πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$, και επομένως ο $A$ είναι διαγωνοποιήσιμος και είναι όμοιος με τον πίνακα*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 12.** *Έστω $A$ ένας ορθογώνιος $2 \times 2$ πίνακας πραγματικών αριθμών με ορίζουσα $|A| = -1$. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα στήλες*

$$F_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

*είναι ιδιοδιανύσματα του $A$ τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $1$ και $-1$ αντίστοιχα. Επιπλέον, να δειχθεί ότι θέτοντας*

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

*αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι:*

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 13.** *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

*είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα $(\epsilon)$, ο οποίος και να βρεθεί. Ποιά είναι η γωνία την οποία σχηματίζει ο άξονας με τον άξονα των $x$;*

---

[1] Υπενθυμίζουμε ότι $\sigma(A)$ ορίζεται να είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα $A$ και $\gamma(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα $A$. Ισοδύναμα:

$$\sigma(A) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n) \qquad \text{και} \qquad \gamma(A) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)$$

όπου $\mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n)$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_m$ ο οποίος παράγεται από τις στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ του πίνακα $A$ και $\mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από τις γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ του πίνακα $A$.

Από τη Γραμμική Άλγεβρα Ι γνωρίζουμε ότι $\sigma(A) = \gamma(A)$ και η κοινή αυτή τιμή καλείται βαθμίδα του πίνακα $A$ και συμβολίζεται με $\mathbf{r}(A)$. Στην παρούσα Άσκηση δείχνουμε την ισότητα $\sigma(A) = \gamma(A)$ με έναν διαφορετικό απλούστερο τρόπο.

**Άσκηση 14.** *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

*Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A$ είναι ορθογώνιος, και ακολούθως:*

(1) *Να εξετασθεί αν ο πίνακας $A$ παριστάνει γεωμετρικά περιστροφή (σε αυτή την περίπτωση να βρεθεί η γωνία περιστροφής) ή συμμετρία ως προς άξονα (σε αυτή την περίπτωση να βρεθεί ο άξονας συμμετρίας).*

(2) *Αν ο πίνακας $A$ παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα, να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας $P$ έτσι ώστε:*

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 15.** *«Στροφές Επιπέδου μετατίθενται»*

(1) *Αν $A$ και $B$ είναι δύο ορθογώνιοι $2 \times 2$ πίνακες με ορίζουσα $|A| = 1 = |B|$, να δειχθεί ότι:*

$$A \cdot B = B \cdot A$$

(2) *Αν $f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι δύο ισομετρίες επί ενός Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, έτσι ώστε* $\mathsf{Det}(f) = 1 = \mathsf{Det}(g)$, *να δειχθεί ότι:*

$$f \circ g = g \circ f$$

**Άσκηση 16.** *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

*Να συμπληρωθεί ο πίνακας $A$ έτσι ώστε να είναι ορθογώνιος.*

**Άσκηση 17.** *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\langle \, , \, \rangle' \; : \; \mathbb{R}^3 \; \times \; \mathbb{R}^3 \; \longrightarrow \; \mathbb{R}, \qquad \big\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \big\rangle' = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\langle \, , \, \rangle'$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.*

(2) *Να δείξετε ότι ο ενδομορφισμός*

$$f \;\; : \;\; (\mathbb{R}^3, \langle \, , \, \rangle) \;\longrightarrow\; (\mathbb{R}^3, \langle \, , \, \rangle'), \qquad f(x, y, z) = \left( \frac{x}{2}, \; \frac{y}{\sqrt{2}}, \; \frac{z}{2\sqrt{2}} \right)$$

*είναι μια ισομετρία, όπου $\langle \, , \, \rangle$ είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.*

**Άσκηση 18.** *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα κάθετο σ' αυτό και να προσδιορισθεί ο άξονας και η γωνία στροφής. Με ποιόν πίνακα είναι ορθογώνια όμοιος ο πίνακας $A$;*

**Άσκηση 19.** *Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, θεωρούμε τον ενδομορφισμό*

$$f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \left( \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + az, \;\; \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + bz, \;\; -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + cz \right)$$

(1) *Να υπολογίσουν οι τιμές των πραγματικών αριθμών $a, b$ και $c$ έτσι ώστε ο $f$ να είναι ισομετρία η οποία παριστά στροφή επιπέδου γύρω από άξονα κάθετο σ' αυτό.*

(2) *Αν ο $f$ είναι ισομετρία,*
   (α΄) *να υπολογισθεί η γωνία των διανυσμάτων $f(1,0,0)$ και $f(0,1,0)$.*
   (β΄) *να βρεθεί το επίπεδο και ο άξονας περιστροφής του ερωτήματος (1).*

**Άσκηση 20.** *Θεωρούμε τον $3 \times 3$ πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A$ είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου $(\Pi)$ γύρω από άξονα $(\epsilon)$ κάθετο στο επίπεδο $(\Pi)$ κατά γωνία $\theta$. Να βρεθεί το επίπεδο $(\Pi)$, άξονας περιστροφής $(\epsilon)$ και η γωνία περιστροφής $\theta$.*
(2) *Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας $P$ έτσι ώστε*

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 21.** *Να προσδιορισθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών $a, b, c$ έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

*να είναι ορθογώνιος. Για ποιές τιμές των $a, b, c$, ο πίνακας $A$ γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου $(\Pi)$ γύρω από άξονα $(\epsilon)$ κάθετο στο επίπεδο $(\Pi)$ κατά γωνία $\theta$; Στην περίπτωση αυτή, να βρεθεί η γωνία περιστροφής $\theta$.*

Οι επόμενες ασκήσεις **22** - **27** είναι αφιερωμένες στην περιγραφή των ιδιοτιμών και των κλάσεων ομοιότητας ορθογώνιων $2 \times 2$ και $3 \times 3$ πινάκων.

**Άσκηση 22.** *Έστω $A$ ένας $2\times 2$ ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών. Τότε $|A| = \pm 1$, και οι πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι οι εξής:*
(1) *Αν $|A| = 1$, τότε οι πραγματικές ιδιοτιμές του $A$ είναι:*
   (α΄) *$\lambda_1 = 1$ (διπλή). Αυτό συμβαίνει αν και μονον αν $A = I_2$.*
   (β΄) *$\lambda_1 = -1$ (διπλή). Αυτό συμβαίνει αν και μονον αν $A = -I_2$.*
(2) *Αν $|A| = -1$, τότε οι πραγματικές ιδιοτιμές του $A$ είναι: $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Αυτό συμβαίνει αν και μονον αν*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

*για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$.*

*Σε κάθε άλλη περίπτωση ο πίνακας $A$ είναι της μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \theta \neq 0, \pi$$

*και ο $A$ δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές.*

**Άσκηση 23.** *Κάθε $2 \times 2$ ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών είναι ορθογώνια όμοιος με έναν και μόνον έναν από τους ακόλουθους πίνακες:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{στροφή επιπέδου κατά γωνία ίση με } 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{στροφή επιπέδου κατά γωνία ίση με } \pi)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\textit{συμμετρία ως προς τον άξονα των } x)$$

$$\begin{pmatrix} \mathsf{cos}\theta & -\mathsf{sin}\theta \\ \mathsf{sin}\theta & \mathsf{cos}\theta \end{pmatrix} \quad \textit{όπου} \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad (\textit{στροφή επιπέδου κατά γωνία } \theta \neq 0, \pi)$$

**Άσκηση 24.** *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$, όπου $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = 3$, και υποθέτουμε ότι η ορίζουσα της $f$ είναι ίση με $1$, δηλαδή η ορίζουσα του πίνακα της $f$ σε μια τυχούσα βάση του $\mathcal{E}$ είναι ίση με $1$. Γνωρίζουμε τότε, από το Θεώρημα του Euler, ότι ο αριθμός $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή του $f$. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad f \neq \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

*Αν $f \neq \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, να δειχθεί ότι η $f$ έχει όλες τις ιδιοτιμές της πραγματικές αν και μόνον αν υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ του $\mathcal{E}$, έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3$$

**Άσκηση 25.** *Να δειχθεί ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας $A \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ με ορίζουσα $|A| = 1$ είναι όμοιος με ακριβώς έναν από τους παρακάτω ορθογώνιους πίνακες*

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
*Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $A = I_3$ ή ισοδύναμα η μόνη ιδιοτιμή του $A$ είναι η $\lambda = 1$ με πολλαπλότητα ίση με $3$.*

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
*Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο πίνακας $A$ έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή διαφορετική της $\lambda = 1$.*

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{cos}\theta & -\mathsf{sin}\theta \\ 0 & \mathsf{sin}\theta & \mathsf{cos}\theta \end{pmatrix}$$
*για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, με: $\theta \neq 0, \pi$.*
*Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν η μόνη ιδιοτιμή του $A$ είναι η $\lambda = 1$.*

Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία του Ευκλειδειου χώρου $\mathcal{E}$, όπου $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = 3$, και υποθέτουμε ότι $\mathsf{Det}(f) = 1$, δηλαδή ο $f$ παριστάνει γεωμετρικά στροφή επιπέδου $(\Pi)$ κατά γωνία $\theta$ ως προς άξονα $(\epsilon)$ κάθετο στο επίπεδο. Η ισομετρία $A$ καλείται **γνήσια ισομετρία** αν $\theta \neq 0, \pi$. Ισοδύναμα ισομετρία $f$ με $\mathsf{Det}(f) = 1$, είναι γνήσια, αν $f \neq \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ και η $f$ δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, εκτός της $\lambda = 1$.

Παρόμοια αν $A$ είναι ένας ορθογώνιος $3 \times 3$ πίνακας με ορίζουσα $|A| = 1$, δηλαδή ο $A$ παριστάνει γεωμετρικά στροφή επιπέδου $(\Pi)$ κατά γωνία $\theta$ ως προς άξονα $(\epsilon)$ κάθετο στο επίπεδο. Ο $A$ καλείται **γνήσια ορθογώνιος** αν $\theta \neq 0, \pi$. Ισοδύναμα ο ορθογώνιος πίνακας $A$ με $|A| = 1$, είναι γνήσια ορθογώνιος, αν $A \neq I_3$ και ο $A$ δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, εκτός της $\lambda = 1$.

**Άσκηση 26.** *«Γνήσιες Στροφές Επιπέδου στον χώρο μετατίθενται αν και μόνον αν έχουν κοινό άξονα στροφής»*

(1) *Έστω $A$ και $B$ δύο γνήσια ορθογώνιοι $3 \times 3$ πίνακες.*

*Να δειχθεί ότι $A \cdot B = B \cdot A$ αν και μόνον αν οι $A$ και $B$ έχουν κοινό ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $1$, δηλαδή αν και μόνον αν οι $A$ και $B$ έχουν κοινό άξονας στροφής.*

(2) *Έστω* $f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *δύο γνήσιες ισομετρίες του Ευκλείδειου χώρου* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, *όπου* $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = 3$.

*Να δειχθεί ότι* $f \circ g = g \circ f$ *αν και μόνον αν οι* $f$ *και* $g$ *έχουν κοινό ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* $1$, *δηλαδή αν και μόνον αν οι* $A$ *και* $B$ *έχουν κοινό άξονας στροφής.*

**Άσκηση 27.** *Να δειχθεί ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας* $A \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ *με ορίζουσα* $|A| = -1$ *είναι όμοιος με ακριβώς έναν από τους παρακάτω ορθογώνιους πίνακες*

(1)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
*Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν* $A = -I_3$ *ή ισοδύναμα η μόνη ιδιοτιμή του* $A$ *είναι η* $\lambda = -1$ *με πολλαπλότητα ίση με* $3$.

(2)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
*Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο πίνακας* $A$ *έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή διαφορετική της* $\lambda = -1$.

(3)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{†}$$
*για μια μοναδική γωνία* $\theta \in [0, 2\pi)$, *με:* $\theta \neq 0, \pi$.

*Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν η μόνη πραγματική ιδιοτιμή του* $A$ *είναι η* $\lambda = -1$.