

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 5 Μαΐου 2023

**Άσκηση 1.** Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & b \end{pmatrix}$$

- (1) Να προσδιορισθούν οι αριθμοί  $a, b$ , έτσι ώστε ο πίνακας  $A$  να έχει ως ιδιοτιμή το 0 με πολλαπλότητα 2.
- (2) Για τις τιμές των  $a, b$  που θα βρείτε, να υπολογίσετε ορθογώνιο πίνακα  $P$  έτσι ώστε ο πίνακας  ${}^t P \cdot A \cdot P$  να είναι διαγώνιος.
- (3) Να υπολογίσετε τον πίνακα  $A^m$ ,  $\forall m \geq 1$ .

**Άσκηση 2.** Να προσδιορισθεί ο αριθμός  $a$  έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 4 & -4 \\ -a & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

να είναι μη-αρνητικός. Ακολουθώντας να βρεθούν οι τιμές του  $a$  για τις οποίες ο πίνακας  $A$  είναι μη-αρνητικός και έχει μια ιδιοτιμή με πολλαπλότητα ίση με 2, και για τις τιμές αυτές να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας  $P$  έτσι ώστε  ${}^t P \cdot A \cdot P$  να είναι διαγώνιος.

**Άσκηση 3.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί πίνακας  $B \in M_3(\mathbb{R})$ , έτσι ώστε:

$$B^3 = A$$

**Άσκηση 4.** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  συμμετρικός πίνακας πραγματικών αριθμών. Αν οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι οι αριθμοί 1 και  $-1$ , να δειχθεί ότι:

$$A^2 = I_n$$

Ισχύει το αντίστροφο; Πότε ο πίνακας  $A$  είναι θετικός;

**Άσκηση 5.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Να δείξετε ότι ο πίνακας  $A$  είναι μη-αρνητικός.  
 (2) Να βρείτε μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ .

**Άσκηση 6.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) Να δείξετε ότι ο πίνακας  $A$  είναι θετικός.  
 (2) Να βρείτε συμμετρικό και αντιστρέψιμο πίνακα  $B$  έτσι ώστε:  $A = B^2$ .

**Άσκηση 7.** Έστω  $A$  ένας  $4 \times 4$  συμμετρικός πίνακας πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι:

- (1) Ο αριθμός 1 είναι ιδιοτιμή του  $A$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (2) Ο αριθμός 2 είναι ιδιοτιμή του  $A$ , και  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3$ .

Να βρεθεί ο πίνακας  $A$ .

**Άσκηση 8.** Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 + 5z^2 - xy - 2xz + 2yz$$

στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

**Άσκηση 9.** Να προσδιορισθεί το είδος των καμπύλων οι οποίες ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$(C_1) : \quad xy = 1$$

$$(C_2) : \quad 5x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$$

**Άσκηση 10.** Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = 13x^2 + 24y^2 + 29z^2 + 28xy + 8xz + 36yz$$

- (1) Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή  $q$  στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.  
 (2) Να βρεθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = 1\}$$

- (3) Να δειχθεί ότι ο πίνακας  $A$  της τετραγωνική μορφής  $q$  είναι θετικός και να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ .

**Άσκηση 11.** Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:

$$(\mathcal{S}) : \quad 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 12z + 16 = 0$$

**Άσκηση 12.** Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy$$

- (1) Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή  $q$  στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

(2) Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:

$$(S) : 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy = 8$$

(3) Να δείξετε ότι ο πίνακας  $A$  της τετραγωνικής μορφής  $q$  είναι θετικός και στη συνέχεια να βρεθεί συμμετρικός και αντιστρέψιμος πίνακας  $B$  έτσι ώστε:  $B^2 = A$ .

**Άσκηση 13.** Έστω  $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$  ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω

$$f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του  $\mathcal{E}$ . Να δείχθει ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1)

$$f \circ g = g \circ f$$

(2) Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση  $\mathcal{B}$  του  $\mathcal{E}$  η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του  $f$  και του  $g$ .

**Άσκηση 14.** Έστω  $A$  και  $B$  δύο συμμετρικοί  $n \times n$  πίνακες πραγματικών αριθμών. Να δείχθει ότι:

$A \cdot B = B \cdot A \iff$  υπάρχει ορθογώνιος πίνακας  $P$  έτσι ώστε:  ${}^t P \cdot A \cdot P = \Delta$  και  ${}^t P \cdot B \cdot P = \Gamma$  όπου οι πίνακες  $\Delta$  και  $\Gamma$  είναι διαγώνιοι.

**Άσκηση 15** (Πολική Ανάλυση Ενδομορφισμού). Έστω  $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$  ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω

$$f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του  $\mathcal{E}$ . Να δείχθει ότι υπάρχει μια ισομετρία  $h: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  του  $\mathcal{E}$  και ένας μη-αρνητικός (αυτοπροσαρτημένος) ενδομορφισμός  $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  του  $\mathcal{E}$  έτσι ώστε:

$$f = h \circ g, \quad \text{δηλαδή} \quad h^* \circ h = \text{Id}_{\mathcal{E}} \quad \text{και} \quad g^* = g \geq 0$$

Επιπλέον ο  $f$  είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν ο  $g$  είναι θετικός:  $\text{Det}(f) \neq 0 \iff g > 0$ .

**Άσκηση 16.** Για κάθε πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , υπάρχει ορθογώνιος πίνακας  $P$  και μη-αρνητικός συμμετρικός πίνακας  $U$  έτσι ώστε:

$$A = P \cdot U$$

Επιπλέον ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο πίνακας  $U$  είναι συμμετρικός και θετικός.

**Άσκηση 17** (Νόμος Αδρανείας του Sylvester). Έστω  $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$  ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = n$ , και

$$q: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$$

μια τετραγωνική μορφή επί του  $\mathcal{E}$ . Να δείχθει ότι υπάρχει βάση  $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  του  $\mathcal{E}$  έτσι ώστε

$$q(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2$$

και οι θετικοί ακέραιοι  $s$  και  $r$ , άρα και το ζεύγος  $(s, r)$ , εξαρτώνται μόνο από την τετραγωνική μορφή  $q$ .

Το ζεύγος θετικών ακεραίων το ζεύγος  $(s, r)$  στην παράπανω Άσκηση καλείται ο **δείκτης** της τετραγωνικής μορφής  $q$ . Με άλλα λόγια, ο δείκτης  $(s, r)$  της τετραγωνικής μορφής  $q$  είναι το ζεύγος

$$(s, r) = (\text{πλήθος θετικών ιδιοτιμών της } q, \text{ βαθμίδα της } q)$$

**Άσκηση 18.** Να βρεθεί ο δείκτης της τετραγωνικής μορφής

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = xy + xz + yz$$