ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Ασκησεισ - Φυλλαδιο 9

Επαναληπτικεσ Ασκησεισ

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 19 Μαΐου 2023

Άσκηση 1. *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, όπου $\mathcal{E} \neq \{\vec{0}\}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος. Υποθέτουμε ότι κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε*

$$f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

Άσκηση 2. *Έστω A ένας $n \times n$-πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των στοιχείων καθεμιάς γραμμής του είναι ίσο με 1.*

(1) *Να δειχθεό ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του A.*
(2) *Αν κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα στήλη του χώρου $\mathbb{K}_n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A, να δειχθεί ότι ο A είναι ο μοναδιαίος πίνακας: $A = I_n$.*

Άσκηση 3. *Ένας πίνακας $B = (b_{ij}) \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ καλείται δίκαιος αν:*

(**a**) $b_{ij} > 0,\ \forall i, j = 1, 2, \cdots, n.$
(**b**) $b_{ij}b_{jk} = b_{ik},\ \forall i, j, k = 1, 2, \cdots, n.$

Για τους δίκαιους πίνακες να δειχθούν τα εξής:

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

είναι δίκαιος.
(2) *Να δειχθεί ότι αν B είναι ένας δίκαιος πίνακας, τότε: $B^2 = nB$.*
(3) *Να δειχθεί ότι κάθε δίκαιος πίνακας είναι όμοιος με τον A.*
(4) *Να δειχθεί ότι κάθε δίκαιος πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και να προσδιορισθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας*

$$P^{-1} \cdot B \cdot P$$

να είναι διαγώνιος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;

Άσκηση 4. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\, ,\, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|\vec{x}\| \ \leq\ \|\vec{x} + \lambda\vec{y}\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 5. *Έστω* $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$, *και* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *πραγματικοί αριθμοί. Αν* $c_1, c_2, \cdots, c_n > 0$, *να δειχθεί ότι:*

$$|\sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i| \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i b_i^2}$$

Άσκηση 6. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος. Να δειχθεί η ισότητα του Απολλώνιου:*

$$\|\vec{z} - \vec{x}\|^2 + \|\vec{z} - \vec{y}\|^2 = \frac{1}{2}\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + 2\|\vec{z} - \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})\|^2$$

$\forall \vec{z}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$.

Άσκηση 7. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle \ , \ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος. Να δείξετε ότι για κάθε γραμμική απεικόνιση* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, *υπάρχουν ενδομορφισμοί* $g, h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$f = g + h, \quad \textit{όπου:} \quad g^* = g \qquad \textit{και} \qquad h^* = -h$$

Επιπλέον αν $g', h' : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ενδομορφισμοί, έτσι ώστε* $f = g' + h'$, *όπου:* $(g')^* = g'$ *και* $(h')^* = -h'$, *τότε* $g = g'$ *και* $h = h'$.

Άσκηση 8. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle \ , \ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος και* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι αν η* f *ικανοποιεί δύο από τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:*

(1) *ο* f *είναι αυτοπροσαρτημένος.*
(2) *ο* f *είναι ισομετρία.*
(3) $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

τότε ικανοποιεί και την τρίτη. Τι μορφή έχει ο ενδομορφισμός f *αν ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες;*

Άσκηση 9. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle \ , \ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος. Αν* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ένας ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$, *για τον οποίο ισχύει ότι:*

$$f \circ f^* = f^* \circ f$$

να δειχθεί ότι:

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^*) \qquad \textit{και} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^*)$$
$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \qquad \textit{και} \qquad \mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$$

Άσκηση 10. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *ένας συμμετρικός πίνακας. Αν* $A^2 = A$, *να δειχθεί ότι:*

(1) *Οι ιδιοτιμές του* A *είναι* 0 *ή* 1.
(2) *Η βαθμίδα* $\mathbf{r}(A)$ *του* A *είναι ίση με το ίχνος* $\mathsf{Tr}(A)$ *του* A.
(3) *Πότε ο* A *είναι θετικός;*

Άσκηση 11. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *ένας συμμετρικός πίνακας. Αν* $A^3 = A^2$, *να δειχθεί ότι:*

$$A^2 = A$$

Άσκηση 12. *Έστω ο πίνακας πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ *και* $n\mathbb{N}$.

(1) *Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας* P *έτσι ώστε ο πίνακας* ${}^tP \cdot A \cdot P$ *να είναι διαγώνιος.*

(2) *Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας A είναι θετικός, και για τις τιμές αυτές του a να βρεθεί μια n-οστή ρίζα του πίνακα A.*
(3) *Να βρεθεί η n-οστή δύναμη του A.*

Άσκηση 13. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω*

$$f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f^* = \lambda f$$

Να δειχθεί ότι είτε ο f είναι αυτοπροσαρτημένος ($f^* = f$) είτε ο f είναι αντισυμμετρικός ($f^* = -f$).

Άσκηση 14. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένη διάστασης και έστω*

$$f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, έτσι ώστε: $f^* = \lambda f$, όπου $\lambda \neq 0$.

(1) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \quad \text{και} \quad \mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$$

(2)

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \quad \text{και} \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$$

(3) *Αν $\lambda = -1$, να δειχθεί ότι η βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ του f είναι άρτιος αριθμός:*

$$\mathbf{r}(f): \ \text{άρτιος}$$

(4) *Να δειχθεί ότι η βαθμίδα κάθε αντισυμμετρικού πίνακα πραγματικών αριθμών είναι άρτιος αριθμός.*

Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ είναι ένας πίνακας μιγαδικών αριθμών, τότε ορίζουμε τον πίνακα:

$$A^* := \overline{{}^t A}$$

δηλαδή αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \text{τότε} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A^* καλείται ο **συζυγής ανάστροφος** του A. Παρατηρούμε ότι: $A^* = \overline{{}^t A} = {}^t\overline{A}$.

Η παρακάτω άσκηση περιγράφει τις κυριότερες ιδιότητες του ανάστροφου συζυγή ενός πίνακα μιγαδικών αριθμών.

Άσκηση 15. $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$, *τότε:*

(1) $(A^*)^* = A$.
(2) $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.
(3) $(\mu \cdot A)^* = \overline{\mu} \cdot A^*$.
(4) *Αν $Z \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, τότε $Z^* \cdot Z \in \mathbb{R}$ και $Z^* \cdot Z = 0$ αν και μόνον αν $Z = \mathbb{O}$.*
(5) *Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$, τότε $A^* = {}^t A$.*

Άσκηση 16. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας, δηλαδή: ${}^t A = -A$.*

(1) *Να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές του A (στο $\mathbb{C}$) είναι της μορφής: $\lambda i, \ \lambda \in \mathbb{R}$.*
(2) *Να δείξετε ότι οι πίνακες $I_n + A$ και $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμοι.*
(3) *Να δείξετε ότι ο πίνακας $(A + I_n) \cdot (A - I_n)^{-1}$ είναι ορθογώνιος.*