ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II

ΤΜΗΜΑ $\mathbf{B'}$ (Μ-Ω)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 10 Μαρτίου 2023

Άσκηση 1. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Έστω $\vec{x}$ και $\vec{y}$ δύο ιδιοδιανύσματα του f τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του f. Αν $a, b \in \mathbb{K}$ και $ab \neq 0$, να δείξετε ότι το διάνυσμα $a\vec{x} + b\vec{y}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της f.*

Λύση. Υποθέτουμε αντίθετα ότι το $a\vec{x} + b\vec{y}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί σε κάποια ιδιοτιμή μ της f. Από την υπόθεση τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι δύο ιδιοδιανύσματα της f που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές κ και λ αντίστοιχα, με $\kappa \neq \lambda$. Όπως γνωρίζουμε αυτό σημαίνει ότι τα διανυσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επειδή $ab \neq 0$, θα έχουμε $a \neq 0 \neq b$, και τότε:

$$
\begin{aligned}
& f(a\vec{x} + b\vec{y}) = \mu(a\vec{x} + b\vec{y}) \\
\Longrightarrow\ & af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = a\mu\vec{x} + b\mu\vec{y} \\
\Longrightarrow\ & a\kappa\vec{x} + b\lambda\vec{y} = a\mu\vec{x} + b\mu\vec{y} \\
\Longrightarrow\ & (a\kappa - a\mu)\vec{x} + (b\lambda - b\mu)\vec{y} = 0 && (\vec{x}, \vec{y}: \text{ γραμμικά ανεξάρτητα}) \\
\Longrightarrow\ & a(\kappa - \mu) = 0 \ \text{ και } \ b(\lambda - \mu) = 0 && (a \neq 0 \neq b) \\
\Longrightarrow\ & \kappa - \mu = 0 \ \text{ και } \ \lambda - \mu = 0 \\
\Longrightarrow\ & \kappa = \mu = \lambda
\end{aligned}
$$

Άρα καταλήξαμε σε άτοπο αφού γνωρίζουμε ότι $\kappa \neq \lambda$. Συνεπώς το διάνυσμα $a\vec{x} + b\vec{y}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της f. □

Ένας ενδομορφισμός $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ καλείται **ομοθεσία με λόγο** λ, όπου $\lambda \in \mathbb{K}$, αν:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E} : \quad f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

δηλαδή $f = \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. Προφανώς για μια ομοθεσία $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ με λόγο λ, κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Άσκηση 2. *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$.*

(1) *Αν ο ενδομορφισμός f είναι ομοθεσία με λόγο λ, τότε το λ είναι η μόνη ιδιοτιμή του f και κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.*

(2) *Αν κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f, να δειχθεί ότι η f είναι ομοθεσία.*

Λύση. (1) Επειδή $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, έπεται ότι το λ είναι ιδιοτιμή του f και κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Αν $\kappa \in \mathbb{K}$ είναι επίσης μια ιδιοτιμή του f με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$, τότε $\vec{x} \neq \vec{0}$ και θα έχουμε $f(\vec{x}) = \kappa\vec{x}$. Επειδή $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, έπεται ότι $\kappa\vec{x} = \lambda\vec{x}$, δηλαδή $(\lambda - \kappa)\vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $\vec{x} \neq \vec{0}$ έπεται ότι $\kappa = \lambda$. Άρα το λ είναι η μόνη ιδιοτιμή του f.

(2) Αν κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f, τότε για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, υπάρχει αριθμός $\lambda_{\vec{x}} \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\, \vec{x}$$

Έστω $\vec{x}$ και $\vec{y}$ δύο μη-μηδενικά διανύσματα του $\mathcal{E}$. Τότε θα έχουμε

$$f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\, \vec{x} \qquad \text{και} \qquad f(\vec{y}) = \lambda_{\vec{y}}\, \vec{y}$$

Θα δείξουμε ότι: $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α΄) Τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Τότε υπάρχει $\kappa \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $\vec{y} = \kappa\vec{x}$. Τότε:

$$f(\vec{y}) = \lambda_{\vec{y}}\, \vec{y} \quad \text{και} \quad f(\vec{y}) = f(\kappa\vec{x}) = \kappa f(\vec{x}) = \kappa\lambda_{\vec{x}}\vec{x} = \lambda_{\vec{x}}\kappa\vec{x} = \lambda_{\vec{x}}\vec{y} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_{\vec{y}}\, \vec{y} = \lambda_{\vec{x}}\, \vec{y} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (\lambda_{\vec{y}} - \lambda_{\vec{x}})\, \vec{y} = \vec{0} \quad \overset{\vec{y}\neq\vec{0}}{\Longrightarrow} \quad \lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$$

(β΄) Τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Τότε θα έχουμε και το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y}$ το οποίο είναι μη-μηδενικό, διότι αν $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, τότε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και αυτό είναι άτοπο. Από την υπόθεση τότε υπάρχει αριθμός $\lambda_{\vec{x}+\vec{y}} \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $f(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\, (\vec{x} + \vec{y})$. Συνοψίζοντας, υπάρχουν αριθμοί $\lambda_{\vec{x}}$, $\lambda_{\vec{y}}$, $\lambda_{\vec{x}+\vec{y}} \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\, \vec{x}, \qquad f(\vec{y}) = \lambda_{\vec{y}}\, \vec{y}, \qquad f(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\, (\vec{x}+\vec{y})$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\, \vec{x} + \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\, \vec{y} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_{\vec{x}}\, \vec{x} + \lambda_{\vec{y}}\, \vec{y} = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\, \vec{x} + \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\, \vec{y} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \big(\lambda_{\vec{x}} - \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\big)\vec{x} + \big(\lambda_{\vec{y}} - \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\big)\vec{y} = \vec{0}$$

Από την γραμμική ανεξαρτησία των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ έπεται ότι:

$$\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}} = \lambda_{\vec{y}}$$

Άρα ο αριθμός $\lambda_{\vec{x}} \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\, \vec{x}$, για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x}$ είναι κοινός για όλα τα μη-μηδενικά διανύσματα. Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι υπάρχει ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \lambda\, \vec{x}$, για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Αν $\vec{x} = \vec{0}$, τότε προφανώς $f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda\, \vec{0}$. Άρα $f(\vec{x}) = \lambda\, \vec{x}$, για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, και επομένως ο f είναι ομοθεσία με λόγο λ. □

Άσκηση 3. (1) *Αν A και B είναι δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, τότε:*

$$\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA)$$

(2) *Να δειχθεί ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.*

(3) *Να δειχθεί ότι αν A και B είναι 2×2 πίνακες, τότε*[1] *οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$.*

(4) *Αν ο πίνακας A ή ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι, και άρα:*

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$

(5) *Να δειχθεί ότι αν A και B είναι $n \times n$ πίνακες, τότε γενικά οι πίνακες AB και BA δεν είναι όμοιοι.*

(6) *Να δειχθεί ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

[1] Αποδεικνύεται γενικότερα ότι για τυχόντες $n \times n$ πίνακες A και B, οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$.

Λύση. (1) Γνωρίζουμε ότι το στοιχείο στην (i,i) θέση του πίνακα AB, $1 \leq i \leq n$, είναι το εξής:

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ik}$$

Επομένως:

$$\mathsf{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \tag{†}$$

Παρόμοια, το στοιχείο στην (k,k) θέση του πίνακα BA, $1 \leq k \leq n$, είναι το εξής:

$$(BA)_{kk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$$

Επομένως:

$$\mathsf{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \tag{††}$$

Από τις σχέσεις (†) και (††) έπεται ότι: $\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA)$.

(2) Έστω A και B δύο όμοιοι πίνακες. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε: $P^{-1}AP = B$. Χρησιμοποιώντας το μέρος (1), θα έχουμε:

$$\mathsf{Tr}(B) = \mathsf{Tr}(P^{-1}AP) = \mathsf{Tr}((P^{-1}A)P) = \mathsf{Tr}(P(P^{-1}A)) = \mathsf{Tr}((P^{-1}P)A) = \mathsf{Tr}(I_n A) = \mathsf{Tr}(A)$$

Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από το γεγονός ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

(3) Από το μέρος (1), έχουμε $\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA)$. Επειδή προφανώς $|AB| = |BA|$, έπεται ότι

$$P_{AB}(t) = t^2 - \mathsf{Tr}(AB) + |AB| = t^2 - \mathsf{Tr}(BA) + |BA| = P_{BA}(t)$$

(4) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1} και τότε:

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = I_n BA = BA$$

και αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι. Παρόμοια εργαζόμαστε αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος.

(5) Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \quad \text{και} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{O}$$

Αν οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε: $P^{-1}ABP = BA = \mathsf{O}$ και τότε πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με τον P και από τα δεξιά με τον P^{-1} προκύπτει ότι $AB = \mathsf{O}$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα οι πίνακες AB και BA δεν είναι όμοιοι.

(6) Έστω λ μια ιδιοτιμή του AB με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X. Τότε $X \neq O$ και $(AB)X = \lambda X$.

(α΄) Αν $\lambda = 0$, τότε[2] $0 = |AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$ και επομένως το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα BA.

(β΄) Αν $\lambda \neq 0$, τότε:

$$(AB)X = \lambda X \implies B(AB)X = B(\lambda X) \implies (BA)(BX) = \lambda(BX)$$

Αν $BX = O$, τότε $ABQ = 0$ και επομένως $\lambda X = O$. Επειδή $X \neq O$, έπεται ότι $\lambda = 0$, δηλαδή το 0 είναι ιδιοτιμή του AB και αυτό είναι άτοπο. Άρα $BX \neq O$ και επομένως το μη-μηδενικό διάνυσμα-στήλη BX είναι ιδιοδιάνυσμα του BA με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ.

Έτσι δείξαμε ότι κάθε ιδιοτιμή του AB είναι ιδιοτιμή του BA. Παρόμοια προκύπτει ότι κάθε ιδιοτιμή του BA είναι ιδιοτιμή του AB. Άρα οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. $\square$

[2] Υπενθυμίζουμε ότι το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα M αν και μόνο αν ο πίνακας M δεν είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $|M| = 0$.

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων. Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;

Λύση. Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ 0 & -1-t & 2 \\ 0 & -3 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} -1-t & 2 \\ -3 & 4-t \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ πολλαπλότητας δύο και $\lambda_2 = 2$ πολλαπλότητας ένα.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(1)$ λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Από τις εξισώσεις $-3y + 3z = 0$ και $-2y + 2z = 0$ έπεται ότι $y = z$. Επομένως

$$\mathcal{V}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τσύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελεί βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(1)$. Ιδιαίτερα βλέπουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = 2 =$ πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(2)$ έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\begin{cases} -x - 3y + 3z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{3}z \quad \Longrightarrow \quad x = 3z - 3\frac{2}{3}z = z$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\mathcal{V}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = \frac{2}{3}x, z = x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Άρα μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(2)$ είναι το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Ιδιαίτερα βλέπουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 1 =$ πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$.

Από γνωστό κριτήριο, έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. $\square$

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον ενδομορφισμό του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$:*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y, x+y, y-z)$$

και τον ενδομορφισμό[3] *του $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^3$:*

$$f\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y, x+y, y-z)$$

(1) *Να βρεθούν και στις δυο περιπτώσεις, οι ιδιοτιμές του f καθώς και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι.*
(2) *Και στις δύο περιπτώσεις, να διαγωνοποιηθεί, αν αυτό είναι εφικτό, ο ενδομορφισμός f.*

Λύση. (1) Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y, x+y, y-z)$$

θεωρούμε την κανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$ του $\mathbb{R}^3$, και προσδιορίζουμε τον πίνακα $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ του f στη βάση $\mathcal{B}$. Έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (1,1,0) \\ f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (-1,1,1) \\ f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (0,0,-1) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f είναι

$$P_f(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 1 & -1-t \end{vmatrix} = (-1-t)\begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (-1-t)(t^2-2t+2)$$

Επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου t^2-2t+2 είναι αρνητική, ίση με -4, έπεται ότι το τριώνυμο t^2-2t+2 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως η μόνη ρίζα του $P_f(t)$ υπεράνω του $\mathbb{R}$ είναι η $\lambda = -1$ αλγεβρικής πολλαπλότητας ίσης με 1, και ο ενδομορφισμός f δεν διαγωνοποιείται.

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(-1)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = y = 0 \ \text{ και } \ z \in \mathbb{R}$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(-1) &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \ \text{ και } \ z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\big\}\rangle \\ &= \big\langle(0,0,1)\big\rangle \end{aligned}$$

και άρα το σύνολο $\{(0,0,1)\}$ αποτελεί βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(-1)$.

(2) Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y, x+y, y-z)$$

θεωρούμε την κανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$ του $\mathbb{C}^3$, και προσδιορίζουμε τον πίνακα $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ του f στη βάση $\mathcal{B}$. Έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (1,1,0) \\ f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (-1,1,1) \\ f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (0,0,-1) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

---

[3] Αν και πρόκειται για διαφορετικές απεικονίσεις, συμβολίζουμε χάριν απλότητας και στις δύο περιπτώσεις τους ενδομορφισμούς με το ίδιο σύμβολο, επειδή έχουν τον ίδιο τύπο ορισμού.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f είναι

$$P_f(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 1 & -1-t \end{vmatrix} = (-1-t)\begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (-1-t)(t^2-2t+2)$$

Επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $t^2 - 2t + 2$ είναι ίση με $-4 < 0$, και εργαζόμαστε υπεράνω του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, έπεται, από τον τύπο προσδιορισμού των ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης, ότι το τριώνυμο $t^2 - 2t + 2$ έχει δύο μιγαδικές ρίζες:

$$\lambda_2 = 1 + i \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 1 - i$$

Επομένως οι ρίζες του $P_f(t)$ υπεράνω του $\mathbb{C}$ είναι οι εξής:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 + i, \quad \lambda_3 = 1 - i$$

όλες με αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με 1. Επομένως από γνωστό Θεώρημα, ο ενδομορφισμός f διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathcal{C}$.

- Έχουμε ήδη προσδιορίσει μια βάση

$$\mathcal{C}_1 = \vec{\epsilon}_1 = (0,0,1)$$

για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(-1)$.

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(1+i)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2-(1+i) & -1 & 0 \\ 1 & 2-(1+i) & 0 \\ 0 & 1 & -(1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1-i & -1 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} (1-i)x - y = 0 \\ x + (1-i)y = 0 \\ y - (1+i)z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2z \\ y = (1+i)z \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ (1+i)z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(1+i) &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid \ \ x = -2z, \ y = (1+i)z, \ z \in \mathbb{C}\big\} \\ &= \big\{(-2z, (1+i)z, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z \in \mathbb{C}\big\} \\ &= \big\{z(-2, 1+i, 1) \in \mathbb{C}^3 \mid z \in \mathbb{C}\big\}\big\rangle \\ &= \big\langle(-2, 1+i, 1)\big\rangle \end{aligned}$$

και άρα το σύνολο

$$\mathcal{C}_2 = \big\{\vec{\epsilon}_2 = (-2, 1+i, 1)\big\}$$

αποτελεί βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(1+i)$.

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(1-i)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2-(1-i) & -1 & 0 \\ 1 & 2-(1-i) & 0 \\ 0 & 1 & -(1-i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} (1+i)x - y = 0 \\ x + (1+i)y = 0 \\ y + (-1+i)z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2z \\ y = (1-i)z \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ (1-i)z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(1-i) &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \mid \ \ x=-2z,\ \ y=(1-i)z,\ \ z\in\mathbb{C}\big\}\\ &= \big\{(-2z,(1-i)z,z)\in\mathbb{C}^3 \mid z\in\mathbb{C}\big\}\\ &= \big\{z(-2,1-i,1)\in\mathbb{C}^3 \mid z\in\mathbb{C}\big\}\big\rangle\\ &= \big\langle(-2,1-i,1)\big\rangle\end{aligned}$$

και άρα το σύνολο

$$\mathcal{C}_3=\big\{\vec{\epsilon}_3=(-2,1-i,1)\big\}$$

αποτελεί βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(1-i)$.

Τότε το σύνολο $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2\cup\mathcal{C}_3$, δηλαδή το σύνολο

$$\mathcal{C}=\big\{\vec{\epsilon}_1=(0,0,1),\ \ \vec{\epsilon}_2=(-2,1+i,1),\ \ \vec{\epsilon}_3=(-2,1-i,1)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{C}^3$ και ο πίνακας του f στη βάση $\mathcal{C}$ ο διαγώνιος πίνακας:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1+i&0\\0&0&1-i\end{pmatrix}$$ □

Άσκηση 6. *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα*

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\1&1&2\end{pmatrix}\ \in\ \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$

Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;

Λύση. Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Έχουμε:

$$P_A(t)=\begin{vmatrix}2-t&1&1\\2&3-t&2\\1&1&2-t\end{vmatrix}\xlongequal{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\begin{vmatrix}5-t&5-t&5-t\\2&3-t&2\\1&1&2-t\end{vmatrix}=(5-t)\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3-t&2\\1&1&2-t\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\Sigma_3\to\Sigma_3-\Sigma_1]{\Sigma_2\to\Sigma_2-\Sigma_1}(5-t)\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1-t&0\\1&0&1-t\end{vmatrix}=(5-t)(1-t)^2$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=5$ πολλαπλότητας ένα και $\lambda_2=1$ πολλαπλότητας δύο.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(5)$ λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{pmatrix}-3&1&1\\2&-2&2\\1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}-3x+y+z=0\\2x-2y+2z=0\\x+y-3z=0\end{cases}$$

Έχουμε:

$$\begin{pmatrix}-3&1&1\\2&-2&2\\1&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&-2&2\\-3&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3+3\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&-4&8\\0&4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&-4&8\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Από τις εξισώσεις $x+y-3z=0$ και $-4y+8z=0$ έπεται ότι $x=z$ και $y=2z$. Επομένως

$$\mathcal{V}(5)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_3 \mid x=z\ \text{ και }\ y=2z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}z\\2z\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_3 \mid z\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

και άρα το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ αποτελεί μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(5)$.

• Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(1)$ έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \implies x = -y - z$$

και άρα

$$\mathcal{V}(1) = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x = -y - z\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-y-z\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y, z \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Προφανώς τα διανύσματα-στήλες $\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(1)$.

Επειδή για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 5$ έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(5) = 1 =$ αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 5$, και ια την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = 2 =$ αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$, έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. □

Άσκηση 7. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 2\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Είναι ο πίνακας διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του σώματος $\mathbb{C}$, όταν θεωρηθεί ως πίνακας μιγαδικών αριθμών;*

Λύση. (1) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix}1-t & 2 & -1\\ 1 & -t & 1\\ 4 & -4 & 2-t\end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - t + 6)$$

Η μόνη πραγματική ιδιοτιμή είναι η $\lambda_1 = 2$ διότι το πολυώνυμο $t^2 - t + 6$ έχει αρνητική διακρίνουσα, ίση με -23. Επομένως ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{R}$.

• Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(2)$, θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - 2I_3)X = \mathsf{O} \implies \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & -4 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \implies \begin{cases}-x + 2y - z = 0\\ x - 2y + z = 0\\ 4x - 4y = 0\end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases}x - 2y + z = 0\\ x = y\end{cases} \implies \begin{cases}y = z\\ x = y\end{cases} \implies X = \begin{pmatrix}x\\ x\\ x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Επομένως

$$\mathcal{V}(2) = \left\{x\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$$

(2) Υπεράνω του σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A γράφεται ως:

$$P_A(t) = (2-t)(t^2 - t + 6) = -(t-2)\left(t - \frac{1 + i\sqrt{23}}{2}\right)\left(t - \frac{1 - i\sqrt{23}}{2}\right)$$

και επομένως ο πίνακας A, υπεράνω του $\mathbb{C}$, έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{23}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{23}}{2}$$

και επομένως είναι διαγωνοποιήσιμος. □

Άσκηση 8. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του ενδομορφισμού*

$$f\colon \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t], \quad P(t) \longmapsto f(P(t)) = P(t) - P'(t)$$

Είναι διαγωνοποιήσιμος ο ενδομορφισμός f;

Λύση. Ο πίνακας του f στην κανονική βάση $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ του $\mathbb{R}_2[t]$ είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{cases} f(1) = 1 - 0 = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 \\ f(t) = t - 1 = (-1)\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2 \\ f(t^2) = t^2 - 2t = 0\cdot 1 + (-2)\cdot t + 1\cdot t^2 \end{cases} \implies A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f είναι

$$P_f(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ 0 & 1-t & -2 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^3$$

Άρα ο f έχει ως μόνη ιδιοτιμή την $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα τρία.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(1)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies b = c = 0 \ \text{ και } \ a \in \mathbb{R}$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(1) &= \{a + bt + ct^2 \in \mathbb{R}_2[t] \mid b = c = 0 \ \text{ και } \ a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle 1 \rangle \end{aligned}$$

και άρα βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(1)$ αποτελούν τα σταθερά πολυώνυμα και ιδιαίτερα $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = 1$.

Επειδή για τη μόνη ιδιοτιμή $\lambda = 1$ έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = 1 \neq 3 =$ αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 1$, έπεται ότι ο ενδομορφισμός f δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. □

Άσκηση 9. *Αν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός ενδομορφισμού $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ή ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, να δείξετε ότι το λ^m είναι ιδιοτιμή του ενδομορφισμού f^m ή του πίνακα A^m αντίστοιχα, $\forall m \geq 1$. Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_f(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{f^m}(\lambda^m)$ ή των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_A(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{A^m}(\lambda^m)$ αντίστοιχα;*

Λύση. Έστω λ μια ιδιοτιμή του ενδομορφισμού $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Τότε υπάρχει διάνυσμα $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, και θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f^2(\vec{x}) &= f(f(\vec{x})) \\ &= f(\lambda\vec{x}) \\ &= \lambda f(\vec{x}) \\ &= \lambda\lambda\vec{x} \\ &= \lambda^2\vec{x} \end{aligned}$$

Επειδή $\vec{x} \neq \vec{0}$, ο αριθμός λ^2 είναι ιδιοτιμή της f^2. Δείχνουμε με επαγωγή στο n ότι για κάθε $m \geq 1$ ισχύει ότι $f^m(\vec{x}) = \lambda^m\vec{x}$. Υποθέτουμε ότι αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $k < m$, δηλαδή

$$1 \leq k < m: \qquad f^k(\vec{x}) = \lambda^k\vec{x} \tag{†}$$

Τότε θα έχουμε:

$$f^m(\vec{x}) = f(f^{m-1}(\vec{x})) \overset{(\dagger)}{=} f(\lambda^{m-1}\vec{x}) = \lambda^{m-1}f(\vec{x}) = \lambda^{m-1}\lambda\vec{x} = \lambda^m\vec{x} \qquad (*)$$

Άρα πράγματι $f^m(\vec{x}) = \lambda^m\vec{x}$. Επειδή το $\vec{x} \neq \vec{0}$, έπεται ότι ο αριθμός λ^m είναι ιδιοτιμή του f^m με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_f(\lambda)$, δηλαδή $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Τότε $f^m(\vec{x}) = \lambda^m\vec{x}$ και άρα το διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}_{f^m}(\lambda^m)$. Επομένως: $\mathcal{V}_f(\lambda) \subseteq \mathcal{V}_{f^m}(\lambda^m)$.

Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε τα αντίστοιχα συμπεράσματα προκύπτουν με χρήση του ενδομορφισμού

$$f_A\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = AX$$

και χρησιμοποιώντας ότι:

$$f_A^m = f_{A^m}$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει με επαγωγή ως εξής: Υποθέτουμε ότι:

$$1 \le k < m: \qquad f_A^k = f_{A^k} \qquad (\dagger\dagger)$$

δηλάδή, $\forall X \in \mathbb{K}_n$: $f_A^k(X) = f_{A^k}(X) = A^kX$. Τότε θα έχουμε, $\forall X \in \mathbb{K}_n$:

$$f_A^m(X) = f_A(f_A^{m-1}(X)) \overset{(\dagger\dagger)}{=} f_A(A^{m-1}X) = A(A^{m-1}X) = A^mX = f_{A^m}(X) \quad \Longrightarrow \quad f_A^m = f_{A^m}$$

Άρα $f_A^m = f_{A^m}$, $\forall m \geq 1$.

Επομένως αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X, τότε $f_A(X) = AX = \lambda X$. Σύμφωνα με ότι έχουμε ήδη αποδείξει για ενδομορφισμούς, προκύπτει ότι το λ^m είναι ιδιοτιμή του f_{A^m} με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X, δηλαδή $f_{A^m}(X) = A^mX = \lambda^mX$, και άρα το λ^m είναι ιδιοτιμή του A^m με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X. Τέλος όπως και παραπάνω έχουμε μια σχέση έγκλεισης: $\mathcal{V}_A(\lambda) \subseteq \mathcal{V}_{A^m}(\lambda)$. $\square$

Άσκηση 10. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, και $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας. Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός f, αντίστοιχα ο πίνακας A, είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν για κάθε ιδιοτιμή λ του f, αντίστοιχα του A, ισχύει ότι: $\lambda \neq 0$.*

(1) *Αν ο f είναι ισομορφισμός, να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
   (α΄) *Το $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του f.*
   (β΄) *$\lambda \neq 0$ και το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του f^{-1}.*
   Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_f(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$;

(2) *Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
   (α΄) *Το $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του A.*
   (β΄) *$\lambda \neq 0$ και το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.*
   Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_A(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$;

Λύση. Έστω λ μια ιδιοτιμή της f. Τότε υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Αν $\lambda = 0$, τότε θα έχουμε $f(\vec{x}) = 0\vec{x} = \vec{0}$ και άρα $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Αυτό είναι άτοπο διότι ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός και άρα $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Επομένως $\lambda \neq 0$. Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε ιδιοτιμή λ του f, ισχύει: $\lambda \neq 0$. Αν $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $f(\vec{x}) = \vec{0} = 0\vec{x}$ και επομένως το 0 είναι ιδιοτιμή του f με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση και επομένως $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Άρα ο f είναι μονομορφισμός και επομένως ο f είναι ισομορφισμός διότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$.

Παρόμοια δείχνουμε τον ισχυρισμό για τον πίνακα A χρησιμοποιώντας τοβ ενδομορφισμό $f_A\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n$, $f_A(X) = AX$.

(1) • (α΄) $\Longrightarrow$ (β΄) Έστω λ μια ιδιοτιμή της f. Επειδή ο f είναι ισομορφισμός, όπως είδαμε παραπάνω έχουμε $\lambda \neq 0$ και υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
Επειδή ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός υπάρχει ενδομορφισμός $f^{-1}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f \circ f^{-1} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f^{-1} \circ f$. Τότε:

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(f(\vec{x})) = f^{-1}(\lambda\vec{x}) \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \lambda f^{-1}(\vec{x}) \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(\vec{x}) = \lambda^{-1}\vec{x}$$

και άρα το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της f^{-1} με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\vec{x}$.

- (β') $\Longrightarrow$ (α') Αντίστροφα, αν $\lambda \neq 0$ και ο αριθμός λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του f^{-1} με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$, τότε

$$f^{-1}(\vec{x}) = \lambda^{-1}\vec{x} \quad\Longrightarrow\quad f(f^{-1}(\vec{x})) = f(\lambda^{-1}\vec{x}) \quad\Longrightarrow\quad \vec{x} = \lambda^{-1}f(\vec{x}) \quad\Longrightarrow\quad f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

Συνεπώς το λ είναι ιδιοτιμή του f με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\vec{x}$.

Τέλος, από τα παραπάνω έπεται άμεσα ότι

$$\mathcal{V}_f(\lambda) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f^{-1}(\vec{x}) = \lambda^{-1}\vec{x}\} = \mathcal{V}_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$$

(2) Εργαζόμαστε με τον ενδομορφισμό $f_A \colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n$, όπως στην προηγούμενη Άσκηση. □

Άσκηση 11. (1) *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Αν ο f είναι ισομορφισμός, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α') *Ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(β') *Ο f^{-1} είναι διαγωνοποιήσιμος.*
Επιπρόσθετα να δειχθεί ότι αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ στην οποία ο πίνακας του f είναι διαγώνιος, τότε ο πίνακας του f^{-1} στη βάση $\mathcal{B}$ είναι διαγώνιος. Ποιά είναι η σχέση των πινάκων $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ και $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$;

(2) *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α') *Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(β') *Ο A^{-1} είναι διαγωνοποιήσιμος.*
Επιπρόσθετα να δειχθεί ότι αν P είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος, τότε ο πίνακας $P^{-1}A^{-1}P$ είναι επίσης διαγώνιος. Ποιά είναι η σχέση των πινάκων $P^{-1}AP$ και $P^{-1}A^{-1}P$;

Λύση. (1) Έστω ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος. Έστω ότι $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του f, και έστω $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$ στην οποία ο πίνακας του f είναι διαγώνιος. Τότε $f(\vec{e}_i) = \lambda_i\vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$. Από την Άσκηση 10 έπεται ότι $\lambda_i \neq 0$, οι αριθμοί λ_i^{-1} είναι ιδιοτιμές του f^{-1}, και ισχύει ότι: $f^{-1}(\vec{e}_i) = \lambda^{-1}\vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$. Αυτό σημαίνει ότι ο f^{-1} είναι διαγωνοποιήσιμος διότι ο $\mathcal{E}$ έχει μια βάση η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f^{-1}. Επιπρόσθετα έχουμε:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$$

Αντίστροφα, αν ο f^{-1} είν αι διαγωνοποιήσιμος, τότε όπως μόλις δείξαμε θα έχουμε ότι ο $(f^{-1})^{-1} = f$ είναι διαγωνοποιήσιμος, και αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ στην οποία ο πίνακας του f^{-1} είναι διαγώνιος, τότε ο πίνακας του f στη βαση $\mathcal{B}$ είναι διαγώνιος και $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

(2) Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, και $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A, τότε $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, διότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \;\Longrightarrow\; (P^{-1}\,A\,P)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad P^{-1}\,A^{-1}\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} = (P^{-1}\,A\,P)^{-1}$$

□

Άσκηση 12. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$

Ακολούθως να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
Ποιά είναι η n-οστή δύναμη του πίνακα A;

Λύση. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 & -1 \\ 1 & 3-t & 1 \\ -1 & 1 & 3-t \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{vmatrix} 3-t & 1 & -1 \\ 1 & 3-t & 1 \\ 0 & 4-t & 4-t \end{vmatrix} = (4-t) \begin{vmatrix} 3-t & 1 & -1 \\ 1 & 3-t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3} (4-t) \begin{vmatrix} 3-t & 2 & -1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-t) \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = -(t-4)^2(t-1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 4$ πολλαπλότητας δύο και $\lambda_2 = 1$ πολλαπλότητας ένα.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(4)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = y - z$$

και άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(4) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x = y - z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και συνεπώς αποτελεί βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}(4)$.
Επομένως:

$$2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(4) = \text{αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_1 = 4 \tag{1}$$

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(1)$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \implies x = z \text{ και } y = -z$$

και άρα

$$\mathcal{V}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x = z \text{ και } y = -z \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως:

$$1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = \text{αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_2 = 1 \tag{2}$$

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Επομένως η ένωση των βάσων των ιδιοχώρων $\mathcal{V}(4)$ και $\mathcal{V}(1)$ είναι μια βάση

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του $\mathbb{R}_3$. Ο αντιστρέψιμος πίνακας P που ψάχνουμε είναι ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ από τη κανονική βάση $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ του $\mathbb{R}_3$ στη βάση $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Τότε άμεσα έχουμε:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, βρήκαμε αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{$\dagger$}$$

Εύκολα υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα του P:

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και τότε από τη σχέση ($\dagger$) έπεται ότι

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \implies A^n = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{2n+1}+1 & 2^{2n}-1 & -2^{2n}+1 \\ 2^{2n}-1 & 2^{2n+1}+1 & 2^{2n}-1 \\ -2^{2n}+1 & 2^{2n}-1 & 2^{2n+1}+1 \end{pmatrix}$$ □

Άσκηση 13. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$

Να βρεθεί ο πίνακας $A^m, \forall\, m \geq 1$.

Λύση. Έχουμε:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & -1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t)^2(4-t)$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ πολλαπλότητας δύο και $\lambda_2 = 4$ πολλαπλότητας ένα. Όπως στη προηγούμενη άσκηση, λύνοντας τα κατάλληλα ομογενή συστήματα, βρίσκουμε:

$$\mathcal{V}(2) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{V}(4) = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 2$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(4) = 1$ έπεται ότι ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Συνεπώς υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος. Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας P είναι ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση του χώρου των στηλών $\mathbb{R}_3$ στη βάση του $\mathbb{R}_3$ η οποία σχηματίζεται από τις στήλες των διανυσμάτων των βάσεων των ιδιοχώρων. Επομένως θα έχουμε:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Τότε

$$A = P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}P^{-1} \implies A^2 = P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\implies A^2 = P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}^2 P^{-1}$$

$$\vdots$$

$$\implies A^m = P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}^m P^{-1}$$

και άρα

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}^m\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 1 & 0\\-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^m & 0 & 0\\0 & 2^m & 0\\0 & 0 & 4^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 1 & 0\\-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \\ &\vdots \\ &\vdots \quad \text{(πράξεις)} \\ &\vdots \\ &= \begin{pmatrix}2^{m-1} + 2^{2m-1} & 0 & 2^{m-1} - 2^{2m-1}\\0 & 2^m & 0\\2^{m-1} - 2^{2m-1} & 0 & 2^{m-1} + 2^{2m-1}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 14. *Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 3 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 4 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος;

Λύση. Έχουμε:

$$P_A(t) = |A - tI_4| = \begin{vmatrix} 3-t & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 3-t & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 4-t & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 4-t \end{vmatrix} = (3-t)^2(4-t)^2$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 3$ πολλαπλότητας δύο και $\lambda_2 = 4$ πολλαπλότητας δύο. Για να διαγωνοποιείται ο πίνακας A θα πρέπει οι ιδιοτιμές του να ανήκουν στο $\mathbb{R}$, κάτι που προφανώς ισχύει, και:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(3) = 2 \quad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(4) = 2$$

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(3)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και επειδή

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(3) = 4 - \mathbf{r}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έπεται ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\,\mathcal{V}(3) = 2$ αν και μόνο αν η βαθμίδα

$$\mathbf{r}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Εύκολα κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του παραπάνω πίνακα (διαδικασία η οποία δεν αλλάζει τη βαθμίδα ενός πίνακα), έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathbf{r}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \iff \mathbf{r}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \iff \alpha = 0 \tag{1}$$

- Για τον ιδιόχωρο ιδιόχωρο $\mathcal{V}(4)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και άρα έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(4) = 2$ αν και μόνο αν η βαθμίδα

$$\mathbf{r}\begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες (διαδικασία η οποία δεν αλλάζει τη βαθμίδα ενός πίνακα), έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathbf{r}\begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff \mathbf{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff \zeta = 0 \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\textit{ο πίνακας } A \textit{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \iff \alpha = \zeta = 0$$ □

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$$

Να δειχθεί ότι: $A^{593} - 2A^{15} = -A$.

Λύση. Έχουμε:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} -2-t & 4 & 3 \\ 0 & -t & 0 \\ -1 & 5 & 2-t \end{vmatrix} = (-t)\begin{vmatrix} -2-t & 3 \\ -1 & 2-t \end{vmatrix} = (-t)(t-1)(t+1)$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = -1$, όλες πολλαπλότητας ένα. Άρα ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές και επομένως ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Με τη γνωστή διαδικασία εύκολα βρίσκουμε:

$$\mathcal{V}(0) = \left\langle \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{V}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{V}(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Συνεπώς υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A^{593} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{593} P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

και όμοια $A^{15} = A$. Άρα, έχουμε[4] :

$$A^{593} - 2A^{15} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} = -A \qquad \square$$

Άσκηση 16. *Βρείτε τις ιδιοτιμές καθώς και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{C})$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Αν ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος, τότε:*
  (α΄) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας μιγαδικών αριθμών P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.*
  (β΄) *Να βρεθεί ο πίνακας A^{2018}.*

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} -t & i & i \\ i & -t & i \\ i & i & -t \end{vmatrix} = -t^3 - 3t - 2i = -(t^3 + 3t + 2i)$$

Παρατηρούμε ότι

$$P_A(-i) = -\big((-i)^3 + 3(-i) + 2i\big) = -\big(i - 3i + 2i\big) = 0$$

Άρα το $-i$ είναι ρίζα του $P_A(t)$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$P_A(t) = -(t+i)(t^2 + at + b)$$

για κάποιους μιγαδικούς αριθμούς a, b. Μετά από πράξεις, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$-(t^3 + 3t + 2i) = -(t^3 + (a+i)t^2 + (b+ai)t + bi) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a + i = 0 \\ b + ai = 3 \\ bi = 2i \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = -i \\ b = 2 \end{cases}$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$P_A(t) = -(t+i)^2(t - 2i)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -i & \text{πολλαπλότητας } 2 \\ \lambda_2 = \ 2i & \text{πολλαπλότητας } 1 \end{cases}$$

έχουμε τις ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 2i$ απλή και $\lambda_2 = -i$ πολλαπλότητας δύο.

---

[4] **Β΄ τρόπος:** Από το Θεώρημα των Cauley-Hamilton το οποίο θα δούμε σε επόμενη ενότητα, έχουμε ότι ο πίνακας A μηδενίζεται από το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, δηλαδή $P_A(A) = 0$. Επομένως, επειδή $P_A(t) = -t^3 + t$, θα έχουμε:

$$-A^3 + A = 0 \implies A^3 = A$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} A^{593} &= A^{3\cdot197+2} = (A^3)^{197} \cdot A^2 = A^{197} \cdot A^2 = A^{199} = A^{3\cdot66+1} = A^{67} \\ &= A^{3\cdot22+1} = A^{23} = A^{3\cdot7+2} = A^9 = (A^3)^3 = A^3 = A \end{aligned}$$

και $A^{15} = (A^3)^5 = A^5 = A^{3\cdot1+2} = A^3 \cdot A^2 = A^3 = A$. Συνεπώς:

$$A^{593} - 2A^{15} = A - 2A = -A$$

- <u>Ο ιδιοχώρος</u> $\mathcal{V}(-i)$: Θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(-i) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid (A - (-i)I_3)X = \mathsf{O} \right\} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid (A + iI_3)X = \mathsf{O} \right\}$$

Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A + iI_3)X = \mathsf{O} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} i & i & i \\ i & i & i \\ i & i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad i(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Άρα θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(-i) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid x_3 = -x_1 - x_2 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επειδή προφανώς οι στήλες $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(-i)$.

- <u>Ο ιδιοχώρος</u> $\mathcal{V}(2i)$: Θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(2i) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid (A - (2i)I_3)X = \mathsf{O} \right\} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid (A - 2iI_3)X = \mathsf{O} \right\}$$

Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - 2iI_3)X = \mathsf{O} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2i & i & i \\ i & -2i & i \\ i & i & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -2ix_1 + ix_2 + ix_3 = 0 \\ ix_1 - 2ix_2 + ix_3 = 0 \\ ix_1 + ix_2 - 2ix_3 = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Πολλαπλασιάζοντας κάθε εξίσωση του (Σ) με i, προκύπτει το ισοδύναμο ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma') \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - ix_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ του συστήματος (Σ') βλέπουμε εύκολα ότι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και επομένως το σύστημα (Σ') είναι ισοδύναμο με το

$$(\Sigma') \qquad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2 = x_3$$

Άρα θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(2i) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid x_1 = x_2 = x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid x \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \mid x \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως το σύνολο

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(2i)$.

(1) Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = -i$ (πολλαπλότηατς 2) και $\lambda_2 = 2i$ (πολλαπλότητας 1) του A ανήκουν στο σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ και

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}(-i) = 2 = \text{πολλαπλότητα της } \lambda_1 = -i \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}(2i) = 1 = \text{πολλαπλότητα της } \lambda_2 = 2i \end{cases}$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό Θεώρημα ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Όπως γνωρίζουμε τότε η ένωση

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

των βάσεων $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ των ιδιοχώρων $\mathcal{V}(-i)$ και $\mathcal{V}(2i)$ αντίστοιχα είναι μια βάση του $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}_3$.

(2) (α΄) Ο πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος, και τότε αναγκαστικά θα έχουμε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση του $\mathbb{C}_3$ στη βάση $\mathcal{B}$ που βρήκαμε στο μέρος (1). Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας P είναι ο πίνακας ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(β΄) Από τη σχέση $P^{-1}AP = i \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, προκύπτει ότι:

$$A = P \cdot i \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = i\, P \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A^n = i^n P \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot P^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad A^n = i^n P \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Εύκολα υπολογίζουμγε ότι:

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$A^n = i^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$A^n = \frac{i^n}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

Επειδή, όπως μπορύμε να δούμε εύκολα $i^{2018} = -1$. θα έχουμε:

$$A^n = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{2018} + 2 & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^{2018} + 2 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2^{2018} + 2 \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 17. *Να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα* $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, *έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \mu \\ 3 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

Λύση. Έχουμε:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & \mu \\ 3 & 0 & \nu - t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 2-t & \mu \\ 0 & \nu - t \end{vmatrix} = (2-t)^2(\nu - t)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = \mu$.

Επειδή δεν γνωρίζουμε τις πολλαπλότητες των ιδιοτιμών, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1) Έστω $\nu = 2$. Τότε έχουμε την ιδιοτιμή $\lambda = 2$ με πολλαπλότητα τρια. Για να είναι ο A διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3$. Όμως από το ομεγενές σύστημα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

έπεται άμεσα ότι:

$$\mathbf{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2, & \text{αν } \mu \neq 0 \\ \\ 1, & \text{αν } \mu = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3 - 2 = 1 \neq 3, & \text{αν } \mu \neq 0 \\ \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3 - 1 = 2 \neq 3, & \text{αν } \mu = 0 \end{cases}$$

Άρα για $\nu = 2$ και τυχόν $\mu \in \mathbb{R}$ ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται.

(2) Έστω $\nu \neq 2$. Τότε έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ πολλαπλότητας δυο και $\lambda = \nu$ πολλαπλότητας ένα. Σε αυτή τη περίπτωση για να είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 2$. Έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 3 & 0 & \nu - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathbf{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 3 & 0 & \nu - 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \ \text{αν } \mu \neq 0 \\ \\ 1 \ \text{αν } \mu = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3 - 2 = 1 \neq 2, & \text{αν } \mu \neq 0 \\ \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3 - 1 = 2, & \text{αν } \mu = 0 \end{cases}$$

Επομένως για $\nu \neq 2$ και $\mu = 0$ ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

□

Άσκηση 18. (1) *Να εξετασθεί αν οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι όμοιοι.

(2) *Να εξετασθεί αν οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

είναι όμοιοι.

Λύση. (1) Έχουμε:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ -1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t)(t-2)(t-3)$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 3$ πολλαπλότητας ένα. Άρα ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές και επομένως διαγωνοποιείται. Έτσι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

(2) Από την Άσκηση 13 γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και έχει ως ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = 2$ με πολλαπλότητα δύο και $\lambda_2 = 4$ με πολλαπλότητα ένα. Επομένως είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Από την Άσκηση 17 γνωρίζουμε ότι αν $\nu \neq 2$, τότε ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και έχει ως ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = 2$ με πολλαπλότητα δύο και $\lambda_2 = 4$ με πολλαπλότητα ένα. Επομένως είναι όμοιος με τον πίνακα Δ. Τότε, επειδή οι πίνακες A και B είναι όμοιοι με τον πίνακα Δ έπεται ότι[5] οι πίνακες A και B είναι όμοιοι. Αν $\nu = 2$, τότε από την Άσκηση 17 γνωρίζουμε ότι ο πίνακας B δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε οι πίνακες A και B δεν είναι όμοιοι. Πράγματι, αν οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, έπεται ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q έτσι ώστε $Q^{-1}AQ = B$. Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = \Delta$, και τότε:

$$Q^{-1}AQ = B \implies Q^{-1}P\Delta P^{-1}Q = B \implies (P^{-1}Q)^{-1}\Delta(P^{-1}Q) = B \implies$$
$$\implies (P^{-1}Q)B(P^{-1}Q)^{-1} = \Delta \implies (Q^{-1}P)^{-1}B(Q^{-1}P) = \Delta$$

δηλαδή ο πίνακας B είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα Δ και άρα είναι διαγωνοποιήσιμος. Αυτό είναι άτοπο και άρα οι πίνακες A και B δεν είναι όμοιοι.

Επομένως αν $\nu \neq 2$ οι πίνακες A και B είναι όμοιοι και αν $\nu = 2$ οι πίνακες A και B δεν είναι όμοιοι. □

Άσκηση 19. (1) *Έστω* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ένας* 2×2 *πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι:*

$$P_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc) = t^2 - \mathsf{Tr}(A)t + \mathsf{Det}(A)$$

[5] Υπενθυμίζουμε ότι η σχέση ομοιότητας $n \times n$ πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.

όπου $\mathsf{Tr}(A) = a + d$ *είναι το ίχνος του* A *και* $\mathsf{Det}(A) = ad - bc$ *είναι η οριζουσα του* A, *και:*

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = A^2 - \mathsf{Tr}(A)A + \mathsf{Det}(A)I_2 = \mathsf{O}$$

(2) *Να βρεθεί η* n*-οστή δύναμη του πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(3) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ είναι όμοιος με τον πίνακα } \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{αν } a = 0 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{αν } a \neq 0 \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

(4) *Να εξετασθεί αν οι πίνακες* A *και* B *είναι όμοιοι, στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(α')

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(β')

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(γ')

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(δ')

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Λύση. (1) Υπολογίζουμε εύκολα:

$$P_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix} = ad - at - dt + t^2 - bc = t^2 - (a+d)t + (ad-bc)$$

δηλαδή:

$$P_A(t) = t^2 - \mathsf{Tr}(A)t + |A|$$

και παρόμοια:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd \\ ac+cd-ac-cd & cb+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{O}$$

δηλαδή:

$$P_A(A) = A^2 - \mathsf{Tr}(A)A + |A|_2 = \mathsf{O}$$

(2) Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ έχουμε $\mathsf{Tr}(A) = 0$ και $\mathsf{Det}(A) = -1$. Από το μέρος (1) έπεται ότι:

$$A^2 - I_2 = \mathsf{O} \implies A^2 = I_2 \implies A^n = \begin{cases} I_2, & \text{αν } n: \text{ άρτιος} \\ A, & \text{αν } n: \text{ περιττός} \end{cases}$$

(3) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α') Έστω ότι $a = 0$. Τότε $A = I_2$ είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

(β΄) Έστω ότι $a \neq 0$. Τότε υπάρχει ο αριθμός a^{-1} και θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι προφανώς αντιστρέψιμος με $P^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Θα έχουμε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες A και $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι.

(4) Οι πίνακες

(α΄)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

δεν είναι όμοιοι διότι $|A| = 3 \neq 6 = |B|$, και γνωρίζουμε ότι όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα.

(β΄) Οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

δεν είναι όμοιοι, διότι αν και έχουν την ίδια ορίζουσα: $|A| = -5 = |B|$, δεν έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P_A(t) = t^2 - 3t - 5 \quad \text{και} \quad P_B(t) = t^2 - 4t - 5$$

και γνωρίζουμε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

(γ΄) Οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P_A(t) = t^2 - 5t + 6 = P_B(t)$$

και άρα το ίδιο ίχνος και την ίδια ορίζουσα. Επειδή $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$, έπεται ότι οι πίνακες A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$, και οι δύο με πολλαπλότητα ένα, και άρα και οι δύο είναι διαγωνοποιήσιμοι και άρα είναι όμοιοι με τον διαγώνιο πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Επειδή δύο πίνακες οι οποίοι είναι όμοιοι με έναν τρίτο πίνακα είναι και μεταξύ τους όμοιοι, έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

(δ΄) Οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

έχουν το ίδιο ίχνος και την ίδια ορίζουσα, και επομένως από το μέροις (1) έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, το οποίο από το μέρος (3) είναι το $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$. Τότε όπως και στο μέρος (γ΄) έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι. □

Άσκηση 20. *Έστω A και B δύο όμοιοι πίνακες. Να δειχθεί ότι οι πίνακες A^2 και B^2 είναι όμοιοι. Ισχύει το αντίστροφο;*

Λύση. Επειδή οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$. Τότε

$$P^{-1}A^2P = P^{-1}AI_2AP = P^{-1}APP^{-1}AP = B \cdot B = B^2$$

Άρα οι πίνακες A^2 και B^2 είναι όμοιοι.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: Θεωρούμε τους πίνακες

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Τότε $A^2 = I_2 = B^2$ και επομένως οι πίνακες A^2 και B^2 είναι ίσοι και άρα όμοιοι. Όμως οι πίνακες A και B δεν είναι όμοιοι διότι, για παράδειγμα, έχουν διαφορετική ορίζουσα: $|A| = 1 \neq -1 = |B|$. □

Άσκηση 21. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $a+bi$ και $a-bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $a+bi$ και $a-bi$ είναι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ και ακολούθως να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας μιγαδικών αριθμών P έτσι ώστε:*

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}$$

Λύση. Αν $b = 0$, τότε $a+bi = a-bi = a \in \mathbb{R}$, και τότε μπορούμε να επιλέξουμε ως πίνακα A και ως αντιστρέψιμο πίνακα P τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τώρα και στο εξής, υποθέτουμε ότι $b \neq 0$. Ιδιαίτερα τότε έχουμε ότι: $a+bi \neq a-bi$.

Ο διαγώνιος πίνακας $\Delta = \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P_\Delta(t) = |\Delta - t_2 I_2| = \begin{vmatrix} (a+bi)-t & 0 \\ 0 & (a-bi)-t \end{vmatrix} = (a+bi)(a-bi) - \big((a+bi)+(a-bi)\big)t + t^2 =$$

$$= t^2 - 2at + (a^2+b^2)$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_\Delta(t)$ του Δ έχει πραγματικούς συντελεστές.

Αν A είναι ένας πίνακας πραγματικών αριθμών έτσι ώστε $P^{-1}AP = \Delta$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα μιγαδικών αριθμών P, τότε γνωρίζουμε ότι οι όμοιοι πίνακες A και Δ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και επομένως $P_A(t) = t^2 - 2at + (a^2+b^2)$. Επειδή $P_A(t) = t^2 - \mathsf{Tr}(A)t + |A|$, έπεται ότι:

$$\mathsf{Tr}(A) = 2a \qquad \text{και} \qquad |A| = a^2 + b^2$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

για τον οποίο ισχύει ότι $\mathsf{Tr}(A) = 2a$ και $|A| = a^2+b^2$. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A είναι τότε οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4(a^2+b^2)}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{-b^2}}{2} = \frac{2a \pm i2b}{2} = a \pm ib$$

και άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι μιγαδικοί αριθμοί

$$\lambda_1 = a + bi \qquad \text{και} \qquad \lambda_2 = a - bi$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες, έπεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Εύκολα βλέπουμε ότι το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

είναι μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(a+bi)$, και το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

είναι μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(a-bi)$. Άρα το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{C}_2$, και επομένως, θέτοντας[6]

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix} \qquad \square$$

Άσκηση 22. *Έστω A ένας διαγωνοποιήσιμος $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι οι μόνες ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί 1 και -1. Να δειχθεί ότι:*

$$A^2 = I_n$$

Λύση. Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP := \Delta$ να είναι διαγώνιος. Αναγκαστικά τότε τα στοιχεία στη διαγώνιο του Δ είναι οι ιδιοτιμές του A, δηλαδή οι αριθμοί 1 και -1. Προφανώς όμως το τετράγωνο Δ^2 ενός διαγώνιου πίνακα με διαγώνια στοιχεία τους αριθμούς 1 και -1, όπως ο Δ, είναι ίσο με τον μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα I_n. Έτσι $\Delta^2 = I_n$. Τότε όμως:

$$P^{-1}AP = \Delta \implies A = P\Delta P^{-1} \implies A^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n \qquad \square$$

Άσκηση 23. *Να προσδιορισθούν όλοι οι 2×2 πίνακες πραγματικών αριθμών οι οποίοι έχουν ως ιδιοτιμές τους αριθμούς 2 και -1 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Έστω A ένας 2×2 πίνακας πραγματικών αριθμών ο οποίος έχει ως ιδιοτιμές τους αριθμούς 2 και -1 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επειδή A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, έπεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι απλές, δηλαδή πολλαπλότητας 1, έπεται ότι οι ιδιοχώροι $\mathcal{V}(2)$ και $\mathcal{V}(-1)$ είναι μονοδιάστατοι και επομένως το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}(2)$ και το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}(-1)$. Άρα το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{R}_2$, και επομένως, θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[6] Θα μπορούσαμε να εργασθούμε και διαφορετικά: Αναζητώντας πίνακα πραγματικών αριθμών A έτσι ώστε $P^{-1}AP = \Delta$, ισοδύναμα αναζητούμε αντιστρέψιμο πίνακα μιγαδικών αριθμών P έτσι ώστε ο πίνακας $A := P\Delta P^{-1}$ να είναι πίνακας πραγματικών αριθμών. Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ πρέπει να έχουμε ότι $|A| = xw - yz \neq 0$ και $P\Delta P^{-1}$ να είναι πίνακας πραγματικών αριθμών.

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Εύκολα επαληθεύουμε οτι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ έχει ως ιδιοτιμές τους αριθμούς 2 και -1 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

Άσκηση 24. *Υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός $n \times n$ διαγωνοποιήσιμου πίνακα A είναι το*

$$P_A(t) = t^3(t-1)^2(t-2)^5(t+2)^4$$

(1) *Να βρεθεί το n.*
(2) *Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα A.*

Λύση. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(t)$ είναι $\deg P_A(t) = n$. Επειδή $P_A(t) = t^3(t-1)^2(t-2)^5(t+2)^4$, έπεται ότι:

$$n = \deg P_A(t) = 3 + 2 + 5 + 4 = 14$$

Προφανώς οι ιδιοτιμές του A είναι οι:

(1) $\lambda_1 = 0$ με πολλαπλότητα 3,
(2) $\lambda_2 = 1$ με πολλαπλότητα 2,
(3) $\lambda_3 = 2$ με πολλαπλότητα 5,
(4) $\lambda_4 = -2$ με πολλαπλότητα 4.

Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται ότι:

(1) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(0) = 3$ πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 0$,
(2) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(1) = 2$ πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 1$,
(3) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(2) = 5$ πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_3 = 2$,
(4) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(-2) = 4$ πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_4 = -2$.

Γνωρίζουμε ότι η βαθμίδα του πίνακα A συμπίπτει με τη βαθμίδα της γραμμικής απεικόνισης

$$f_A\colon \mathbb{K}_{14} \longrightarrow \mathbb{K}_{14}, \quad f_A(X) = AX$$

δηλαδή:

$$\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(f_A) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f_A)$$

Απο τη Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων έπεται ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f_A) = 14 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f_A)$$

Προφανώς όμως:

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \mathcal{V}(0)$$

και επομένως από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\mathbf{r}(A) = 14 - \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V}(0) = 14 - 3 = 11$$

□

Άσκηση 25. *Να εξετασθούν ως προς τη διαγωνοποίηση οι πίνακες πραγματικών αριθμών:*

$$A_1 = (1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Θα εργαστούμε αναλύοντας τη γενική περίπτωση του $n \times n$ πίνακα A_n.

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τοιυ πίνακα A_n:

$$P_{A_n}(t) = |A_n - tI_n| = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-t & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-t \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_n}$$

$$\begin{vmatrix} n-t & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-t & 1-t & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-t & 1 & 1-t & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-t & 1 & 1 & \cdots & 1-t & 1 \\ n-t & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-t \end{vmatrix} = (n-t) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-t & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-t \end{vmatrix} \xrightarrow[\cdots, \Gamma_n - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1,}$$

$$(n-t) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -t \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-t)t^{n-1}$$

Άρα

$$P_{A_n}(t) = (-1)^n t^{n-1}(n-t)$$

και επομένως οι ιδιοτιμές του A_n είναι οι $\lambda_1 = n$ με πολλαπλότητα 1 και $\lambda_2 = 0$ με πολλαπλότητα $n-1$.

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(n)$ παρατηρούμε ότι αν $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$, τότε:

$$A_n E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = nE_1$$

Άρα το διάνυσμα E_1 είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A_n το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = n$. Επειδή η ιδιοτιμή λ_1 είναι απλή έπεται ότι το σύνολο

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}(n)$.

Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(0)$ παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{V}(0) = \big\{X \in \mathbb{K}_n \mid A_n X = \mathsf{0}\big\} = \Lambda(\Sigma)$$

είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$(\Sigma) \quad A_n X = \mathsf{O}, \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

Η γενική λύση του (Σ) είναι η

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \cdots + x_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \left\langle E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; \cdots, \;\; E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Προφανώς οι στήλες $E_2, E_3, \cdots, E_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και επομένως αποτελούν βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(0)$. Επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(0) = n - 1 =$ πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 0$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι ο πίνακας A_n είναι διαγωνοποιήσιμος και επομένως το σύνολο

$$\left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; \cdots, \;\; E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n$. Τότε θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε:

$$P^{-1}A_n P = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ □

Άσκηση 26. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι οι μόνες ιδιοτιμές του A είναι οι 2, 1, -7, και 13, πιθανόν με κάποιες πολλαπλότητες. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος.*

Λύση. Αν ο πίνακας $A + I_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε γνωρίζουμε ότι $|A + I_n| = 0$. Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$P_A(t) = |A - tI_n|$$

Αν $|A + I_n| = 0$, τότε ο αριθμός $\lambda = -1$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A:

$$P_A(-1) = |A - (-1)I_n| = |A + I_n| = 0$$

και επομένως ο αριθμός $\lambda = -1$ είναι ιδιοτιμή του A. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση, και επομένως $|A + I_n| \neq 0$, δηλαδή ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος. □

Άσκηση 27. *Να βρεθεί ένας 3×3 πίνακας πραγματικών αριθμών A για τον οποίο τα διανύσματα στήλες*

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του A με αντίστοιχες ιδιοτιμές $1, 2$ και 3.

Λύση. Από υπόθεση οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, και $\lambda_3 = 3$ του πίνακα A είναι πραγματικές, όλες με πολλαπλότητα ένα. Συνεπώς ο A διαγωνοποιείται και άρα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Επειδή από την υποθεση οι στήλες X, Y, και Z είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 1, 2, και 3 αντίστοιχα, έπεται ότι οι μη-μηδενικές στήλες X, Y, και Z ανήκουν στους ιδιοχώρους $\mathcal{V}(1)$, $\mathcal{V}(2)$, και $\mathcal{V}(3)$ αντίστοιχα. Επειδή ο πίνακας A διαγωνοποιείται, από το κριτήριο διαγωνοποίησης, η διάσταση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}(1)$, $\mathcal{V}(2)$, και $\mathcal{V}(3)$ είναι ίση με την πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής η οποία είναι ίση με 1. Άρα $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(3) = 1$. Αυτό σημαίνει[7] ότι οι στήλες X, Y, και Z αποτελούν βάσεις των ιδιοχώρων $\mathcal{V}(1)$, $\mathcal{V}(2)$, και $\mathcal{V}(3)$ αντίστοιχα. Γνωρίζουμε τότε από τη Θεωρία ότι η ένωση αυτών των βάσεων αποτελεί μια βάση

$$\mathcal{C} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του χώρου των στηλών $\mathbb{R}_3$.

Γνωρίζουμε τότε από τη θεωρία ότι ο αντιστρέψιμος πίνακας P σχηματίζεται από τις στήλες των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}$ του $\mathbb{R}_3$ και επομένως:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[7] Σε έναν $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ διάστασης $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 1$, κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα είναι βάση του $\mathcal{E}$.

Τότε θα έχουμε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \underbrace{\cdots}_{\text{πράξεις}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Άσκηση 28. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Αν*

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

να δειχθεί ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.

(1) (α') *Αν $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, να δείξετε ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(β') *Αν $f^2 = f$, να δείξετε ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(2) *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.*
(α') *Αν $A^2 = I_n$, να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(β') *Αν $A^2 = A$, να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Λύση. Έστω ότι $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Έστω $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του $\mathrm{Ker}(f)$ την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$. Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο $\mathcal{B}_2 = \{\vec{\epsilon}_{k+1} = f(\vec{e}_{k+1}), \vec{\epsilon}_{k+2} = f(\vec{e}_2), \cdots, \vec{\epsilon}_n = f(\vec{e}_n)\}$ μια βάση του $\mathrm{Im}(f)$. Επειδή $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \cdots,\ \vec{e}_k,\ \vec{\epsilon}_{k+1} = f(\vec{e}_{k+1}),\ \vec{\epsilon}_{k+2} = f(\vec{e}_2),\ \cdots,\ \vec{\epsilon}_n = f(\vec{e}_n)\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.

Επειδή:

$$f(\vec{e}_i) = \vec{0},\ \ 1 \le i \le k, \qquad \text{και} \qquad f(\vec{\epsilon}_j) = f(f(\vec{e}_j)) = f^2(\vec{e}_j) = f(\vec{e}_j) = \vec{\epsilon}_j,\ \ k+1 \le j \le n$$

έπεται ότι ο πίνακας της f στη βάση $\mathcal{C}$ είναι διαγώνιος, τα πρώτα k στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με μηδέν, και τα υπόλοιπα $n-k$ είναι ίσα με 1. Επομένως ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος.

(1) (α') Θεωρούμε του υπόχωρους του $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{V}_+ = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{V}_- = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$$

Από την Άσκηση **9** του Φυλλαδίου **1** γνωρίζουμε ότι αν $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, τότε: $\mathcal{E} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-$. Επομένως, αν $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_+$ και $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_-$, τότε το σύνολο $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Ο πίνακας του f στη βάση $\mathcal{B}$ είναι διαγώνιος, τα πρώτα k στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με 1, και τα υπόλοιπα $n-k$ είναι ίσα με -1. Επομένως ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος.
(β') Από την Άσκηση **8** του Φυλλαδίου **1** γνωρίζουμε ότι αν $f^2 = f$, τότε: $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Επομένως, σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος.
(2) Υπενθυμίζουμε ότι κάθε πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ επάγει έναν ενδομορφισμό

$$f_A\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n,\ f_A(X) = A \cdot X$$

και ο πίνακας A διαγωνοποιείται αν και μόνο αν η γραμμική απεικόνιση f_A είναι διαγωνοποιήσιμη. Αν $A^2 = I_n$ τότε έπεται εύκολα ότι $f_A^2 = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$ και αν $A^2 = A$ τότε έχουμε $f_A^2 = f_A$. Συνεπώς και στις δυο περιπτώσεις από το ερώτημα (1) έχουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. $\square$

Άσκηση 29. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση :*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x + kz,\ 2ky,\ ky + 2z)$$

Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

Λύση. Βρίσκουμε πρώτα το πίνακα της f στη κανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big\}$ του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,0,0) \\ f(0,1,0) = (0,2k,k) \\ f(0,0,1) = (k,0,2) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f είναι

$$P_f(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & k \\ 0 & 2k-t & 0 \\ 0 & k & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 2k-t & 0 \\ k & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)(2k-t)(2-t)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του f είναι οι

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 2k$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) Αν $2k \neq 1$ και $2k \neq 2$, δηλαδή $k \neq \frac{1}{2}$ και $k \neq 1$, τότε έχουμε ότι ο f έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 2k$$

Συνεπώς, ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.

(2) Έστω ότι $2k = 1$, δηλαδή $k = \frac{1}{2}$. Τότε η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$ είναι δύο και η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$ είναι ένα. Για να είναι ο f διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(1) = 2 \qquad \text{και} \qquad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(2) = 1$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν έχουμε μια ιδιοτιμή λ σε ένα διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης, τότε ισχύει

$$1 \;\leq\; \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(\lambda) \;\leq\; \text{αλγεβρική πολλαπλότητα της } \lambda$$

Άρα πράγματι έχουμε $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{V}(2) = 1$.

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(1)$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = z = 0$$

Τότε $\mathcal{V}(1) = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0)\rangle$, το διάνυσμα $(1,0,0)$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}(1)$ και άρα $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{V}(1) = 1$. Επομένως, στη περίπτωση όπου το $k = \frac{1}{2}$ ο f δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

(3) Έστω ότι $2k = 2$, δηλαδή $k = 1$. Τότε η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$ είναι ένα, ενώ η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$ είναι δύο. Άρα για να είναι η f διαγωνοποιήσιμη θα πρέπει

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(1) = 1 \qquad \text{και} \qquad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(2) = 2$$

Όπως παραπάνω, ισχύει ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(1) = 1$.

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(2)$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = z \ \text{ και } \ y = 0$$

Τότε $\mathcal{V}(2) = \{(x,0,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,1)\rangle$, το διάνυσμα $(1,0,1)$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}(2)$ και άρα και άρα $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{V}(2) = 1$. Επομένως, στη περίπτωση όπου το $k = 1$ ο ενδομορφισμός f δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άρα, συνοψίζοντας, δείξαμε ότι:

$$\text{Ο ενδομορφισμός } f \text{ είναι διαγωνοπιήσιμος} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k \neq 1, \frac{1}{2}$$

□

Άσκηση 30. *Να προσδιορισθεί ο n-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$, όπου*

$$F_0 = 0,\ \ F_1,\ \ F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ \forall n \geq 1$$

Λύση. Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε, $\forall n \geq 1$:

$$A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} + F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = AA \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 A \begin{pmatrix} F_{n-3} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} F_{n-3} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots =$$

$$= A^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = A^{n-1} A \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

Άρα θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{$\dagger$}$$

Επομένως για να προσδιορίσουμε τον n-οστό όρο F_n της ακολουθίας Fibonacci, αρκεί να προσδιορίσουμε τη n-οστή δύναμη A^n του πίνακα A και να εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό ($\dagger$).

Για τον προσδιορισμό της n-οστής δύναμης A^n του πίνακα A εξετάζουμε αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$P_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - t - 1$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $t^2 - t - 1$ είναι οι

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{και} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Επομένως ο πίνακας A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα διαγωνοποιείται. Σημειώνουμε ότι έχουμε

$$\lambda_i^2 - \lambda_i - 1 = 0, \quad 1 \leq i \leq 2$$

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(\lambda_1)$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -\lambda_1 x + y = 0 \\ x + (1-\lambda_1)y = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

διότι θέτοντας $y = \lambda_1 x$ στη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x + (1-\lambda_1)\lambda_1 x = x(1 + (1-\lambda_1)\lambda_1) = x(1 + \lambda_1 - \lambda_1^2) = x(1-1) = 0$ και άρα ικανοποιείται και η δεύτερη εξίσωση. Επομένως:

$$\mathcal{V}(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x\lambda_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Εργαζόμενοι παρόμοια, για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(\lambda_2)$ προκύπτει άμεσα ότι:

$$\mathcal{V}(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Τότε από τη βάση $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\}$ του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(\lambda_1)$ και τη βάση $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$ του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(\lambda_2)$ προκύπτει η βάση

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$$

του $\mathbb{R}_2$. Επομένως θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

προκύπτει ένας αντιστρέψιμος πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι:

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}$$

και τότε θα έχουμε:

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_2\lambda_1^{n+1} + \lambda_1\lambda_2^{n+1} & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Άρα η n-οστή δύναμη του πίνακα A είναι:

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_2\lambda_1^{n+1} + \lambda_1\lambda_2^{n+1} & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Από τη σχέση (†) προκύπτει τότε ότι:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_2\lambda_1^{n+1} + \lambda_1\lambda_2^{n+1} & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Με άλλα λόγια έχουμε, $\forall n \geq 0$:

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \qquad \square$$

Άσκηση 31. *Έστω $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ και $(z_n)_{n\geq 0}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι οποίες συνδέονται με τις παρακάτω αναγωγικές σχέσεις, $\forall n \geq 1$:*

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} \\ y_n &= -2x_{n-1} - 3y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n &= 2x_{n-1} + 4y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{aligned}$$

Να βρεθούν οι ακολουθίες, αν γνωρίζουμε ότι: $x_0 = 2,\ y_0 = 3,\ z_0 = 1.$

Λύση. Από τις αναγωγικές σχέσεις έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Θέτουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Τότε αφού

$$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix}$$

από τη σχέση (1) έπεται ότι

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Συνεπώς από τη παραπάνω σχέση αρκεί να βρούμε το πίνακα A^n. Έχουμε:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ -2 & -3-t & -2 \\ 2 & 4 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} -3-t & -2 \\ 4 & 3-t \end{vmatrix} = -(1-t)^2(t+1)$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ πολλαπλότητας δύο και $\lambda_2 = -1$ πολλαπλότητας ένα. Εύκολα βρίσκουμε:

$$\mathcal{V}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{και} \qquad \mathcal{V}(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{V}(1) = 2$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{V}(-1) = 1$ έπεται ότι ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Συνεπώς θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad A^n = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n \cdot P^{-1}$$

και εκτελώντας τους παραπάνω πολλαπλασιασμούς βρίσκουμε

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+(-1)^{n+2} & -1-2(-1)^{n+1} & -1+(-1)^{n+2} \\ 1+(-1)^{n+1} & 2-2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Άρα από τη σχέση (2) και τη περιγραφή του πίνακα A^n έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+(-1)^{n+2} & -1-2(-1)^{n+1} & -1+(-1)^{n+2} \\ 1+(-1)^{n+1} & 2-2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots \stackrel{\text{πράξεις}}{\Longrightarrow} \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x_n = 2 \\ y_n = 9(-1)^n - 6 \\ z_n = -9(-1)^n + 10 \end{cases} \qquad \square$$