

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 24 Φεβρουαρίου 2023

Υπευθυνότητες από τη Θεωρία Πολυωνύμων

Υπευθυμίζουμε, χάριν ευκολίας, κάποια βασικά στοιχεία από τη θεωρία πολυωνύμων τα οποία θα είναι χρήσιμα στη συνέχεια του μαθήματος.

Υπευθυμίζουμε ότι αν: (α) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ ή (β) \mathbb{K} είναι ένα σώμα, π.χ. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \dots, \mathbb{Z}_p$ (p : πρώτος), τότε \mathbb{K} συμβολίζει το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το \mathbb{K} :

$$\mathbb{K}[t] = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \mid a_k \in \mathbb{K}, 0 \leq k \leq n\}$$

Αν $a_k = 0, 0 \leq k \leq n$, τότε το $P(t)$ καλείται το μηδενικό πολυώνυμο και συμβολίζεται με 0.

Έστω

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$$

και υποθέτουμε ότι $P(t) \neq 0$. Ο βαθμός του $P(t)$ ορίζεται να είναι ο μη-αρνητικός ακέραιος

$$\deg P(t) = \max \{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \neq 0\}$$

Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζουμε βαθμό. Συνήθως, όταν γράφουμε ένα πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$, θα υπονοούμε ότι $a_n \neq 0$ και ο βαθμός του θα είναι $\deg P(t) = n$.

Αν

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \quad \text{και} \quad Q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_mt^m$$

δύο πολυώνυμα, με βαθμούς αντίστοιχα $\deg P(t) = n$ και $\deg Q(t) = m$, τότε έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας $m \leq n$. Τα πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ καλούνται ίσα, και τότε θα γράφουμε $P(t) = Q(t)$, αν $a_k = b_k, 0 \leq k \leq m$ και $a_{m+1} = \dots = a_n = 0$.

Ένα πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$, βαθμού $\deg P(t) = n$, μπορεί να γραφεί και ως

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n + a_{n+1}t^{n+1} + \dots + a_mt^m + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad \text{όπου } a_k = 0, \forall k > n$$

Το άθροισμα των πολυωνύμων

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad \text{και} \quad Q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_mt^m = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

ορίζεται να είναι το πολυώνυμο

$$P(t) + Q(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots + c_rt^r + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad \text{όπου } c_k = a_k + b_k, \forall k \geq 0$$

Το γινόμενο των πολυωνύμων

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad \text{και} \quad Q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_mt^m = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

ορίζεται να είναι το πολυώνυμο

$$P(t)Q(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots + c_r t^r + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \text{ όπου } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0, \forall k \geq 0$$

Για το βαθμό πολυωνύμων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(1) Αν $P(t) \neq 0 \neq Q(t)$, τότε:

$$\deg(P(t) + Q(t)) \leq \max\{\deg P(t), \deg Q(t)\}$$

(2) Αν $P(t) \neq 0 \neq Q(t)$, τότε $P(t)Q(t) \neq 0$ και ισχύει ότι:

$$\deg(P(t)Q(t)) = \deg P(t) + \deg Q(t)$$

Αν $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, τότε θα λέμε ότι το πολυώνυμο $P(t)$ διαιρεί το πολυώνυμο $Q(t)$, και θα γράφουμε $P(t) \mid Q(t)$, αν υπάρχει πολυώνυμο $A(t) \in \mathbb{K}[t]$ έτσι ώστε $Q(t) = A(t)P(t)$:

$$P(t) \mid Q(t) \iff \exists A(t) \in \mathbb{K}[t] : Q(t) = A(t)P(t)$$

Για τη διαιρετότητα πολυωνύμων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(1) $P(t) \mid 0$ και $P(t) \mid P(t)$.

(2) Αν $P(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \mid R(t)$, τότε $P(t) \mid R(t)$.

(3) Αν $P(t) \mid A(t)$ και $P(t) \mid B(t)$, τότε $P(t) \mid A(t) + B(t)$.

(4) Αν $P(t) \mid A(t)$ και $Q(t) \mid B(t)$, τότε $P(t)Q(t) \mid A(t)B(t)$.

(5) Αν $P(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \neq 0$, τότε: $\deg P(t) \leq \deg Q(t)$.

(6) Αν $P(t) \neq 0 \neq Q(t)$ και $P(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \mid P(t)$, τότε υπάρχει $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $P(t) = \lambda Q(t)$.

Ένα πολυώνυμο

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_n t^n$$

καλείται κανονικό αν: $a_n = 1$, δηλαδή ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του t είναι η μονάδα. Κάθε μη-μηδενικό πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_n t^n$ ορίζει το αντίστοιχο κανονικό πολυώνυμο

$$P_*(t) = t^n + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) t^{n-1} + \dots + \left(\frac{a_1}{a_n}\right) t + \frac{a_0}{a_n}$$

και ισχύει ότι: $P(t) = a_n P_*(t)$.

(7) Δύο κανονικά πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ είναι ίσα αν και μόνον αν $P(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \mid P(t)$.

• **ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ:** Αν $A(t)$ και $B(t)$ είναι δύο πολυώνυμα και $B(t) \neq 0$, τότε υπάρχει μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $Q(t)$ και $R(t)$ έτσι ώστε:

$$A(t) = B(t)Q(t) + R(t), \text{ όπου: είτε } R(t) = 0 \text{ είτε } \deg R(t) < \deg B(t)$$

Το πολυώνυμο $Q(t)$ καλείται *πηλίκο* και το πολυώνυμο $R(t)$ καλείται *υπόλοιπο* της διαίρεσης του $A(t)$ με το $B(t)$.

Ένα στοιχείο $\rho \in \mathbb{K}$ καλείται ρίζα του πολυωνύμου $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_n t^n$, αν:

$$P(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots + a_n\rho^n = 0$$

Γενικότερα, ο αριθμός $\rho \in \mathbb{K}$ είναι **ρίζα πολλαπλότητας** $k \in \mathbb{N}$ του πολυωνύμου $(P(t))$, αν:

$$(t - \rho)^k \mid P(t) \quad \& \quad (t - \rho)^{k+1} \nmid P(t)$$

δηλαδή αν: $P(t) = (t - \rho)^k Q(t)$ και $Q(\rho) \neq 0$.

Για τις ρίζες πολυωνύμων ισχύουν οι εξής βασικές ιδιότητες:

(8) Το στοιχείο $\rho \in \mathbb{K}$ είναι ρίζα του $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ αν και μόνον αν $(t - \rho) \mid P(t)$.

(9) Αν $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{K}$ και $\rho_1 \neq \rho_2$, τότε τα στοιχεία ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες του $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ αν και μόνον αν $(t - \rho_1)(t - \rho_2) \mid P(t)$.

(10) Ένα πολυώνυμο $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ βαθμού n έχει το πολύ n το πλήθος ρίζες στο \mathbb{K} .

- (11) Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός ο οποίος είναι ρίζα ενός πολυωνύμου $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, τότε και ο συζυγής του \bar{z} είναι ρίζα του $P(t)$.
- (12) Ένας πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα πολλαπλότητας k του πολυωνύμου $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ αν και μόνον αν

$$P(\rho) = P'(\rho) = P''(\rho) = \dots = P^{(k-1)}(\rho) = 0 \quad \& \quad P^{(k)}(\rho) \neq 0$$

όπου $P^{(r)}(t)$ συμβολίζει την παράγωγο k -τάξης του πολυωνύμου $P(t)$.

- **ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ:** Αν $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ είναι ένα πολυώνυμο με βαθμό $n > 0$, τότε το $P(t)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο \mathbb{C} .

Επομένως κάθε πολυώνυμο $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ βαθμού $n > 0$, γράφεται ως:

$$P(t) = a(t - \rho_1)^{\kappa_1}(t - \rho_2)^{\kappa_2} \dots (t - \rho_r)^{\kappa_r}$$

όπου: $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $\kappa_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$, και $\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_r = \deg P(t)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα μη-σταθερό πολυώνυμο $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ με συντελεστές από το \mathbb{K} , καλείται **ανάγωγο** στο $\mathbb{K}[t]$, ή υπεράνω του \mathbb{K} , αν δεν υπάρχουν μη-σταθερά πολυώνυμα $g(t), h(t) \in \mathbb{K}[t]$ μικρότερου βαθμού με $f(t) = g(t)h(t)$.

- **ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ:** Κάθε μη-μηδενικό πολυώνυμο $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ενός σταθερού μη-μηδενικού πολυωνύμου και πεπερασμένου πλήθους ανάγωγων πολυωνύμων.

Επομένως κάθε μη-μηδενικό πολυώνυμο $P(t) \in \mathbb{K}[t]$, γράφεται μοναδικά¹ ως:

$$P(t) = aP_1(t)^{\kappa_1}P_2(t)^{\kappa_2} \dots P_r(t)^{\kappa_r}$$

όπου: $0 \neq a \in \mathbb{K}$, $\kappa_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$, τα $P_i(t)$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{K}[t]$.

Κάθε πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \in \mathbb{K}[t]$ ορίζει μια συνάρτηση

$$P: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad P(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots + a_nr^n$$

η οποία καλείται πολυωνυμική συνάρτηση την οποία ορίζει το $P(t)$. Υπάρχουν όμως διαφορετικά πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ ορισμένα επί κατάλληλου σώματος, τα οποία ορίζουν την ίδια πολυωνυμική συνάρτηση. Υπενθυμίζουμε ότι δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις $P, Q: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ οι οποίες ορίζονται από δύο πολυώνυμα $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \in \mathbb{K}[t]$ και $Q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_mt^m \in \mathbb{K}[t]$, είναι ίσες αν και μόνον αν $P(r) = Q(r)$, $\forall r \in \mathbb{K}$. Όπως έχουμε δει, τα πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ είναι ίσα αν και μόνον αν $a_i = b_i$, $\forall i \geq 0$. Για παράδειγμα θεωρούμε το σώμα $\mathbb{Z}_2 = \{[0]_2, [1]_2\}$ και έστω $P(t) = t^2 - t \in \mathbb{Z}_2[t]$ και $Q(t) = O(t)$ το μηδενικό πολυώνυμο. Προφανώς $P(t) \neq O(t)$, αλλά οι πολυωνυμικές συναρτήσεις P και Q τις οποίες ορίζουν τα πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ είναι ίσες, διότι: $P([0]_2) = P([1]_2) = [0]_2 = O([0]_2) = O([1]_2)$, και άρα $P = O$. Αυτό το πρόβλημα δεν υφίσταται όταν το σώμα \mathbb{K} έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, και επομένως σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ταυτίζουμε πολυώνυμα με τις πολυωνυμικές συναρτήσεις τις οποίες αυτά ορίζουν:

- (13) Αν το σώμα \mathbb{K} έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, για παράδειγμα αν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, τότε δύο πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ ορίζουν την ίδια πολυωνυμική συνάρτηση αν και μόνον αν είναι ίσα: $P(t) = Q(t)$.

¹αν εξαιρέσουμε τη σειρά αναγραφής και τον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων με μη-μηδενικά στοιχεία του \mathbb{K} με γινόμενο 1.

Άσκηση 1. Να βρεθεί το ηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο $\mathbb{R}[t]$ του πολυωνύμου $A(t) = t^6 - 7t^5 + 16t^4 - 10t^3 - 14t^2 + 33t - 23$ με το πολυώνυμο $B(t) = t^3 - 7t^2 + 16t - 12$.

Λύση. Θα έχουμε τα ακόλουθα βήματα:

- (1) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το t^3 και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_1(t) = 2t^3 - 14t^2 + 33t - 23$.
- (2) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το 2 και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A_1(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_2(t) = t + 1$.
- (3) Επειδή $\deg A_2(t) = 1 < 3 = \deg B(t)$, έπεται ότι θα έχουμε: $Q(t) = t^3 + 2$ και $R(t) = t + 1$:

$$t^6 - 7t^5 + 16t^4 - 10t^3 - 14t^2 + 33t - 23 = (t^3 - 7t^2 + 16t - 12)(t^3 + 2) + (t + 1)$$

δηλαδή το ηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο $t^3 + 2$ και το υπόλοιπο το πολυώνυμο $t + 1$.

Σχηματικά:

$$\begin{array}{r|l} t^6 - 7t^5 + 16t^4 - 10t^3 - 14t^2 + 33t - 23 & t^3 - 7t^2 + 16t - 12 \\ -t^6 + 7t^5 - 16t^4 + 12t^3 & \hline 2t^3 - 14t^2 + 33t - 23 & \\ -2t^3 + 14t^2 - 32t + 24 & \\ \hline t + 1 & \end{array}$$

□

Άσκηση 2. Να βρεθεί το ηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο $\mathbb{R}[t]$ του πολυωνύμου $A(t) = 3t^5 + 4t^2 + 1$ με το πολυώνυμο $B(t) = t^2 + 2t + 3$.

Λύση. Θα έχουμε τα ακόλουθα βήματα:

- (1) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το $3t^3$ και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_1(t) = -6t^4 - 9t^3 + 4t^2 + 1$.
- (2) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το $-6t^2$ και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A_1(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_2(t) = 3t^3 + 22t^2 + 1$.
- (3) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το $3t$ και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A_2(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_3(t) = 16t^2 - 9t + 1$.
- (4) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το 16 και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A_3(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_4(t) = -41t - 47$.
- (5) Επειδή $\deg A_4(t) = 1 < 2 = \deg B(t)$, έπεται ότι θα έχουμε: $Q(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t + 16$ και $R(t) = -41t - 47$:

$$3t^5 + 4t^2 + 1 = (t^2 + 2t + 3)(3t^3 - 6t^2 + 3t + 16) + (-41t - 47)$$

δηλαδή το ηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο $3t^3 - 6t^2 + 3t + 16$ και το υπόλοιπο το πολυώνυμο $-41t - 47$.

Σχηματικά:

$$\begin{array}{r|l} 3t^5 + 4t^2 + 1 & t^2 + 2t + 3 \\ -3t^5 - 6t^4 - 9t^3 & \hline -6t^4 - 9t^3 + 4t^2 + 1 & \\ 6t^4 + 12t^3 + 18t^2 & \\ \hline 3t^3 + 22t^2 + 1 & \\ -3t^3 - 6t^2 - 9t & \\ \hline 16t^2 - 9t + 1 & \\ -16t^2 - 32t - 48 & \\ \hline -41t - 47 & \end{array}$$

□

Άσκηση 3. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές

$$P(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n, \quad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i \leq n \quad \text{και} \quad a_n \neq 0$$

Αν $\frac{r}{s}$ είναι μια ρητή ρίζα του $P(t)$, όπου $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$ και $(r, s) = 1$, τότε:

$$r \mid a_0 \quad \& \quad s \mid a_n$$

Ακολουθώντας να εξετασθεί αν το πολυώνυμο

$$P(t) = t^3 + 8t^2 - t + 9$$

είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[t]$.

Λύση. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{r}{s}\right) = 0 &\implies a_0 + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^2 + \dots + a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n = 0 \implies \\ &\implies a_0s^n + a_1rs^{n-1} + a_2r^2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}r^{n-1}s + a_nr^n = 0 \implies \\ &\implies \begin{cases} a_0s^n + a_1rs^{n-1} + a_2r^2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}r^{n-1}s = -a_nr^n \\ a_1rs^{n-1} + a_2r^2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}r^{n-1}s + a_nr^n = -a_0s^n \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} s(a_0s^{n-1} + a_1rs^{n-2} + a_2r^2s^{n-3} + \dots + a_{n-1}r^{n-1}) = -a_nr^n \\ r(a_1s^{n-2} + a_2rs^{n-3} + \dots + a_{n-1}r^{n-2}s) = -a_0s^n \end{cases} \end{aligned}$$

Οι παραπάνω ισότητες είναι ισότητες μεταξύ ακεραίων αριθμών. Επομένως χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Ευκλείδη² από την Θεωρία Αριθμών, έπεται ότι:

$$\implies \begin{cases} s \mid a_nr^n \\ r \mid a_0s^n \end{cases} \xrightarrow{(r,s)=1} \begin{cases} s \mid a_n \\ r \mid a_0 \end{cases}$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές $P(t) = t^3 + 8t^2 - t + 9$. Αν το $P(t)$ δεν ήταν ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[t]$, τότε θα υπήρχαν πολυώνυμα $Q(t)$ και $R(t)$ με ρητούς συντελεστές έτσι ώστε: $P(t) = Q(t)R(t)$, και προφανώς ένα εκ των $Q(t)$ και $R(t)$, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας το $Q(t)$, είναι πρωτοβάθμιο και κανονικό. Άρα $Q(t) = t - \rho$, όπου $\rho = \frac{r}{s}$, όπου $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$ και προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(r, s) = 1$. Από την παραπάνω ανάλυση, έπεται ότι $r \mid 9$ και $s \mid 1$, δηλαδή $s = \pm 1$ και $r = \pm 1, \pm 3, \pm 9$. Επομένως η ρητή ρίζα ρ του $P(t)$ είναι αναγκαστικά ένας εκ των ακεραίων: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Επειδή:

$$\begin{cases} P(1) = 17 \neq 0 \\ P(-1) = 17 \neq 0 \\ P(3) = 105 \neq 0 \\ P(-3) = 57 \neq 0 \\ P(9) = 1477 \neq 0 \\ P(-9) = 99 \neq 0 \end{cases}$$

καταλήγουμε στην αντίφαση ότι $P(\rho) \neq 0$. Άρα το πολυώνυμο $P(t)$ δεν έχει πρωτοβάθμιο παράγοντα και επομένως το $P(t)$ είναι ανάγωγο. \square

Άσκηση 4. Να δειχθεί το ακόλουθο ΚΡΙΤΗΡΙΟ EISENSTEIN: Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές

$$f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n, \quad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i \leq n \quad \text{και} \quad a_n \neq 0$$

και έστω p ένας πρώτος αριθμός. Τότε:

$$p \mid a_0, p \mid a_1, \dots, p \mid a_{n-1} \quad \& \quad p \nmid a_n \quad \& \quad p^2 \nmid a_0 \implies f(t): \text{ανάγωγο}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $g_1(t) = t^4 - 6t^3 + 24t^2 - 30t + 14$, $g_2(t) = t^7 + 48t - 24$, $g_3(t) = t^5 + 5t + 5$, και $g_4(t) = t^n - p$, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός και $n > 1$, είναι ανάγωγα υπεράνω του \mathbb{Q} . Είναι το πολυώνυμο $t^4 + 4$ και ανάγωγο υπεράνω του \mathbb{Q} ;

²Αν r, a, s είναι ακέραιοι αριθμοί και ισχύει ότι $(r, s) = 1$, τότε: $r \mid as \implies r \mid a$.

Λύση. Έστω ότι το πολυώνυμο $f(t)$ δεν είναι ανάγωγο. Ύρα $f(t) = g(t)h(t)$ όπου $g(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_st^s \in \mathbb{Z}[t]$, $h(t) = c_0 + c_1t + \dots + c_rt^r \in \mathbb{Z}[t]$ και $s \geq 1$, $r \geq 1$. Τότε

$$a_0 = b_0c_0, \quad a_1 = b_0c_1 + b_1c_0, \dots, \quad a_i = b_0c_i + b_1c_{i-1} + \dots + b_ic_0$$

όπου $0 \leq i \leq n$. Αφού $p \mid a_0$ και $a_0 = b_0c_0$ έπεται ότι $p \mid b_0$ ή $p \mid c_0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $p \mid b_0$. Τότε $p \nmid c_0$, διότι αν $p \mid c_0$, θα είχαμε ότι $p^2 \mid b_0c_0 = a_0$ το οποίο είναι άτοπο. Αν $p \mid b_s$ τότε

$$p \mid b_sc_r \implies p \mid a_n$$

που είναι άτοπο. Ύρα $p \nmid b_s$. Επομένως υπάρχει ένα $i \leq s$ έτσι ώστε $p \mid b_0, b_1, \dots, b_{i-1}$ και $p \nmid b_i$. Όμως $a_i = b_0c_i + b_1c_{i-1} + \dots + b_{i-1}c_1 + b_ic_0$ και

$$\begin{cases} p \mid a_i \\ p \mid b_0c_i + \dots + b_{i-1}c_1 \end{cases} \implies \begin{cases} p \mid b_ic_0 \\ p \nmid c_0 \end{cases} \implies p \mid b_i$$

που είναι άτοπο. Συνεπώς το πολυώνυμο $f(t)$ είναι ανάγωγο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Επιλέγοντας, $p = 2$ για το $g_1(t)$, $p = 3$ για το $g_2(t)$, $p = 5$ για το $g_3(t)$, και $p = p$, για το $g_4(t)$, από το Κριτήριο Eisenstein βλέπουμε ότι τα πολυώνυμα $g_i(t)$, $1 \leq i \leq 4$, είναι ανάγωγα υπεράνω του \mathbb{Q} .

Αντίθετα το πολυώνυμο $t^4 + 4$, για το οποίο δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το Κριτήριο Eisenstein, δεν είναι ανάγωγο διότι:

$$t^4 + 4 = (t^2 - 2t + 2) \cdot (t^2 + 2t + 2) \quad \square$$

Άσκηση 5. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές

$$P(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1t + c_0,$$

Αν ρ είναι μια πραγματική ρίζα του $P(t)$, να δειχθεί ότι: είτε ο ρ είναι ακέραιος ή ο ρ είναι άρρητος.

Λύση. Έστω $\rho = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ μια ρητή ρίζα του $P(t)$. Τότε $a, b \in \mathbb{Z}$, όπου $b \neq 0$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι a, b δεν έχουν κανένα κοινό παράγοντα.

Τότε

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + c_1\frac{a}{b} + c_0 = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με b^n θα έχουμε

$$\begin{aligned} a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \dots + c_1ab^{n-1} + c_0b^n = 0 &\implies a^n = b(-c_{n-1}a^{n-1} - \dots - c_1ab^{n-2} - c_0b^{n-1}) \\ &\implies b \mid a^n \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $b \neq \pm 1$. Τότε ο b έχει ένα πρώτο διαιρέτη q και άρα

$$\begin{cases} q \mid b \\ b \mid a^n \end{cases} \implies q \mid a^n \implies q \mid a$$

Συνεπώς οι a, b έχουν ένα κοινό πρώτο διαιρέτη που είναι άτοπο.

Ύρα $b = \pm 1$ και έτσι έχουμε ότι η ρητή ρίζα ρ του $P(t)$ είναι ακέραιος αριθμός, απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. \square

Άσκηση 6. (1) Να αναλυθεί το πολυώνυμο

$$P(t) = t^3 - 2t^2 - 3t + 6$$

σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{Q}[t]$.

(2) Να αναλυθεί το πολυώνυμο

$$P(t) = 2t^3 - (5 + 6i)t^2 + 9it + 1 - 3i$$

σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{C}[t]$, γνωρίζοντας ότι το $P(t)$ έχει μια πραγματική ρίζα.

Λύση. (1) Επειδή το πολυώνυμο $P(t)$ είναι περιττού βαθμού, θα έχει μια πραγματική ρίζα ρ . Σύμφωνα με την Άσκηση 5, αν η ρίζα ρ είναι ρητός αριθμός, θα είναι ακέραιος και τότε, σύμφωνα με την Άσκηση 3, ο ακέραιος ρ θα πρέπει να διαιρεί τον σταθερό όρο του $P(t)$. Επομένως εξετάζουμε αν κάποιος από τους διαιρέτες του 6 είναι ρίζα του $P(t)$. Εύκολα βλέπουμε ότι πράγματι $P(2) = 0$ και επομένως το $\rho = 2$ είναι ρίζα του $P(t)$, Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε

$$P(t) = (t-2)(t^2 + at + b) \implies t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = t^3 + (a-2)t^2 + (b-2a)t - 2b \implies \\ \implies a-2 = -2 \ \& \ b-2a = -3 \ \& \ -2b = 6 \implies a = 0 \ \& \ b = -3$$

Άρα θα έχουμε:

$$P(t) = (t-2)(t^2 - 3)$$

Προφανώς το πολυώνυμο $t^2 - 3$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[t]$ (διαφορετικά θα είχε έναν πρωτοβάθμιο παράγοντα ο οποίος θα είχε ως ρίζα το $\sqrt{3}$ και αυτό είναι άτοπο διότι $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$). Έτσι η παραπάνω ανάλυση, είναι η ανάλυση του $P(t)$ σε ανάγωγους παράγοντες υπεράνω του \mathbb{Q} .

Επειδή $t^2 - 3 = (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$, έπεται ότι η ανάλυση του $P(t)$ σε ανάγωγους παράγοντες υπεράνω του \mathbb{R} είναι

$$P(t) = (t-2)(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$$

(2) Έστω ρ η πραγματική ρίζα του $P(t)$. Τότε

$$P(\rho) = 0 \implies 2\rho^3 - (5+6i)\rho^2 + 9i\rho + 1 - 3i = 0 \implies (2\rho^3 - 5\rho^2 + 1) + i(-6\rho^2 + 9\rho - 3) = 0 \implies \\ \implies \begin{cases} 2\rho^3 - 5\rho^2 + 1 = 0 \\ -6\rho^2 + 9\rho - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\rho^3 - 5\rho^2 + 1 = 0 \\ 3\rho^2 - 3\rho + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\rho^3 - 5\rho^2 + 1 = 0 \\ \rho = 1 \ \text{ή} \ \rho = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \rho = \frac{1}{2}$$

Άρα η πραγματική ρίζα του $P(t)$ είναι η $\rho = \frac{1}{2}$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$P(t) = (2t-1)(t^2 + zt + w) = 2t^3 + (2z-1)t^2 + (2w-z)t - w$$

όπου z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί. Τότε θα έχουμε:

$$2t^3 - (5+6i)t^2 + 9it + 1 - 3i = P(t) = 2t^3 + (2z-1)t^2 + (2w-z)t - w$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$w = -1 + 3i \ \& \ z = -2 - 3i$$

Άρα

$$t^2 + zt + w = t^2 - (2+3i)t - 1 + 3i$$

Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα

$$t^2 - (2+3i)t - 1 + 3i = (t - (1+2i))(t - (1+i))$$

έπεται ότι η ανάλυση του $P(t)$ σε ανάγωγους παράγοντες υπεράνω του \mathbb{C} είναι

$$P(t) = (2t-1)(t - (1+2i))(t - (1+i)) = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t - (1+2i))(t - (1+i))$$

□

Άσκηση 7. Να γραφούν τα ακόλουθα πολυώνυμα ως γινόμενα αναγώγων πολυωνύμων στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, και $\mathbb{C}[t]$:

$$P(t) = t^3 - 2t^2 + 2t - 1, \quad Q(t) = 2t^4 - 5t^3 + 4t^2 - 5t + 2, \quad R(t) = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4$$

Λύση. (1) Οι διαιρέτες του σταθερού όρου -1 του $P(t)$ είναι οι ± 1 . Επειδή $P(1) = 0$ και $P(-1) = -6 \neq -0$, έπεται ότι το 1 είναι μια ρητή ρίζα του $P(t)$. Άρα το $t - 1$ διαιρεί το $P(t)$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση του $P(t)$ με το $t - 1$ εύκολα βλέπουμε ότι

$$P(t) = (t - 1)(t^2 - t + 1)$$

Το πολυώνυμο $t^2 - t + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες διότι είναι δευτεροβάθμιο με αρνητική ορίζουσα. Άρα το πολυώνυμο $t^2 - t + 1$ είναι ανάγωγο υπεράνω του \mathbb{Q} και υπεράνω του \mathbb{R} , και η παραπάνω ανάλυση είναι η ανάλυση του $P(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$.

Στο $\mathbb{C}[t]$, όμως θα έχουμε

$$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(t - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Άρα η ανάλυση του $P(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στα στο $\mathbb{C}[t]$ είναι η εξής:

$$P(t) = (t - 1) \left(t - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(t - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

(2) Οι διαιρέτες του σταθερού όρου 2 του $Q(t)$ είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$. Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα, $Q(2) = 0 = Q(\frac{1}{2})$ έπεται ότι τα 2 και $\frac{1}{2}$ είναι ρητές ρίζες του $Q(t)$. Άρα τα $t - 2$ και $t - \frac{1}{2}$ διαιρούν το $Q(t)$, και επομένως το πολυώνυμο $(t - 2)(t - \frac{1}{2}) = t^2 - \frac{5}{2}t + 1$ διαιρεί το $Q(t)$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση του $Q(t)$ με το $t^2 - \frac{5}{2}t + 1$ εύκολα βλέπουμε ότι

$$Q(t) = (t - 2) \left(t - \frac{1}{2}\right) (2t^2 + 2) = 2(t - 2) \left(t - \frac{1}{2}\right) (t^2 + 1)$$

Το πολυώνυμο $t^2 + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες διότι είναι δευτεροβάθμιο με αρνητική ορίζουσα. Άρα το πολυώνυμο $t^2 + 1$ είναι ανάγωγο υπεράνω του \mathbb{Q} και υπεράνω του \mathbb{R} , και η παραπάνω ανάλυση είναι η ανάλυση του $Q(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$.

Στο $\mathbb{C}[t]$, όμως θα έχουμε

$$t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$$

Άρα η ανάλυση του $Q(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στο $\mathbb{C}[t]$ είναι η εξής:

$$Q(t) = 2(t - 2) \left(t - \frac{1}{2}\right) (t - i)(t + i)$$

(3) Οι διαιρέτες του σταθερού όρου 4 του $Q(t)$ είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα, $R(2) = 0$ έπεται ότι το 2 είναι ρητή ρίζα του $Q(t)$. Επειδή $R(t)' = -3t^2 + 10t - 8$ και $R(2)' = 0$, έπεται ότι το 2 έχει πολλαπλότητα τουλάχιστον 2 ως ρίζα του $R(t)$. Επειδή $R(t)'' = -6t + 10$ και $R(2)'' = -2 \neq 0$, έπεται ότι το 2 είναι ρίζα του $R(t)$ πολλαπλότητας 2 . Αυτό σημαίνει ότι $(t - 2)^2 \mid R(t)$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση του $R(t)$ με το $(t - 2)^2$ εύκολα βλέπουμε ότι

$$R(t) = (t - 2)^2(1 - t) = -(t - 1)(t - 2)^2$$

η ανάλυση του $R(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$ και $\mathbb{C}[t]$. □

• • •

Άσκηση 8. Θεωρούμε τους υπόχωρους του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ και } 3x + 2y + z = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 4y + 3z = 0\}$$

Να εξετάσετε αν ισχύει ότι: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Αν αυτό δεν ισχύει να βρείτε υπόχωρους \mathcal{U} και \mathcal{Z} έτσι ώστε

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$$

Λύση. (1) Το διάνυσμα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{V} αν και μόνον αν:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = -x - y \\ z = -3x - 2y \end{cases} \implies \begin{cases} y = -2x \\ z = -x - y = -x + 2x = x \end{cases} \implies \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

Επομένως

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -2x, z = x\} = \{(x, -2x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2, 1) \rangle$$

και άρα το μονοσύνολο $\mathcal{B}_1 = \{(1, -2, 1)\}$ είναι μια βάση του \mathcal{V} . Ιδιαίτερα $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 1$.

Παρόμοια θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 4y + 3z = 0\} = \left\{ \left(x, y, -\frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \left(1, 0, -\frac{5}{3} \right) + y \left(0, 1, -\frac{4}{3} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\langle \left(1, 0, -\frac{5}{3} \right), \left(0, 1, -\frac{4}{3} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

και άρα το σύνολο $\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(1, 0, -\frac{5}{3} \right), \left(0, 1, -\frac{4}{3} \right) \right\}$ είναι μια βάση του \mathcal{W} . Ιδιαίτερα $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 2$.

Για να ισχύει $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, θα πρέπει η ένωση

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{ (1, -2, 1), \left(1, 0, -\frac{5}{3} \right), \left(0, 1, -\frac{4}{3} \right) \right\}$$

της βάσης \mathcal{B}_1 του \mathcal{V} και της βάσης \mathcal{B}_2 του \mathcal{W} να είναι μια βάση του \mathbb{R}^3 . Αυτό δεν συμβαίνει διότι η ορίζουσα των συντελεστών των διανυσμάτων είναι ίση με μηδέν:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{R}^3 \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

(2) (α) Συμπληρώνουμε τη βάση $\mathcal{B}_1 = \{(1, -2, 1)\}$ του \mathcal{V} σε μια βάση του \mathbb{R}^3 . Επειδή η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

έπεται ότι μια βάση του \mathbb{R}^3 η οποία συμπληρώνει τη βάση \mathcal{B}_1 του \mathcal{V} είναι η εξής

$$\mathcal{C} = \{(1, -2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Θέτοντας $\mathcal{U} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

(β) Συμπληρώνουμε τη βάση $\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(1, 0, -\frac{5}{3} \right), \left(0, 1, -\frac{4}{3} \right) \right\}$ του \mathcal{W} σε μια βάση του \mathbb{R}^3 . Επειδή η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

έπεται ότι μια βάση του \mathbb{R}^3 η οποία συμπληρώνει τη βάση \mathcal{B}_2 του \mathcal{W} είναι η εξής

$$\mathcal{D} = \left\{ \left(1, 0, -\frac{5}{3} \right), \left(0, 1, -\frac{4}{3} \right), (0, 0, 1) \right\}$$

Θέτοντας $\mathcal{Z} = \langle (0, 0, 1) \rangle = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$$

□

Άσκηση 9. Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{V} = \langle (1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1) \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{W} = \langle (-1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$$

(1) Είναι το άθροισμα $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ ευθύ;

(2) Πόσοι υπόχωροι \mathcal{Z} του \mathbb{R}^4 υπάρχουν έτσι ώστε $\mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση. (1) Τα σύνολα διανυσμάτων $\{(1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1)\}$ και $\{(-1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάσεις αντίστοιχα των υπόχωρων \mathcal{V} και \mathcal{W} . Συνεπώς έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 2$. Ο υπόχωρος $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \langle (1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$, αλλά

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_4]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{3}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathcal{V} + \mathcal{W} = \langle (1, 2, 1, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

Το σύνολο διανυσμάτων $\{(1, 2, 1, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ αποτελεί βάση του $\mathcal{V} + \mathcal{W}$, αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = 3$. Τότε

$$3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) \neq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 2 + 2 = 4$$

και επομένως το άθροισμα $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ δεν είναι ευθύ.

(2) Αναζητούμε υπόχωρους \mathcal{Z} του \mathbb{R}^4 έτσι ώστε $\mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$. Επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$ αναζητούμε δύο επιπλέον διανύσματα τα οποία μαζί με τα διανύσματα $\{(1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1)\}$ να αποτελούν βάση του \mathbb{R}^4 . Δηλαδή, θέλουμε να συμπληρώσουμε το παρακάτω πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

με τέτοιο τρόπο ώστε η ορίζουσα του να είναι διάφορη του μηδενός. Θεωρούμε τα διανύσματα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 1, 0)$ και $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (0, 0, 0, 1)$. Επειδή, όπως διαπιστώνουμε εύκολα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

το σύνολο

$$\{(1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και άρα είναι βάση του \mathbb{R}^4 . Τότε θέτοντας $\mathcal{Z} = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$, έπεται ότι $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

Για κάθε $k \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τα διανύσματα $(k, 0, k+1, 0)$ και $(0, k, 0, k+1)$ του \mathbb{R}^4 . Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = -3k - 1$$

έπεται ότι για κάθε $k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$, το σύνολο διανυσμάτων

$$\{(1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (k, 0, k+1, 0), (0, k, 0, k+1)\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και άρα είναι βάση του \mathbb{R}^4 . Επομένως, όπως παραπάνω, θέτοντας

$$\mathcal{W}_k = \langle (k, 0, k+1, 0), (0, k, 0, k+1) \rangle$$

έπεται ότι θα έχουμε

$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}_k$$

Έστω $k, l \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ και υποθέτουμε ότι $k \neq l$. Αν $\mathcal{W}_k = \mathcal{W}_l$, τότε $(k, 0, k+1, 0) \in \mathcal{W}_l$ και επομένως το διάνυσμα $(k, 0, k+1, 0)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $(l, 0, l+1, 0)$ και $(0, l, 0, l+1)$:

$$\begin{aligned} (k, 0, k+1, 0) = x(l, 0, l+1, 0) + y(0, l, 0, l+1) &\implies (k, 0, k+1, 0) = (xl, yl, x(l+1), y(l+1)) \implies \\ \implies \begin{cases} k = xl \\ k+1 = x(l+1) \end{cases} &\implies \begin{cases} k = xl \\ k+1 = xl+x \end{cases} \implies x = 1 \implies k = l \end{aligned}$$

και αυτό είναι άτοπο. Άρα $\mathcal{W}_k \neq \mathcal{W}_l$, δηλαδή οι υπόχωροι $\{\mathcal{W}_k\}_{k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}}$ του \mathbb{R}^4 είναι ανά δύο διαφορετικοί και για κάθε έναν από αυτούς ισχύει ότι $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}_k$. Επομένως υπάρχει άπειρο (μη-αριθμήσιμο) πλήθος υπόχωρων \mathcal{Z} του \mathbb{R}^4 έτσι ώστε $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$. \square

Άσκηση 10. Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του \mathbb{C} -διανυσματικού χώρου \mathbb{C}^3 :

$$\mathcal{V} = \langle (1, 1, 0), (i, 1+i, 1), (1+i, 1+i, 0) \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{W} = \langle (1, 0, 1), (i, -i, 0), (0, i, i) \rangle$$

Να βρείτε υπόχωρο \mathcal{U} του \mathbb{C}^3 έτσι ώστε

$$(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \oplus \mathcal{U} = \mathbb{C}^3$$

Λύση. Θα προσδιορίσουμε πρώτα τον υπόχωρο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών των διανυσμάτων $(1, 1, 0)$, $(i, 1+i, 1)$, $(1+i, 1+i, 0)$ τα οποία παράγουν τον \mathcal{V} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & i+1 & 1 \\ i+1 & i+1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - i\Gamma_1]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως $\mathcal{V} = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1) \rangle$ και επειδή τα διανύσματα $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$ είναι

γραμμικά ανεξάρτητα διότι $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

είναι μια βάση του \mathcal{V} και άρα $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V} = 3$.

Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών των διανυσμάτων $(1, 0, 1)$, $(i, -i, 0)$, $(0, i, i)$ τα οποία παράγουν τον \mathcal{W} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i & -i & 0 \\ 0 & i & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - i\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & i & i \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow i\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως $\mathcal{W} = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$ και επειδή τα διανύσματα $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{D} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

είναι μια βάση του \mathcal{W} και άρα $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{W} = 2$.

Από τον τύπο της διαστάσης του αθροίσματος υπόχωρων θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{W} - \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 5 - \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \leq 3$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε διότι ο $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του \mathbb{C}^3 . Άρα:

$$2 \leq \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \leq 2$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε διότι ο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του \mathcal{W} και γνωρίζουμε ότι $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{W} = 2$. Επομένως:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$$

Παρατηρούμε ότι $(0, 1, 1) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Επίσης $(1, 1, 0) - (0, 1, 1) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ και αυτό σημαίνει το διάνυσμα $(1, 0, 1)$ του \mathcal{W} ανήκει και στον \mathcal{V} ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης \mathcal{C} του \mathcal{V} . Έτσι $(1, 0, 1) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Επειδή προφανώς τα διανύσματα $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ανήκουν στον $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, και επειδή $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Επειδή $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$, αναζητούμε υπόχωρο \mathcal{U} έτσι ώστε $(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \oplus \mathcal{U} = \mathbb{C}^3$. Επεκτείνουμε τη βάση \mathcal{A} του $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ σε μια βάση του \mathbb{C}^3 : θεωρούμε το διάνυσμα $(0, 0, 1)$ και τότε επειδή η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

είναι μια βάση του \mathbb{C}^3 η οποία συμπληρώνει τη βάση \mathcal{A} του $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Θέτοντας $\mathcal{U} = \langle (0, 0, 1) \rangle = \{(0, 0, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z \in \mathbb{C}\}$, αποκτούμε έναν υπόχωρο του \mathbb{C}^3 , και τότε, επειδή η ένωση $\mathcal{B} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1)\} \cup \{(0, 0, 1)\}$ των βάσεων των υπόχωρων $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και \mathcal{U} είναι μια βάση του \mathbb{C}^3 , έπεται ότι:

$$\mathbb{C}^3 = (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \oplus \mathcal{U} \quad \square$$

Άσκηση 11. Να εξετάσετε αν ισχύει ότι: $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, όπου \mathcal{V} και \mathcal{W} είναι οι ακόλουθοι υπόχωροι του $\mathbb{R}_3[t]$:

$$\mathcal{V} = \langle 1, t + t^2, 2 + 3t + 3t^2 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{W} = \langle t, t^3 \rangle$$

Λύση. Καταρχήν παρατηρούμε ότι

$$2 + 3t + 3t^2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (t + t^2)$$

και άρα

$$\mathcal{V} = \langle 1, t + t^2 \rangle$$

Τα διανύσματα $1, t + t^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (t + t^2) = 0 &\implies \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \lambda_2 \cdot t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ &\implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$. Όμοια $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 2$ αφού το σύνολο διανυσμάτων $\{t, t^3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Για να ισχύει ότι $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, θα πρέπει η ένωση $\{1, t + t^2, t, t^3\}$ της βάσης $\{1, t + t^2\}$ του \mathcal{V} και της βάσης $\{t, t^3\}$ της βάσης του \mathcal{W} να είναι βάση του $\mathbb{R}_3[t]$ ή ισοδύναμα το σύνολο διανυσμάτων

$$\{1, t + t^2, t, t^3\}$$

να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνουμε³ ότι το παραπάνω σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα: $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. □

Άσκηση 12. Να δείξετε, με ένα αντιπαράδειγμα, ότι αν $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , όπου $n \geq 3$, και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\vec{0}\}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad 1 \leq i \neq j \leq n \quad (*)$$

τότε δεν είναι απαραίτητα αληθές ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ.

³Το ότι το σύνολο $\{1, t, t + t^2, t^3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}_3[t]$ προκύπτει και από το γεγονός ότι οι βαθμοί των πολυωνύμων είναι 0, 1, 2, και 3 αντίστοιχα. Εδώ χρησιμοποιούμε το, γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα I, αποτέλεσμα ότι αν $\mathcal{B} = \{P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ είναι ένα σύνολο πολυωνύμων έτσι ώστε $\deg P_i(t) = i$, $0 \leq i \leq n$, τότε το σύνολο \mathcal{B} είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

Λύση. Προφανώς αν $n = 2$, τότε οι σχέσεις (*) εκφυλίζονται στη σχέση $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\vec{0}\}$ και γνωρίζουμε τότε ότι αν $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\vec{0}\}$, τότε το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ είναι ευθύ.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι: «Το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ αν και μόνον αν: $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n = \vec{0}$, $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n \implies \vec{x}_i = \vec{0}$, $1 \leq i \leq n$.»

Υποθέτουμε επομένως ότι $n \geq 3$.

(1) Έστω $n = 3$ και θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^3 . Θεωρούμε τους υπόχωρους:

$$\mathcal{V}_1 = \langle (1, -1, 0) \rangle = \{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V}_2 = \langle (0, 1, -1) \rangle = \{(0, x, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V}_3 = \langle (-1, 0, 1) \rangle = \{(-x, 0, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Από τις παραπάνω περιγραφές των υπόχωρων, έπεται άμεσα ότι

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3 = \{\vec{0}\}$$

Όμως το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3$ δεν είναι ευθύ διότι $(1, -1, 0) \in \mathcal{V}_1$, $(0, 1, -1) \in \mathcal{V}_2$, και $(-1, 0, 1) \in \mathcal{V}_3$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και

$$(1, -1, 0) + (0, 1, -1) + (-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

(2) Έστω $n = 4$ και θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^4 . Θεωρούμε τους υπόχωρους:

$$\mathcal{V}_1 = \langle (1, -1, 0, 0) \rangle = \{(x, -x, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V}_2 = \langle (0, 1, -1, 0) \rangle = \{(0, x, -x, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V}_3 = \langle (0, 0, 1, -1) \rangle = \{(0, 0, x, -x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V}_4 = \langle (-1, 0, 0, 1) \rangle = \{(-x, 0, 0, x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Από τις παραπάνω περιγραφές των υπόχωρων, έπεται άμεσα ότι

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_3 \cap \mathcal{V}_4 = \{\vec{0}\}$$

Όμως το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4$ δεν είναι ευθύ διότι $(1, -1, 0, 0) \in \mathcal{V}_1$, $(0, 1, -1, 0) \in \mathcal{V}_2$, $(0, 0, 1, -1) \in \mathcal{V}_3$ και $(-1, 0, 0, 1) \in \mathcal{V}_4$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και

$$(1, -1, 0, 0) + (0, 1, -1, 0) + (0, 0, 1, -1) + (-1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

(3) Γενικά για κάθε $n \geq 3$, θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^n . Θεωρούμε τους υπόχωρους:

$$\mathcal{V}_1 = \langle (1, -1, 0, 0, \dots, 0) \rangle = \{(x, -x, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V}_2 = \langle (0, 1, -1, 0, \dots, 0) \rangle = \{(0, x, -x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}\}$$

⋮

$$\mathcal{V}_{n-1} = \langle (0, 0, \dots, 1, -1) \rangle = \{(0, 0, \dots, x, -x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V}_n = \langle (-1, 0, \dots, 0, 1) \rangle = \{(-x, 0, \dots, 0, x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Από τις παραπάνω περιγραφές των υπόχωρων, έπεται άμεσα ότι

$$1 \leq i \neq j \leq n \implies \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\vec{0}\}$$

Όμως το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ δεν είναι ευθύ διότι $(1, -1, 0, \dots, 0, 0) \in \mathcal{V}_1$, $(0, 1, -1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{V}_2$, $(0, 0, \dots, 1, -1) \in \mathcal{V}_{n-1}$ και $(-1, 0, \dots, 0, 1) \in \mathcal{V}_n$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και

$$(1, -1, 0, \dots, 0, 0) + (0, 1, -1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, 1, -1) + (-1, 0, \dots, 0, 1) = (0, 0, \dots, 0, 0) \quad \square$$

Άσκηση 13. Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} . Ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ.

(2) $\mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_{i+1} + \mathcal{V}_{i+2} + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$, δηλαδή:

$$\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

$$\mathcal{V}_2 \cap (\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

⋮

$$\mathcal{V}_{n-2} \cap (\mathcal{V}_{n-1} + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

$$\mathcal{V}_{n-1} \cap \mathcal{V}_n = \{\vec{0}\}$$

Λύση. (1) Υποθέτουμε ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ. Γνωρίζουμε τότε ότι

$$\forall i = 1, 2, \dots, n: \mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\} \quad (*)$$

Επειδή προφανώς

$$\mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n$$

από τη σχέση (*) έπεται ότι

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-1: \mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n) \subseteq \mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

(2) Υποθέτουμε ότι $\forall i = 1, 2, \dots, n-1: \mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$. Έστω $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n$, και υποθέτουμε ότι

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n = \vec{0}$$

Τότε

$$\mathcal{V}_1 \ni -\vec{x}_1 = \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n \in \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n \implies -\vec{x}_1 = \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n \in \mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

Επομένως $\vec{x}_1 = \vec{0}$ και $\vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n = \vec{0}$. Τότε όπως και προηγουμένως

$$\mathcal{V}_2 \ni -\vec{x}_2 = \vec{x}_3 + \dots + \vec{x}_n \in \mathcal{V}_3 + \dots + \mathcal{V}_n \implies -\vec{x}_2 = \vec{x}_3 + \dots + \vec{x}_n \in \mathcal{V}_2 \cap (\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

Δηλαδή $\vec{x}_2 = \vec{0}$ και $\vec{x}_3 + \dots + \vec{x}_n = \vec{0}$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, με μια απλή εφαρμογή της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής, έπεται ότι $\vec{x}_i = \vec{0}, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ. \square

Άσκηση 14. Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{W}_1 = \{(t, 2t, -t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{W}_2 = \{(t, s, t - 3s, -s) \in \mathbb{R}^4 \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{W}_3 = \{(t, s, 0, r) \in \mathbb{R}^4 \mid t - 2s + r = 0\}$$

(1) Να δείχθει ότι τα υποσύνολα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ είναι υπόχωροι του \mathbb{R}^4 και να βρεθεί η διάστασή τους.

(2) Να εξετασθεί αν το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ είναι ευθύ.

(3) Να δείχθει ότι $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$.

Λύση. Αφού

$$\mathcal{W}_1 = \langle (1, 2, -1, 1) \rangle, \quad \mathcal{W}_2 = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1) \rangle, \quad \mathcal{W}_3 = \langle (2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$$

έπεται ότι τα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ είναι υπόχωροι του \mathbb{R}^4 . Επίσης, τα σύνολα διανυσμάτων $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1)\}$ και $\{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα έχουμε: $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_1 = 1, \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_2 = 2$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_3 = 2$. Ο υπόχωρος $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ παράγεται από τα διανύσματα

$$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = \langle (1, 2, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1), (2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$$

Όμως τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα και $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) = 4$. Συνεπώς

$$4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) \neq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_1 + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_2 + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_3 = 1 + 2 + 2 = 5$$

και άρα το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ δεν είναι ευθύ. Για το τελευταίο ερώτημα, ο υπόχωρος $\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ παράγεται από τα διανύσματα

$$\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1), (0, 0, 1, 1) \rangle$$

διότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_1]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και άρα το σύνολο διανυσμάτων $\{1, 2, -1, 1\}, (1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1), (0, 0, 1, 1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συνεπώς έχουμε: $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$. \square

Άσκηση 15. Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $f^2 = f$, ναδειχθεί ότι

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$$

Επιπρόσθετα, αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$, ναδειχθεί ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathcal{E} έτσι ώστε ο πίνακας της f στη βάση \mathcal{C} να είναι ο εξής:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των μονάδων στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $r = \mathbf{r}(f)$.

Λύση. Διαγραμματικά έχουμε:

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{E} \quad \text{και} \quad f^2 = f \circ f = f$$

όπου: $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

Επειδή $f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, τότε:

$$f(f(\vec{x})) = f(\vec{x}) \implies f(f(\vec{x}) - \vec{x}) = \vec{0} \implies f(\vec{x}) - \vec{x} \in \text{Ker } f$$

Άρα το τυχαίο διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται ως: $\vec{x} = (\vec{x} - f(\vec{x})) + f(\vec{x}) \in \text{Ker } f + \text{Im } f$. Συνεπώς έχουμε:

$$\mathcal{E} = \text{Ker } f + \text{Im } f \quad (1)$$

Έστω $\vec{x} \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$, δηλαδή $\vec{x} \in \text{Ker } f$ και $\vec{x} \in \text{Im } f$. Άρα $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και $f(\vec{y}) = \vec{x}$ για κάποιο $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε

$$f(\vec{x}) = f(f(\vec{y})) = f^2(\vec{y}) = f(\vec{y}) = \vec{x} \implies \vec{x} = \vec{0}$$

και άρα

$$\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{\vec{0}\} \quad (2)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $\mathcal{E} = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$. Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και $\{\vec{e}'_{k+1}, \vec{e}'_{k+2}, \dots, \vec{e}'_n\}$ μια βάση της εικόνας $\text{Im}(f)$. Προφανώς θα έχουμε ότι $\vec{e}'_i = f(\vec{e}_i)$, για κάποια διανύσματα $\vec{e}_i \in \mathcal{E}$, $k+1 \leq i \leq n$. Επειδή $\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, f(\vec{e}_{k+1}), f(\vec{e}_{k+2}), \dots, f(\vec{e}_n)\}$$

είναι μια βάση του \mathcal{E} . Επειδή

$$f(\vec{e}_i) = \vec{0}, \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{και} \quad f(f(\vec{e}_i)) = f^2(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_i), \quad k+1 \leq i \leq n$$

έπεται ότι ο πίνακας της f στη βάση \mathcal{C} είναι ο

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των μονάδων στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $n - k = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = \mathbf{r}(f)$. □

Άσκηση 16. Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, να δειχθεί ότι

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-$$

όπου:

$$\mathcal{V}_+ = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\} \quad \text{και} \quad \mathcal{V}_- = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$$

Επιπρόσθετα, αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$, να δειχθεί ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathcal{E} έτσι ώστε ο πίνακας της f στη βάση \mathcal{C} είναι ο εξής:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_+$ και το πλήθος των εμφανίσεων του -1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_-$.

Λύση. Διαγραμματικά έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} & \text{και} & f^2 = f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}} \\ & & & & \curvearrowright & & \\ & & & & \text{Id}_{\mathcal{E}} & & \end{array}$$

όπου: $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_+ \cap \mathcal{V}_-$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathcal{V}_+$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}_-$. Τότε

$$\begin{cases} f(\vec{x}) = \vec{x} \\ f(\vec{x}) = -\vec{x} \end{cases} \implies \vec{x} = -\vec{x} \implies 2\vec{x} = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0} \implies \mathcal{V}_+ \cap \mathcal{V}_- = \{\vec{0}\} \quad (3)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται ως $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ με $\vec{x}_1 \in \mathcal{V}_+$ και $\vec{x}_2 \in \mathcal{V}_-$. Τότε $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ και άρα

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ f(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\vec{x}_1 = \vec{x} + f(\vec{x}) \\ 2\vec{x}_2 = \vec{x} - f(\vec{x}) \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{x}_1 = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} \\ \vec{x}_2 = \frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} \end{cases}$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε

$$\vec{x} = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} + \frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} \in \mathcal{V}_+ + \mathcal{V}_-$$

διότι:

$$f\left(\frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) + \vec{x}) = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} \in \mathcal{V}_+$$

και

$$f\left(\frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) - f^2(\vec{x})) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) - \vec{x}) = -\frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} \in \mathcal{V}_-$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση $f^2(\vec{x}) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, δείξαμε ότι $\vec{x} \in \mathcal{V}_+ + \mathcal{V}_-$. Συνεπώς έχουμε

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_+ + \mathcal{V}_- \quad (4)$$

Άρα, από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε το ζητούμενο:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-$$

Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$. Έστω $\mathcal{C}_+ = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του \mathcal{V}_+ και $\mathcal{C}_- = \{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του \mathcal{V}_- . Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_- = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n\}$$

είναι μια βάση του \mathcal{E} . Επειδή

$$f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{και} \quad f(\vec{e}_i) = -\vec{e}_i, \quad k+1 \leq i \leq n$$

έπεται ότι ο πίνακας της f στη βάση \mathcal{C} είναι ο

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_+$ και το πλήθος των εμφανίσεων του -1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_-$. \square

Άσκηση 17. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$.

(1) Αν $A^2 = A$, να δείχθει ότι ο A είναι όμοιος με τον πίνακα:

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{(n-r) \times (n-r)} & \mathbb{O}_{r \times (n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r) \times r} & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου I_r είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας και $r = \mathbf{r}(A)$.

(2) Αν $A^2 = I_n$, να δειχθεί ότι ο A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & \mathbb{O}_{r \times (n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r) \times r} & -I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = X\}$ και το πλήθος των εμφανίσεων του -1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = -X\}$.

Λύση. (1) Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A: \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = AX$$

Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$ του f_A στην κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι ο

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A$$

Προφανώς θα έχουμε

$$\forall X \in \mathbb{K}_n: \quad f_A^2(X) = f_A(f_A(X)) = f_A(AX) = A(AX) = (AA)X = A^2X = AX = f_A(X)$$

Επομένως

$$f_A^2 = f_A$$

και άρα από την Άσκηση 15, έπεται ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathbb{K}_n έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = B$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη βαθμίδα της γραμμικής απεικόνιση f_A , δηλαδή είναι ίσο με τη βαθμίδα του πίνακα A .

Επειδή οι πίνακες A και B είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης f_A ως προς διαφορετικές βάσεις του \mathbb{K}_n , έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

(2) Όπως στο μέρος (1), θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A: \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = AX$$

Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$ του f_A στην κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι ο

$$M_B^B(f_A) = A$$

Προφανώς θα έχουμε

$$\forall X \in \mathbb{K}_n : f_A^2(X) = f_A(f_A(X)) = f_A(AX) = A(AX) = (AA)X = A^2X = I_n X = X = \text{Id}_{\mathbb{K}_n}(X)$$

Επομένως

$$f_A^2 = \text{Id}_{\mathbb{K}_n}$$

και άρα από την Άσκηση 16, έπεται ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathbb{K}_n έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = B$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = X\}$ και το πλήθος των εμφανίσεων του -1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = -X\}$.

Επειδή οι πίνακες A και B είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικές βάσεις του \mathbb{K}_n , έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι. \square

Άσκηση 18. Έστω ο \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος $M_n(\mathbb{K})$ και η γραμμικές απεικονίσεις

$$f: M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad f(A) = {}^t A$$

(1) Ναδειχθεί ότι

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

όπου

(α) $S_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = A\}$ είναι ο υπόχωρος των συμμετρικών πινάκων.

(β) $A_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = -A\}$ είναι ο υπόχωρος των αντισυμμετρικών πινάκων.

(2) Ναδειχθεί ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του $M_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου η μονάδα 1 εμφανίζεται $\frac{n^2+n}{2}$ -φορές και το -1 εμφανίζεται $\frac{n^2-n}{2}$ -φορές.

Λύση. (1) Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ έχουμε:

$$f^2(A) = f(f(A)) = f({}^t A) = {}^t({}^t A) = A \implies f^2 = \text{Id}_{M_n(\mathbb{K})}$$

Από την Άσκηση 16 έπεται ότι ο χώρος $M_n(\mathbb{K})$ είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $\{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = A\} = S_n(\mathbb{K})$ και $\{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = -A\} = A_n(\mathbb{K})$ των συμμετρικών και αντισυμμετρικών πινάκων αντίστοιχα. Άρα:

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

(2) Από την Άσκηση 16 έπεται ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του $M_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου η μονάδα 1 εμφανίζεται $\dim_{\mathbb{K}} S_n(\mathbb{K})$ -φορές και το -1 εμφανίζεται $\dim_{\mathbb{K}} A_n(\mathbb{K})$ -φορές. Από την Άσκηση 19 του Φυλλαδίου 6 των ασκήσεων Γραμμικής Άλγεβρας I, γνωρίζουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} S_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2+n}{2}$ και $\dim_{\mathbb{K}} A_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2-n}{2}$, απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. \square

Υπενθυμίζουμε ότι μια γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται **προβολή**⁴, αν: $f^2 = f$.
Η γραμμική επεικόνιση $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται **ενέλιξη**, αν: $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

Άσκηση 19. (1) Αν η γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι μια προβολή, τότε η γραμμική απεικόνιση

$$2f - \text{Id}_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (2f - \text{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = 2f(\vec{x}) - \vec{x}$$

είναι μια ενέλιξη.

(2) Αν η γραμμική απεικόνιση $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι μια ενέλιξη, τότε η γραμμική απεικόνιση

$$\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \left(\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x}) + \vec{x}}{2}$$

είναι μια προβολή.

Λύση. (1) Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση $2f - \text{Id}_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι γραμμική. Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (2f - \text{Id}_{\mathcal{E}})^2(\vec{x}) &= ((2f - \text{Id}_{\mathcal{E}}) \circ (2f - \text{Id}_{\mathcal{E}}))(\vec{x}) = (2f - \text{Id}_{\mathcal{E}})((2f - \text{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x})) = (2f - \text{Id}_{\mathcal{E}})(2f(\vec{x}) - \vec{x}) = \\ &= (2f)(2f(\vec{x}) - \vec{x}) - \text{Id}_{\mathcal{E}}(2f(\vec{x}) - \vec{x}) = 4f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x} = 4f^2(\vec{x}) - 4f(\vec{x}) + \vec{x} = \\ &= 4f(\vec{x}) - 4f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{x} = \text{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $f^2 = f$ επειδή η f είναι προβολή. Άρα $(2f - \text{Id}_{\mathcal{E}})^2(\vec{x}) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, και επομένως:

$$(2f - \text{Id}_{\mathcal{E}})^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$$

δηλαδή η γραμμική απεικόνιση $2f - \text{Id}_{\mathcal{E}}$ είναι ενέλιξη.

(2) Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση $\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι γραμμική. Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)^2(\vec{x}) &= \left(\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2} \circ \frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)(\vec{x}) = \frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2} \left(\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}(\vec{x})\right) = \frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2} \left(\frac{g(\vec{x}) + \text{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x})}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(g \left(\frac{g(\vec{x}) + \text{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x})}{2} \right) + \frac{g(\vec{x}) + \text{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x})}{2} \right) = \frac{1}{4} (g^2(\vec{x}) + g(\vec{x}) + g(\vec{x}) + \vec{x}) = \frac{1}{4} (g(\vec{x}) + 2g(\vec{x}) + \vec{x}) = \\ &= \frac{1}{4} (\vec{x} + 2g(\vec{x}) + \vec{x}) = \frac{1}{4} (2g(\vec{x}) + 2\vec{x}) = \frac{1}{2} (g(\vec{x}) + \vec{x}) = \left(\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)(\vec{x}) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $g^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ επειδή η g είναι ενέλιξη. Άρα

$$\left(\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)^2 = \frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}$$

⁴Ακριβέστερα η f καλείται **προβολή του χώρου \mathcal{E} στον υπόχωρο $\text{Im}(f)$ παράλληλα με τον υπόχωρο $\text{Ker}(f)$** .

δηλαδή η γραμμική απεικόνιση $\left(\frac{g + \text{Id}_E}{2}\right)^2$ είναι προβολή. \square

Άσκηση 20. Έστω $f: E \rightarrow E$ μια προβολή. Τότε η γραμμική απεικόνιση $\text{Id}_E - f: E \rightarrow E$ είναι προβολή και ισχύει ότι:

$$\text{Id}_E = f + (\text{Id}_E - f) \quad \text{και} \quad f \circ (\text{Id}_E - f) = 0 = (\text{Id}_E - f) \circ f$$

Επιπλέον:

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(\text{Id}_E - f) \quad \text{και} \quad \text{Im}(f) = \text{Ker}(\text{Id}_E - f)$$

και

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \text{Im}(\text{Id}_E - f) \oplus \text{Ker}(\text{Id}_E - f)$$

Λύση. (1) Για κάθε $\vec{x} \in E$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\text{Id}_E - f)^2(\vec{x}) &= ((\text{Id}_E - f) \circ (\text{Id}_E - f))(\vec{x}) = (\text{Id}_E - f)((\text{Id}_E - f)(\vec{x})) = (\text{Id}_E - f)(\text{Id}_E(\vec{x}) - f(\vec{x})) = \\ &= (\text{Id}_E - f)(\vec{x} - f(\vec{x})) = \text{Id}_E(\vec{x} - f(\vec{x})) - f(\vec{x} - f(\vec{x})) = \vec{x} - f(\vec{x}) - f(\vec{x}) + f(f(\vec{x})) = \\ &= \vec{x} - f(\vec{x}) - f(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) = \vec{x} - f(\vec{x}) - f(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \vec{x} - f(\vec{x}) = (\text{Id}_E - f)(\vec{x}) \end{aligned}$$

Επομένως

$$(\text{Id}_E - f)^2 = \text{Id}_E - f$$

δηλαδή η γραμμική απεικόνιση $\text{Id}_E - f$ είναι προβολή.

Προφανώς $\text{Id}_E = f + (\text{Id}_E - f)$. Για κάθε $\vec{x} \in E$ έχουμε:

$$(f \circ (\text{Id}_E - f))(\vec{x}) = f((\text{Id}_E - f)(\vec{x})) = f(\text{Id}_E(\vec{x}) - f(\vec{x})) = f(\vec{x} - f(\vec{x})) = f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}$$

Επομένως $f \circ (\text{Id}_E - f) = 0$ και παρόμοια $(\text{Id}_E - f) \circ f = 0$.

(2) Έστω $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Επειδή, από το μέρος (1), έχουμε $\text{Id}_E = f + (\text{Id}_E - f)$, προκύπτει ότι

$$\vec{x} = \text{Id}_E(\vec{x}) = (f + (\text{Id}_E - f))(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (\text{Id}_E - f)(\vec{x}) = (\text{Id}_E - f)(\vec{x}) \in \text{Im}(\text{Id}_E - f)$$

Άρα $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Im}(\text{Id}_E - f)$. Έστω $\vec{x} \in \text{Im}(\text{Id}_E - f)$. Τότε υπάρχει $\vec{y} \in E$ έτσι ώστε $\vec{x} = (\text{Id}_E - f)(\vec{y}) = \text{Id}_E(\vec{y}) - f(\vec{y}) = \vec{y} - f(\vec{y})$. Επομένως θα έχουμε $f(\vec{x}) = f(\vec{y} - f(\vec{y})) = f(\vec{y}) - f^2(\vec{y}) = f(\vec{y}) - f(\vec{y}) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$. Άρα $\text{Im}(\text{Id}_E - f) \subseteq \text{Ker}(f)$ και επομένως:

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(\text{Id}_E - f)$$

Παρόμοια, έστω $\vec{x} \in \text{Im}(f)$. Τότε υπάρχει $\vec{y} \in E$ έτσι ώστε $\vec{x} = f(\vec{y})$. Τότε $(\text{Id}_E - f)(\vec{x}) = \vec{x} - f(\vec{x}) = f(\vec{y}) - f(f(\vec{y})) = f(\vec{y}) - f^2(\vec{y}) = f(\vec{y}) - f(\vec{y}) = \vec{0}$ και επομένως $\vec{x} \in \text{Ker}(\text{Id}_E - f)$. Άρα $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(\text{Id}_E - f)$. Έστω $\vec{x} \in \text{Ker}(\text{Id}_E - f)$. Τότε $(\text{Id}_E - f)(\vec{x}) = \vec{x} - f(\vec{x}) = \vec{0}$, και τότε $\vec{x} = f(\vec{x}) \in \text{Im}(f)$. Αυτό σημαίνει ότι $\text{Ker}(\text{Id}_E - f) \subseteq \text{Im}(f)$, και επομένως:

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(\text{Id}_E - f)$$

(3) Οι ισχυρισμοί προκύπτουν από την Άσκηση 15. \square

Άσκηση 21. Έστω E ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι

$$E = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

όπου \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq n$, είναι υπόχωροι του E .

(1) Ναδειχθεί ότι οι απεικονίσεις, $1 \leq j \leq n$:

$$\pi_j: E \rightarrow \mathcal{V}_j, \quad \pi_j(\vec{x}) = \vec{x}_j$$

όπου $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$ είναι η μοναδική γραφή του διανύσματος \vec{x} του E ως άθροισμα διανυσμάτων \vec{x}_i των υπόχωρων \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq n$, και

$$\iota_j: \mathcal{V}_j \rightarrow E, \quad \iota_j(\vec{x}_j) = \vec{x}_j$$

είναι γραμμικές.

(2) Να δειχθεί ότι, $\forall \kappa, \mu = 1, 2, \dots, n$:

$$\pi_\kappa \circ \iota_\mu = \begin{cases} 0, & \text{αν } \kappa \neq \mu \\ \text{Id}_{\mathcal{V}_\kappa}, & \text{αν } \kappa = \mu \end{cases}$$

(3) Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις, $1 \leq j \leq n$:

$$\iota_j \circ \pi_j: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι προβολές και ισχύει ότι:

$$\text{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 + \dots + \iota_n \circ \pi_n$$

Λύση. (1) Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$, η γραφή ενός διανύσματος $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n$ του \mathcal{E} ως άθροισμα διανυσμάτων \vec{x}_i των υπόχωρων \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq n$, είναι μοναδική και επομένως η απεικόνιση π_j είναι καλά ορισμένη, $1 \leq j \leq n$. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Έστω $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n$ και $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \dots + \vec{y}_n$ η μοναδική γραφή των διανυσμάτων \vec{x} και \vec{y} του \mathcal{E} ως άθροισμα διανυσμάτων \vec{x}_i, \vec{y}_i των υπόχωρων \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq n$. Τότε $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2) + \dots + (\vec{x}_n + \vec{y}_n)$ και $\lambda \vec{x} = \lambda \vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2 + \dots + \lambda \vec{x}_n$ είναι οι μοναδικές γραφές των διανυσμάτων $\vec{x} + \vec{y}$ και $\lambda \vec{x}$ ως άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq n$. Τότε όμως θα έχουμε, $\forall j = 1, 2, \dots, n$:

$$\pi_j(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}_j + \vec{y}_j = \pi_j(\vec{x}) + \pi_j(\vec{y})$$

$$\pi_j(\lambda \vec{x}) = \lambda \vec{x}_j = \lambda \pi_j(\vec{x})$$

Επομένως η γραμμική απεικόνιση π_j , $1 \leq j \leq n$, είναι γραμμική.

Παρόμοια, έστω $\vec{x}_j, \vec{y}_j \in \mathcal{V}_j$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε θα έχουμε:

$$\iota_j(\vec{x}_j + \vec{y}_j) = \vec{x}_j + \vec{y}_j = \iota_j(\vec{x}_j) + \iota_j(\vec{y}_j)$$

$$\iota_j(\lambda \vec{x}_j) = \lambda \vec{x}_j = \lambda \iota_j(\vec{x}_j)$$

Επομένως η γραμμική απεικόνιση ι_j , $1 \leq j \leq n$, είναι γραμμική.

(2) Για κάθε $\kappa, \mu = 1, 2, \dots, n$, θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\pi_\kappa \circ \iota_\mu: \mathcal{V}_\mu \longrightarrow \mathcal{V}_\kappa, \quad \vec{x}_\mu \longmapsto (\pi_\kappa \circ \iota_\mu)(\vec{x}_\mu) = \pi_\kappa(\iota_\mu(\vec{x}_\mu)) = \pi_\kappa(\vec{x}_\mu)$$

Επειδή η μοναδική γραφή του διανύσματος $\vec{x}_\mu \in \mathcal{V}_\mu$ ως άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq n$ είναι $\vec{x}_\mu = \vec{0} + \vec{0} + \dots + \vec{x}_\mu + \dots + \vec{0}$, έπεται ότι $\pi_\kappa(\vec{x}_\mu) = \begin{cases} \vec{0}, & \text{αν } \kappa \neq \mu \\ \vec{x}_\mu, & \text{αν } \kappa = \mu \end{cases}$. Αυτό σημαίνει

ότι $\pi_\kappa \circ \iota_\mu = 0$, αν $\kappa \neq \mu$ και $\pi_\kappa \circ \iota_\kappa = \text{Id}_{\mathcal{V}_\kappa}$.

(3) Για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, χρησιμοποιώντας ότι $\pi_j \circ \iota_j = \text{Id}_{\mathcal{V}_j}$, έχουμε:

$$(\iota_j \circ \pi_j) \circ \iota_j \circ \pi_j = \iota_j \circ (\pi_j \circ \iota_j) \circ \pi_j = \iota_j \circ \text{Id}_{\mathcal{V}_j} \circ \pi_j = \iota_j \circ \pi_j$$

και άρα οι γραμμικές απεικονίσεις $\iota_j \circ \pi_j: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι προβολές, $\forall j = 1, 2, \dots, n$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με μοναδική γραφή $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n$ του \mathcal{E} ως άθροισμα διανυσμάτων \vec{x}_i των υπόχωρων \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq n$. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 + \dots + \iota_n \circ \pi_n)(\vec{x}) &= (\iota_1 \circ \pi_1)(\vec{x}) + (\iota_2 \circ \pi_2)(\vec{x}) + \dots + (\iota_n \circ \pi_n)(\vec{x}) = \\ &= \iota_1(\pi_1(\vec{x})) + \iota_2(\pi_2(\vec{x})) + \dots + \iota_n(\pi_n(\vec{x})) = \iota_1(\vec{x}_1) + \iota_2(\vec{x}_2) + \dots + \iota_n(\vec{x}_n) = \\ &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n = \vec{x} = \text{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι: $\text{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 + \dots + \iota_n \circ \pi_n$. □

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει ένα αντίστροφο του βασικού ισχυρισμού της προηγούμενης Άσκησης.

Άσκηση 22. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος και έστω ότι, για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, η γραμμική απεικόνιση

$$\rho_j: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι προβολή και ισχύει ότι:

$$1 \leq i \neq j \leq n: \quad \rho_i \circ \rho_j = 0 \quad \text{και} \quad \text{Id}_{\mathcal{E}} = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$$

Τότε θέτοντας $\mathcal{V}_i = \text{Im}(\rho_i)$, $1 \leq i \leq n$, να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$$

Λύση. Επειδή οι απεικονίσεις ρ_i , $1 \leq i \leq n$, είναι γραμμικές, τα υποσύνολα $\mathcal{V}_i = \text{Im}(\rho_i) = \{\rho_i(\vec{x}) \in \mathcal{E} \mid \vec{x} \in \mathcal{E}\}$ είναι υπόχωροι του \mathcal{E} .

Επειδή $\text{Id}_{\mathcal{E}} = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$, έπεται ότι για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\vec{x} = \text{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = (\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n)(\vec{x}) = \rho_1(\vec{x}) + \rho_2(\vec{x}) + \dots + \rho_n(\vec{x}) \in \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$$

Επομένως

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n \quad (\dagger)$$

Έστω $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$, και υποθέτουμε ότι $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n = \vec{0}$. Επειδή $\mathcal{V}_i = \text{Im}(\rho_i)$, έπεται ότι υπάρχουν διανύσματα $\vec{y}_i \in \mathcal{E}$, $1 \leq i \leq n$ έτσι ώστε: $\vec{x}_i = \rho_i(\vec{y}_i)$, και άρα θα έχουμε:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n = \vec{0} \implies \rho_1(\vec{y}_1) + \rho_2(\vec{y}_2) + \dots + \rho_n(\vec{y}_n) = \vec{0}$$

Για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, εφαρμόζουμε την προβολή και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, και χρησιμοποιώντας ότι

$$\rho_j \circ \rho_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } j \neq i \\ \rho_i, & \text{αν } j = i \end{cases}$$

θα έχουμε, $\forall j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \rho_j(\rho_1(\vec{y}_1) + \rho_2(\vec{y}_2) + \dots + \rho_n(\vec{y}_n)) = \vec{0} &\implies (\rho_j \circ \rho_1)(\vec{y}_1) + (\rho_j \circ \rho_2)(\vec{y}_2) + \dots + (\rho_j \circ \rho_n)(\vec{y}_n) = \vec{0} \implies \\ &\implies 0(\vec{y}_1) + 0(\vec{y}_2) + \dots + (\rho_j \circ \rho_j)(\vec{y}_j) + \dots + 0(\vec{y}_n) = \vec{0} \implies \rho_j(\vec{y}_j) = \vec{0} \implies \vec{x}_j = \vec{0} \end{aligned}$$

Από γνωστή ιδιότητα, γνωρίζουμε τότε ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n \quad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις (\dagger) και $(\dagger\dagger)$, έπεται το ζητούμενο. \square

Παρατήρηση. Ιδιαίτερα αν ο χώρος $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων \mathcal{U} και \mathcal{V} , τότε ορίζονται:

(1) η προβολή του \mathcal{E} στον υπόχωρο \mathcal{U} παράλληλα με τον υπόχωρο \mathcal{V}

$$\pi_{\mathcal{U}}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{U}, \quad \pi_{\mathcal{U}}(\vec{x}) = \vec{u}, \quad \text{όπου } \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V}$$

(2) η προβολή του \mathcal{E} στον υπόχωρο \mathcal{V} παράλληλα με τον υπόχωρο \mathcal{U}

$$\pi_{\mathcal{V}}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{v}, \quad \text{όπου } \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V}$$

Αυτό προκύπτει άμεσα διότι

$$\text{Ker}(\pi_{\mathcal{U}}) = \mathcal{V} = \text{Im}(\pi_{\mathcal{V}}) \quad \text{και} \quad \text{Ker}(\pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{U} = \text{Im}(\pi_{\mathcal{U}})$$

Επιπλέον, ορίζονται και οι γραμμικές απεικονίσεις

$$\iota_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \iota_{\mathcal{U}}(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$\iota_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \iota_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = \vec{v}$$

και ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} \text{Id}_{\mathcal{E}} &= \iota_{\mathcal{U}} \circ \pi_{\mathcal{U}} + \iota_{\mathcal{V}} \circ \pi_{\mathcal{V}} \\ \pi_{\mathcal{U}} \circ \iota_{\mathcal{U}} &= \text{Id}_{\mathcal{U}} \quad \text{και} \quad \pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \text{Id}_{\mathcal{V}} \\ \pi_{\mathcal{U}} \circ \iota_{\mathcal{V}} &= 0 \quad \text{και} \quad \pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{U}} = 0 \end{aligned}$$

Τέλος οι απεικονίσεις $\rho_{\mathcal{U}} = \iota_{\mathcal{U}} \circ \pi_{\mathcal{U}}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ και $\rho_{\mathcal{V}} = \iota_{\mathcal{V}} \circ \pi_{\mathcal{V}}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι προβολές. \blacksquare

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , τότε το καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

$$\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m = \{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq m\}$$

εφοδιασμένο με τις ακόλουθες πράξεις

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) + (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) = (\vec{v}_1 + \vec{u}_1, \vec{v}_2 + \vec{u}_2, \dots, \vec{v}_m + \vec{u}_m)$$

$$\lambda(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = (\lambda\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \dots, \lambda\vec{v}_m)$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} .

Άσκηση 23. Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$ είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} . Θεωρούμε τον \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m$ και ορίζουμε μια απεικόνιση

$$f : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_m$$

- (1) Ναδειχθεί ότι η f είναι γραμμική.
- (2) Ποιά είναι η εικόνα $\text{Im}(f)$ της f ;
- (3) Ναδειχθεί ότι η f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ.
- (4) Ναδειχθεί ότι η f είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$.
- (5) Ναδειχθεί ότι η f είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$.

Λύση. (1) Έστω $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m), (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε:

$$\begin{aligned} f((\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)) &= f(\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2, \dots, \vec{x}_m + \vec{y}_m) \\ &= (\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2) + \dots + (\vec{x}_m + \vec{y}_m) \\ &= (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_m) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \dots + \vec{y}_m) \\ &= f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) + f(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f(\lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m)) &= f(\lambda\vec{x}_1, \lambda\vec{x}_2, \dots, \lambda\vec{x}_m) \\ &= \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 + \dots + \lambda\vec{x}_m \\ &= \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_m) \\ &= \lambda f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) \end{aligned}$$

Επομένως, η f είναι γραμμική απεικόνιση.

(2) Η εικόνα $\text{Im}(f)$ της f είναι

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \exists (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m : f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = \vec{x}\} \\ &= \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \exists (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m : \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_m = \vec{x}\} \\ &= \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_m \in \mathcal{E} \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq m\} \\ &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m \end{aligned}$$

(3) Έστω ότι η f είναι μονομορφισμός. Θα δείξουμε ότι για το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$ ισχύει η μοναδικότητα της γραφής. Έστω $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_m = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \dots + \vec{y}_m$ όπου $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in \mathcal{V}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{y}_m \in \mathcal{V}_m$. Τότε:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_m = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \dots + \vec{y}_m \implies f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = f(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m) \xrightarrow{f:1-1} \implies$$

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m) \implies \vec{x}_i = \vec{y}_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

Επομένως το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ.

Αντίστροφα, έστω ότι το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ, και έστω $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = f(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$, δηλαδή $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_m = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \dots + \vec{y}_m$ όπου $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in \mathcal{V}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{y}_m \in \mathcal{V}_m$. Τότε λόγω της μοναδικότητας της γραφής, έπεται άμεσα ότι $\vec{x}_i = \vec{y}_i, 1 \leq i \leq m$, και άρα $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$. Επομένως η f είναι μονομορφισμός.

(4) Επειδή από το μέρος (2) έχουμε $\text{Im}(f) = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$, έπεται ότι η απεικόνιση f είναι επιμορφισμός, δηλαδή $\text{Im}(f) = \mathcal{E}$, αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$.

(5) Έστω ότι η f είναι ισομορφισμός. Τότε αφού η f είναι μονομορφισμός έπεται από το (3) ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ. Επίσης, η f είναι επιμορφισμός και άρα από το μέρος (4) έπεται ότι $\mathcal{E} = \text{Im}(f) = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$. Συνεπώς θα έχουμε $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$.

Αντίστροφα, αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$ τότε επειδή το άθροισμα $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ, από το μέρος (3) έπεται ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι μονομορφισμός. Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$ από το μέρος (4) έπεται ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι επιμορφισμός. Επομένως, η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομορφισμός. \square

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει ένα αντίστροφο του βασικού ισχυρισμού της προηγούμενης Άσκησης.

Άσκηση 24. Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m$$

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$, θέτουμε:

$$\mathcal{V}'_i = \left\{ \underbrace{(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0})}_{i\text{-θέση}} \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_i \in \mathcal{V}_i \right\}$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{V}'_i, 1 \leq i \leq m$, είναι υπόχωροι του \mathcal{E} και ισχύει ότι:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$$

Λύση. Προφανώς $\vec{0}_{\mathcal{E}} = (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{0}) \in \mathcal{V}'_i$. Έστω $(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0})$ και $(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{y}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0})$ δύο στοιχεία του \mathcal{V}'_i και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε:

$$\begin{aligned} (\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0}) + (\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{y}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0}) &= (\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{x}_i + \vec{y}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0}) \in \mathcal{V}'_i \\ \lambda(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0}) &= (\vec{0}, \dots, \vec{0}, \lambda\vec{x}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0}) \in \mathcal{V}'_i \end{aligned}$$

Άρα τα υποσύνολα $\mathcal{V}'_i, 1 \leq i \leq m$, είναι υπόχωροι του \mathcal{E} .

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m$. Τότε $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m)$, όπου $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq m$. Προφανώς θα έχουμε:

$$\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) = (\vec{x}_1, \vec{0}, \dots, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{x}_2, \dots, \vec{0}) + \dots + (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{x}_m)$$

Επειδή $(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0}) \in \mathcal{V}'_i, 1 \leq i \leq m$, από την παραπάνω σχέση έπεται άμεσα ότι $\vec{x} \in \mathcal{V}'_1 + \mathcal{V}'_2 + \dots + \mathcal{V}'_m$ και επομένως:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}'_1 + \mathcal{V}'_2 + \dots + \mathcal{V}'_m \quad (\dagger)$$

Έστω $\vec{x}'_1 + \vec{x}'_2 + \dots + \vec{x}'_n = \vec{0}_{\mathcal{E}} = (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{0})$, όπου $\vec{x}'_i \in \mathcal{V}'_i, 1 \leq i \leq m$. Τότε θα έχουμε $\vec{x}'_i = (\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0})$, για κάποιο $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i$, και επομένως:

$$\begin{aligned} \vec{x}'_1 + \vec{x}'_2 + \dots + \vec{x}'_n &= (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{0}) \implies (\vec{x}_1, \vec{0}, \dots, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{x}_2, \dots, \vec{0}) + \dots + (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{x}_m) = (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{0}) \\ \implies (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) &= (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{0}) \implies \vec{x}_i = \vec{0}, 1 \leq i \leq m, \implies \vec{x}'_i = \vec{0}, 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με γνωστή Πρόταση, θα έχουμε ότι το άθροισμα $\mathcal{V}'_1 + \mathcal{V}'_2 + \dots + \mathcal{V}'_m$ είναι ευθύ:

$$\mathcal{V}'_1 + \mathcal{V}'_2 + \dots + \mathcal{V}'_m = \mathcal{V}'_1 \oplus \mathcal{V}'_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}'_m \quad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις (\dagger) και $(\dagger\dagger)$ έπεται το ζητούμενο: $\mathcal{E} = \mathcal{V}'_1 \oplus \mathcal{V}'_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}'_m$. \square

Άσκηση 25. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι \mathbb{K} -διανυσματικοί χώροι πεπεραμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι η f είναι επιμορφισμός.

(1) Να δειχθεί ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$.

(2) Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$$

Λύση. (1) Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του πυρήνα $\text{Ker}(f)$ της f την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n\}$ του \mathcal{E} . Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C} = \{\vec{e}_{k+1} = f(\vec{e}_{k+1}), \vec{e}_{k+2} = f(\vec{e}_{k+2}), \dots, \vec{e}_n = f(\vec{e}_n)\}$ είναι μια βάση της εικόνας $\text{Im}(f)$ της f . Επειδή η γραμμική απεικόνιση f είναι επιμορφισμός, έπεται ότι $\text{Im}(f) = \mathcal{F}$ και επομένως το σύνολο \mathcal{C} είναι μια βάση του \mathcal{F} . Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $g(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$, $k+1 \leq i \leq n$. Δηλαδή αν $\vec{y} = \lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{e}_{k+2} + \dots + \lambda_n\vec{e}_n$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα του \mathcal{F} , εκφρασμένο μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης \mathcal{C} , τότε:

$$g(\vec{y}) = \lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{e}_{k+2} + \dots + \lambda_n\vec{e}_n$$

Προφανώς τότε θα έχουμε, $\forall \vec{y} = \lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{e}_{k+2} + \dots + \lambda_n\vec{e}_n \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\vec{y}) &= f(g(\vec{y})) = f(\lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{e}_{k+2} + \dots + \lambda_n\vec{e}_n) = \\ &= \lambda_{k+1}f(\vec{e}_{k+1}) + \lambda_{k+2}f(\vec{e}_{k+2}) + \dots + \lambda_n f(\vec{e}_n) = \lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{e}_{k+2} + \dots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{y} \end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$$

(2) Έστω $\vec{y} \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε: $g(\vec{y}) = \vec{x}$. Εφαρμόζοντας την f στην τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας ότι $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$, θα έχουμε:

$$g(\vec{y}) = \vec{x} \implies f(g(\vec{y})) = f(\vec{x}) \implies \vec{y} = \vec{0} \implies \vec{x} = g(\vec{y}) = \vec{0}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) = \{\vec{0}\} \implies \text{Ker}(f) + \text{Im}(g) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) \quad (\dagger)$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε

$$\vec{x} = \vec{x} - g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{x}))$$

όπου προφανώς $g(f(\vec{x})) \in \text{Im}(g)$ και $\vec{x} - g(f(\vec{x})) \in \text{Ker}(f)$ διότι $f(\vec{x} - g(f(\vec{x}))) = f(\vec{x}) - f(g(f(\vec{x}))) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}$. Επομένως $\vec{x} \in \text{Ker}(f) + \text{Im}(g)$ και άρα:

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f) + \text{Im}(g) \quad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις (\dagger) και $(\dagger\dagger)$ έπεται η ζητούμενη σχέση: $\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$. \square

Άσκηση 26. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι \mathbb{K} -διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι η f είναι μονομορφισμός.

(1) Ναδειχθεί ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $h \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

(2) Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\cong} \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(h)$$

Λύση. Επειδή η f είναι μονομορφισμός, έπεται ότι η f επάγει έναν ισομορφισμό

$$f': \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \text{Im}(f), \quad f'(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Ιδιαίτερα προκύπτει ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$.

(1) Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του \mathcal{E} . Τότε επειδή η απεικόνιση f είναι μονομορφισμός, έπεται ότι το σύνολο $\{\vec{e}_1 = f(\vec{e}_1), \vec{e}_2 = f(\vec{e}_2), \dots, \vec{e}_k = f(\vec{e}_k)\}$ είναι μια βάση της εικόνας $\text{Im}(f)$ της f την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n\}$ του \mathcal{F} . Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$h(\vec{e}_i) = \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \text{και} \quad h(\vec{e}_i) = \vec{0}, \quad k+1 \leq i \leq n$$

Δηλαδή αν $\vec{y} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_k\vec{e}_k + \lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{e}_{k+2} + \dots + \lambda_n\vec{e}_n$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα του \mathcal{F} , εκφρασμένο μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης \mathcal{B} , τότε:

$$h(\vec{y}) = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_k\vec{e}_k$$

Προφανώς τότε θα έχουμε, $\forall \vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_k\vec{e}_k \in \mathcal{E}$:

$$(h \circ f)(\vec{x}) = h(f(\vec{x})) = h(\lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(\vec{e}_2) + \dots + \lambda_k f(\vec{e}_k)) = h(\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_k\vec{e}_k) =$$

$$= h(\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{e}_k + 0\vec{e}_{k+1} + \cdots + 0\vec{e}_n) = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{e}_k = \vec{x}$$

Επομένως θα έχουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$h \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$$

(2) Έστω $\vec{y} \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(h)$. Τότε $h(\vec{y}) = \vec{0}$ και υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Τότε:

$$h(f(\vec{x})) = h(\vec{y}) \implies \vec{x} = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(h) = \{\vec{0}\} \implies \text{Im}(f) + \text{Ker}(h) = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(h) \quad (*)$$

Έστω $\vec{y} \in \mathcal{F}$. Τότε

$$\vec{y} = \vec{y} - f(h(\vec{y})) + f(h(\vec{y}))$$

όπου προφανώς $f(h(\vec{y})) \in \text{Im}(f)$ και $\vec{y} - f(h(\vec{y})) \in \text{Ker}(h)$ διότι $h(\vec{y} - f(h(\vec{y}))) = h(\vec{y}) - h(f(h(\vec{y}))) = h(\vec{y}) - h(\vec{y}) = \vec{0}$. Επομένως $\vec{y} \in \text{Im}(f) + \text{Ker}(h)$ και άρα:

$$\mathcal{F} = \text{Im}(f) + \text{Ker}(h) \quad (**)$$

Από τις σχέσεις (*) και (**) έπεται η ζητούμενη σχέση: $\mathcal{F} = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(h)$. \square

Άσκηση 27. Έστω $A \in M_2(\mathbb{K})$ ένας 2×2 -πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη-μηδενικές στήλες $X, Y \in \mathbb{K}_2$ έτσι ώστε:

$$AX = X \quad \text{και} \quad AY = -Y$$

Να βρεθεί ο πίνακας A^{2018} .

Λύση. Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο στηλών $\mathcal{C} = \{X, Y\}$ είναι μια βάση του \mathbb{K}_2 . Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι οι στήλες X, Y είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω

$$\lambda X + \mu Y = 0 \quad (*)$$

Τότε

$$A(\lambda X + \mu Y) = 0 \implies \lambda AX + \mu AY = 0 \implies \lambda X - \mu Y = 0 \quad (**)$$

Προσθέτοντας τις (*) και (**) προκύπτει ότι $2\lambda X = 0$ και επειδή $X \neq 0$, έπεται ότι $\lambda = 0$. Τότε από την (*) προκύπτει ότι $\mu Y = 0$ και επειδή $Y \neq 0$, έχουμε $\mu = 0$. Άρα πράγματι το σύνολο στηλών \mathcal{C} είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του χώρου των στηλών \mathbb{K}_2 .

Θεωρούμε την επαγόμενη γραμμική απεικόνιση

$$f_A: \mathbb{K}_2 \longrightarrow \mathbb{K}_2, \quad f_A(Z) = AZ$$

της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι ο

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A$$

Προφανώς ο πίνακας της f_A στη βάση \mathcal{C} είναι ο

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επομένως οι πίνακες A και $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι διότι είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης f_A σε διαφορετικές βάσεις του \mathbb{K}_2 . Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Από την τελευταία σχέση, εύκολα βλέπουμε με επαγωγή ότι :

$$\forall n \geq 1 : A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \quad (\dagger)$$

(1) Αν ο n είναι άρτιος, τότε :

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P I_2 P^{-1} = P P^{-1} = I_2$$

(2) Αν ο n είναι περιττός, τότε ο $n - 1$ είναι άρτιος και άρα από το (1) έπεται ότι $A^{n-1} = I_2$ από όπου προφανώς έχουμε $A^n = A$.

Συνοψίζουμε :

$$A^n = \begin{cases} I_2, & \text{αν } n : \text{άρτιος} \\ A, & \text{αν } n : \text{περιττός} \end{cases}$$

Ιδιαίτερα έπεται ότι :

$$A^{2018} = I_2 \quad \square$$