ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 7

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 28 Απριλίου 2023

Άσκηση 1. *Αν $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, τότε:*

$$\text{ο ενδομορφισμός } f \text{ είναι ισομετρία} \quad \iff \quad f^* \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

δηλαδή ο f είναι ισομετρία αν και μόνον αν ο f είναι ισομορφισμός και $f^* = f^{-1}$.

Άσκηση 2. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0, \quad \forall\, \vec{x} \in \mathcal{E} \quad \iff \quad f^* = -f$$

Αν $f^* = -f$, ποιές είναι οι πραγματικές ιδιοτιμές της f;

Ένας ενδομορφισμός $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ καλείται **αντισυμμετρικός** αν και μόνον αν ισχύει ότι: $f^* = -f$.

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι ένας ενδομορφισμός $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του Ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ είναι αντισυμμετρικός αν και μόνον αν ο πίνακας του f σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ είναι αντισυμμετρικός.*

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ο μοναδικός ενδομορφισμός του οποίου ο πίνακας στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Να προσδιορισθεί ο προσαρτημένος ενδομορφισμός $f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ του f.

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ένας ενδομορφισμός για τον οποίο ισχύει ότι:*

$$f(1,0,1) = (1,4,1), \qquad f(1,0,-1) = (-3,0,3), \qquad f(0,1,0) = (2,-1,2)$$

Να προσδιορισθεί ο προσαρτημένος ενδομορφισμός $f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ του f.

Άσκηση 6. *Στον Ευκλείδειο χώρο* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$$

θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \quad f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε αν ο f *είναι:* (α) *ισομετρία, και* (β) *αυτοπροσαρτημένος.*

Η προηγούμενη Άσκηση είναι ειδική περίπτωση της ακόλουθης Άσκησης.

Άσκηση 7. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος* $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$$

θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = {}^tA$$

Τότε ο ενδομορφισμός f *είναι αυτοπροσαρτημένος και ισομετρία.*

Άσκηση 8. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και*

$$f\,,\, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. *Αν* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *να δειχθούν τα εξής:*

(1)
$$\mathsf{0}^* = \mathsf{0} \quad \textit{και} \quad \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}^* = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

(2)
$$(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g*$$

(3)
$$(f^*)^* = f$$

Άσκηση 9. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και*

$$f\,,\, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. *Να δειχθούν τα εξής:*

(1)
$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

(2) *Ο ενδομορφισμός* f *είναι ισομορφισμός αν και μόνον ο ενδομορφισμός* f^* *είναι ισομορφισμός, και τότε:*
$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Άσκηση 10. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι δύο από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες συνεπάγουν την τρίτη συνθήκη:*

(1) *Ο ενδομορφισμός* f *είναι ισομετρία.*
(2) *Ο ενδομορφισμός* f *είναι αυτοπροσαρτημένος.*
(3) $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

Ιδιαίτερα, για έναν πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, *δύο από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες συνεπάγουν την τρίτη συνθήκη:*

(1) *Ο πίνακας* A *είναι ορθογώνιος.*
(2) *Ο πίνακας* A *είναι συμμετρικός.*
(3) $A^2 = I_n$.

Άσκηση 11. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος*

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \big\{ f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f : \text{ ενδομορφισμός του } \mathcal{E} \big\}$$

των ενδομορφισμών του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι ορίζοντας[1]

$$\langle\!\langle \, , \rangle\!\rangle : \; \mathcal{L}(\mathcal{E}) \times \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle = \mathsf{Tr}(f \circ g^*)$$

αποκτούμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ και άρα το ζεύγος $(\mathcal{L}(\mathcal{E}), \langle\!\langle , \rangle\!\rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Επιπλέον να δειχθεί ότι οι Ευκλείδειοι χώροι $(\mathcal{L}(\mathcal{E}), \langle\!\langle , \rangle\!\rangle)$ και $(\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$, όπου $\langle A, B \rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$, είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

Άσκηση 12. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Έστω*

$$\mathcal{U} = \big\{ f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f^* = f \big\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{V} = \big\{ f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f^* = -f \big\}$$

τα υποσύνολα του $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ τα οποία αποτελούνται από τους αυτοπροσαρτημένους και αντισυμμετρικούς ενδομορφισμούς αντίστοιχα.

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.*
(2) *Να δειχθεί ότι*
$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{U} \perp \mathcal{V}$$
(3) *Να δειχθεί ότι $\mathcal{U}^\perp = \mathcal{V}$ και $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{U}$.*

Άσκηση 13. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος*

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \big\{ f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f : \text{ ενδομορφισμός του } \mathcal{E} \big\}$$

των ενδομορφισμών του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός

$$\Phi \colon \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}), \quad \Phi(f) = f^*$$

είναι αυτοπροσαρτημένος και ισομετρία, όπου ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο της Άσκησης 11.

Άσκηση 14. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο*

$$\mathcal{E}^* = \big\{ \phi \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \phi : \text{ γραμμική} \big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*
$$\Phi \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^*, \quad \Phi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, - \rangle, \quad \text{όπου} \quad \langle \vec{x}, - \rangle(\vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$
είναι ισομορφισμός.
(2) *Να ορισθεί επί του $\mathcal{E}^*$ κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο έτσι ώστε ο ισομορφισμός Φ να είναι ισομετρία.*

Άσκηση 15. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας αντισυμμετρικός ενδομορφισμός ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, δηλαδή: $f^* = -f$.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός*
$$\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f : \; \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \big(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f\big)(\vec{x}) = \vec{x} + f(\vec{x})$$
είναι ισομορφισμός.

[1] Το ίχνος $\mathsf{Tr}(h)$ ενός ενδομορφισμού $h \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ορίζεται να είναι το ίχνος $\mathsf{Tr}(A)$ του πίνακα A του h σε μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$. Επειδή, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα Ι, όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος, αν $\mathcal{C}$ είναι μια άλλη βάση του $\mathcal{E}$ και αν B είναι ο πίνακας του h στην $\mathcal{C}$, τότε $\mathsf{Tr}(A) = \mathsf{Tr}(B)$.

(2) *Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός*

$$\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f\big) \circ \big(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f\big)^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι ισομετρία.

Άσκηση 16. *Έστω A ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος.*
(2) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ είναι ορθογώνιος.*

Άσκηση 17 (Μηδενοδύναμος + Συμμετρικός = Μηδενικός). (1) *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός. Να δειχθεί ότι αν $f^m = 0$, τότε $f = 0$.*
(2) *Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας και $A^m = O$, να δειχθεί ότι $A = O$.*

Άσκηση 18. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \ , \ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθούν τα εξής:

(1)
$$\mathsf{Ker}(f^*) = \mathsf{Im}(f)^{\perp}$$
(2)
$$\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Im}(f^*)^{\perp}$$
(3)
$$\mathsf{Im}(f^*) = \mathsf{Ker}(f)^{\perp}$$
(4)
$$\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Ker}(f^*)^{\perp}$$
(5) *Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε:*
$$f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \quad \Longleftrightarrow \quad f^*(\mathcal{V}^{\perp}) \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$$

Άσκηση 19. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \ , \ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθούν τα εξής:

(1)
$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^*)$$
(2)
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^* \circ f) \quad \text{και} \quad \mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Ker}(f \circ f^*)$$
(3)
$$\mathbf{r}(f^* \circ f) = \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^*) = \mathbf{r}(f \circ f^*)$$

Άσκηση 20. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathbf{r}(A \cdot {}^tA) = \mathbf{r}({}^tA \cdot A) = \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}({}^tA)$$

Λύση. *Θεωρούμε τον ενδομορφισμό*

$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

Γνωρίζουμε τότε ότι $f_A^* = f_{{}^tA}$, *και*

$$\mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(A) \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(f_A^*) = \mathbf{r}(f_{{}^tA}) = \mathbf{r}({}^tA)$$

Άρα από την Άσκηση 19, έπεται ότι $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}({}^tA)$. *Έστω* $\mathcal{B}$ *η κανονική βάση του* $\mathbb{R}_n$. *Τότε:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^* \circ f_A) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = {}^tA \cdot A \quad \text{και} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A \circ f_A^*) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*) = A \cdot {}^tA$$

Επειδή $\mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$ *και* $\mathbf{r}(f_A^*) = \mathbf{r}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*)$, *από τις παραπάνω σχέσεις, και την Άσκηση 19, θα έχουμε:*

$$\mathbf{r}(A \cdot {}^tA) = \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}({}^tA) = \mathbf{r}({}^tA \cdot A)$$

Άσκηση 21. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι για κάθε* $k, m \in \mathbb{N}$:

$$(f^* \circ f)^k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (f \circ f^*)^m = 0$$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Ένας ενδομορφισμός $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **κανονικός**, αν:

$$f \circ f^* = f^* \circ f$$

Για παράδειγμα κάθε αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ είναι προφανώς κανονικός.

Άσκηση 22. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας κανονικός ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$.

(1) *Να δειχθεί ότι:* $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\|f^*(\vec{x})\| = \|f(\vec{x})\|$$

(2) *Να δειχθεί ότι αν* $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ *είναι ένα πολυώνυμο, τότε ο πολυωνυμικός ενδομορφσιμός* $P(f)$ *είναι κανονικός.*

(3) *Να δειχθεί ότι:*

$$\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{\vec{0}\}$$

(4) *Αν ο* f *είναι μηδενοδύναμος, δηλαδή* $f^m = 0$, *για κάποιο* $m \in \mathbb{N}$, *τότε:* $f = 0$.

Άσκηση 23. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$.

(1) *Να δειχθεί ότι οι ενδομορφισμοί*

$$f \circ f^*, \ f^* \circ f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι αυτοπροσαρτημένοι.

(2) *Να δειχθεί ότι οι ενδομορφισμοί* $f \circ f^*$ *και* $f^* \circ f$ *είναι μη-αρνητικοί.*

(3) *Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός* $f \circ f^*$ *είναι θετικός αν και μόνον αν ο ενδομορφισμός* f *είναι ισομορφισμός.*

(4) *Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός* $f^* \circ f$ *είναι θετικός αν και μόνον αν ο ενδομορφισμός* f *είναι ισομορφισμός.*

Άσκηση 24. *Για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες P και Q και διαγώνιοι πίνακες Δ και Γ, έτσι ώστε:*

$$^tP \cdot A \cdot {}^tA \cdot P = \Delta \quad \text{και} \quad {}^tQ \cdot {}^tA \cdot A \cdot Q = \Gamma$$

Επιπλέον οι πίνακες $A \cdot {}^tA$ και ${}^tA \cdot A$ είναι μη-αρνητικοί, και:

$$A \cdot {}^tA \, > \, 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |A| \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad {}^tA \cdot A \, > \, 0$$

Άσκηση 25. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f : \, \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Αν ο πίνακας του f σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ είναι αντισυμμετρικός, να δειχθεί ότι ο πίνακας του f σε κάθε ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ είναι αντισυμμετρικός.

Άσκηση 26. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Να δειχθεί ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P και πίνακας B με την ιδιότητα ο πίνακας B^2 να είναι διαγώνιος, έτσι ώστε:*

$$^tP \cdot B \cdot P = A$$

Άσκηση 27.

(1) *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f, \, g : \, \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:

$$f \circ g : \; \text{αυτοπροσαρτημένος} \quad \Longleftrightarrow \quad f \circ g = g \circ f$$

(2) *Έστω A και B δύο συμμετρικοί $n \times n$ πίνακες πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι:*

$$A \cdot B : \; \text{συμμετρικός} \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot B = B \cdot A$$

Άσκηση 28. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(2) *Υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ επί του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε ο f είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$.*

Άσκηση 29. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(2) *Υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ επί του $\mathbb{R}_n$ έτσι ώστε, $\forall X \in \mathbb{R}_n$:*

$$\langle\!\langle \, A \cdot X, \, Y \, \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \, X, \, A \cdot Y \, \rangle\!\rangle$$

Άσκηση 30. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f, \, g : \, \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Υποθέτουμε ότι ο f είναι αυτοπροσαρτημένος ισομορφισμός, ο g είναι αντισυμμετρικός, και ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f$$

(1) *Να δειχθεί ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{y}) \big\rangle = -\big\langle g(\vec{x}), f(\vec{y}) \big\rangle$$

και επομένως, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \big\rangle = 0$$

(2) *Για κάθε* $\vec{x} \in \mathcal{E}$*:*
$$\|(f+g)(\vec{x})\| = \|(f-g)(\vec{x})\|$$
(3) *Οι ενδομορφισμοί* $f+g$ *και* $f-g$ *είναι αντιστρέψιμοι.*
(4) *Ο ενδομορφισμός*
$$(f+g)\circ(f-g)^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
είναι ισομετρία.

Η επόμενη Άσκηση αποτελεί γενίκευση της Άσκησης 16 (η τελευταία προκύπτει θέτοντας $A = I_n$ στην παρακάτω Άσκηση).

Άσκηση 31. *Έστω* $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *και υποθέτουμε ότι:*
$$^tA = A, \quad |A| \neq 0, \quad {}^tB = -B, \quad A\cdot B = B\cdot A$$
(1) *Να δειχθεί ότι,* $\forall X, Y \in \mathbb{R}_n$*:*
$$\big\langle A\cdot X, B\cdot Y\big\rangle = -\big\langle B\cdot X, A\cdot Y\big\rangle$$
και επομένως, $\forall X \in \mathbb{R}_n$*:*
$$\big\langle A\cdot X, B\cdot X\big\rangle = 0$$
(2) *Οι πίνακες* $A+B$ *και* $A-B$ *είναι αντιστρέψιμοι.*
(3) *Για κάθε* $X \in \mathbb{R}_n$*:*
$$\|(A+B)\cdot X\| = \|(A-B)\cdot X\|$$
(4) *Ο πίνακας*
$$(A+B)\cdot(A-B)^{-1}$$
είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 32. *στω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*
$$f,\, g :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$*. Να δειχθεί ότι:*
$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E} :\quad \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle = \langle g(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad f = g$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$, τότε ο f καλείται **ορθογώνια προβολή** αν υπάρχει ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$, έτσι ώστε $f(\vec{v}) = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ και $f(\vec{u}) = \vec{0}$, $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}^\perp$. Τότε ο f καλείται ορθογώνια προβολή στον $\mathcal{V}$ παράλληλα με τον $\mathcal{V}^\perp$.

Άσκηση 33. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*
$$f :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$*. Αν ο* f *είναι μια προβολή, δηλαδή* $f^2 = f$*, να δειχθεί ότι ο* f *είναι αυτοπροσαρτημένος αν και μόνον αν ο* f *είναι ορθογώνια προβολή.*

Άσκηση 34. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

Έστω
$$\mathsf{AE}^{>0}(\mathcal{E}) = \big\{ f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f :\ \text{θετικός αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του } \mathcal{E} \big\}$$
$$\mathsf{IP}(\mathcal{E}) = \big\{ \langle\!\langle\, ,\rangle\!\rangle\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \langle\!\langle\, ,\rangle\!\rangle :\ \text{εσωτερικό γινόμενο επί του } \mathcal{E} \big\}$$
Να δειχθεί ότι η απεικόνιση:
$$\Phi :\ \mathsf{AE}^{>0}(\mathcal{E}) \ \longrightarrow\ \mathsf{IP}(\mathcal{E}), \quad \Phi(f) = \langle\!\langle\, ,\rangle\!\rangle_f :\ \mathcal{E}\times\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{y}\,\rangle\!\rangle_f = \langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle$$
είναι «1-1» και «επί».

Άσκηση 35. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\, , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης* n *και έστω* $\mathcal{B}$ *μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{E}$. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$\mathsf{S}_n^{>0}(\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A > 0 \right\}$$

των θετικών συμμετρικών $n \times n$ *πινάκων.*

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$G : \mathsf{IP}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{S}_n^{>0}(\mathbb{R}), \quad G(\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle) = \big(\langle\!\langle\, \vec{e}_i, \vec{e}_j \,\rangle\!\rangle \big) = \text{ ο πίνακας Gram των διανυσμάτων της βάσης } \mathcal{B}$$

είναι «1-1» και «επί».