ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 17 Μαρτίου 2023

Υπενθυμίζουμε τη μορφή του χαρακτηριστικού πολυώνύμου ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+b)t + (ad-bc) = t^2 - \mathsf{Tr}(A)t + |A|$$

Άσκηση 1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$. Να δειχθεί ότι η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 0$ αν και μόνον αν $A^n = 0$.*

Λύση. Αν η μόνη ιδιοτιμή του πίνακα A είναι η $\lambda = 0$, έπεται ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι: $P_A(t) = (-1)^n t^n$. Τότε από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton προκύπτει ότι $P_A(A) = A^n = O$.

Αντίστροφα, έστω ότι $A^n = 0$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^n$ και τότε έχουμε $Q(A) = O$. Γνωρίζουμε τότε ότι $Q_A(t) \mid Q(t)$ και επομένως $Q_A(t) = t^k$ για κάποιο $1 \leq k \leq n$. Η μόνη ρίζα του $Q_A(t)$ είναι η $\lambda = 0$. Επειδή το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A έχουν τις ίδιες ρίζες και οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του A, έπεται ότι η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 0$. $\square$

Άσκηση 2. *Να δείξετε ότι ένας μηδενοδύναμος πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, δηλαδή υπάρχει $m \geq 1$ έτσι ώστε $A^m = O$, είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μονον αν $A = O$.*

Λύση. Έστω ότι $A^m = O$ για κάποιο $m \geq 1$ και υποθέτουμε ότι ο μηδενοδύναμος πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Έστω το πολυώνυμο $Q(t) = t^m$. Τότε έχουμε ότι $Q(A) = A^m = O$ και άρα

$$Q_A(t) \mid Q(t) \implies Q_A(t) = t^k, \ \ 1 \leq k \leq m$$

Όμως επειδή το $Q_A(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι $Q_A(t) = t$. Επομένως από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε ότι $Q_A(A) = A = O$. Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα. $\square$

Άσκηση 3. *Να εξετασθεί αν υπάρχει 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ έτσι ώστε $A^3 = O$ και $A^2 \neq O$.*

Λύση. Έστω ότι υπάρχει ένας πίνακας A ώστε $A^3 = O$ και $A^2 \neq O$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^3$. Τότε $Q(A) = A^3 = O$ και άρα $Q_A(t) \mid Q(t)$. Επομένως $Q_A(t) = t$ ή $Q_A(t) = t^2$ ή $Q_A(t) = t^3$. Αν $Q_A(t) = t^3$, τότε $\deg Q_A(t) = 3$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι $\deg Q_A(t) \leq \deg P_A(t) = 2$. Αν $Q_A(t) = t$, τότε $O = Q_A(A) = A$ και τότε $A^2 = O$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Παρόμοια αν $Q_A(t) = t^2$, τότε $O = Q_A(A) = A^2 = O$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Άρα όλες οι περιπτώσεις οδηγούν σε άτοπο και επομένως δεν υπάρχει 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ έτσι ώστε $A^3 = O$ και $A^2 \neq O$. $\square$

Άσκηση 4. *Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ και ισχύει ότι $A^k = O$, για κάποιον θετικό ακέραιο k, να δειχθεί ότι: $A^n = 0$.*

Λύση. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Αν $k \leq n$, τότε $n - k \geq 0$ και τότε θα έχουμε

$$A^n = A^{k+n-k} = A^k A^{n-k} = O \cdot A^{n-k} = O$$

(2) Αν $k > n$, τότε θεωρούμε το πολυώνυμο $P(t) = t^k$. Προφανώς τότε έχουμε $P(A) = O$ και επομένως το πολυώνυμο $P(t)$ διαρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του πίνακα A. Αυτό σημαίνει ότι $Q_A(t) = t^r$, για κάποιον θετικό ακέραιο $r \leq k$, και ιδιαίτερα $r = \deg Q_A(t)$. Επειδή $Q_A(t) \mid P_A(t)$ και $\deg P_A(t) = n$, έπεται ότι $r \leq n$. Τότε $O = Q_A(A) = A^r$ και όπως στην πρώτη περίπτωση $A^n = O$. □

Άσκηση 5. *Έστω $A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$.*

(1) *Αν $\mathsf{Tr}(A^2) = 5$ και $\mathsf{Tr}(A) = 3$, να βρεθεί η ορίζουσα $|A|$ του πίνακα A.*
(2) *Αν $\mathbf{r}(A) = 1$ και $\mathsf{Tr}(A) = 5$, να βρεθεί το ίχνος $\mathsf{Tr}(A^2)$ του πίνακα A^2.*
(3) *Αν $B \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ είναι ένας πίνακας όμοιος με τον A, τότε: $\mathsf{Tr}(A) = \mathsf{Tr}(B)$.*
(4) *Αν ο A έχει θετικές ακέραιες ιδιοτιμές και ορίζουσα $|A| = 5$, να βρεθεί το ίχνος $\mathsf{Tr}(A)$ του πίνακα A.*

Λύση. (1) Έστω ότι $\mathsf{Tr}(A^2) = 5$ και $\mathsf{Tr}(A) = 3$. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι

$$A^2 - 3A + |A|I_2 = O \implies A^2 - 3A = |A|I_2 \implies \mathsf{Tr}(A^2 - 3A) = \mathsf{Tr}(|A|I_2)$$

Επειδή η απεικόνιση $\mathsf{Tr}\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι γραμμική θα έχουμε:

$$\mathsf{Tr}(A^2) - \mathsf{Tr}(3A) = 2|A| \implies 5 - 3\mathsf{Tr}(A) = 2|A| \implies 5 - 3 \cdot 3 = 2|A| \implies |A| = -2$$

(2) <u>Πρώτος Τρόπος</u>: Έστω ότι $\mathbf{r}(A) = 1$ και $\mathsf{Tr}(A) = 5$. Επειδή $\mathbf{r}(A) = 1$, έπεται ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή η μια από τις δύο στήλες είναι πολλαπλάσιο της άλλης με ένα στοιχείο k του σώματος $\mathbb{K}$. Επομένως, ο πίνακας A είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + kab & 2kab \\ ab + kb^2 & kab + k^2b^2 \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\mathsf{Tr}(A^2) = a^2 + 2kab + (kb)^2 = (a + kb)^2 = \mathsf{Tr}(A)^2$$

Όμως επειδή $\mathsf{Tr}(A) = (a + kb)$, από την υπόθεση έχουμε $\mathsf{Tr}(A) = 5$, και τότε:

$$\mathsf{Tr}(A^2) = 25$$

<u>Δεύτερος Τρόπος με χρήση Θεωρήματος Cayley-Hamilton</u>: Επειδή $\mathbf{r}(A) = 1$, έπεται προφανώς ότι $|A| = 0$ και τότε από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton προκύπτει ότι:

$$A^2 - \mathsf{Tr}(A)A = O \implies A^2 = \mathsf{Tr}(A)A \implies \mathsf{Tr}(A^2) = \mathsf{Tr}(\mathsf{Tr}(A)A) = \mathsf{Tr}(A)\mathsf{Tr}(A) = (\mathsf{Tr}(A))^2 = 25$$

(3) Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έπεται ότι

$$P_A(t) = P_B(t) \implies t^2 - \mathsf{Tr}(A)t + |A| = t^2 - \mathsf{Tr}(B)t + |B| \implies \begin{cases} \mathsf{Tr}(A) = \mathsf{Tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases}$$

(4) Έστω ότι ο A έχει θετικές ακέραιες ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 και ορίζουσα $|A| = 5$.

(α') Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε ο πίνακας A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα είναι διαγωνοποιήσιμος. Επομένως ο πίνακας A είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος και την ίδια ορίζουσα, έπεται ότι

$$\mathsf{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{και} \quad |A| = \lambda_1\lambda_2 = 5$$

Επειδή από την υπόθεση οι ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 είναι θετικές και ακέραιες, έπεται ότι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 5$. Επομένως:

$$\mathsf{Tr}(A) = 1 + 5 = 6$$

(β') Υποθέτουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε η μοναδική ιδιοτιμή λ είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A:

$$P_A(t) = t^2 - \mathsf{Tr}(A)t + |A| = t^2 - (a+b)t + (ad - bc) = t^2 - (a+b)t + 5$$

Άρα θα έχουμε:

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + 5 = 0$$

Όμως το τριώνυμο $t^2-(a+b)t+5$ έχει διπλή ρίζα αν και μόνον αν η διακρίνουσά του $(a+b)^2-20 = 0$ και άρα $(a+b)^2 = 20$. Τότε η διπλή ρίζα είναι ίση με $\lambda = \dfrac{a+b}{2}$, και επομένως θα έχουμε $(2\lambda)^2 = 20$, δηλαδή $4\lambda^2 = 20$ και τότε $\lambda^2 = 5$. Επειδή προφανώς η τελευταία σχέση δεν ικανοποιείται στο σύνολο των ακέραιων, καταλήγουμε σε άτοπο.

Επομένως:

$$\mathsf{Tr}(A) = 6 \qquad \square$$

Άσκηση 6. *Έστω A και B δύο 2×2 πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, και υποθέτουμε ότι $(AB)^2 = O$. Να εξετασθεί αν $(BA)^2 = O$.*

Λύση. Θέτουμε:

$$M = AB \qquad \text{και} \qquad N = BA$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton για τους πίνακες M και N έχουμε:

$$M^2 - \mathsf{Tr}(M)M + |M|I_2 = O \qquad \text{και} \qquad N^2 - \mathsf{Tr}(N)N + |N|I_2 = O \tag{$\dagger$}$$

Επειδή $|M^2| = |(AB)^2| = |O| = 0$, θα έχουμε

$$0 = |O| = |(AB)^2| = |(AB)(AB)| = |AB| \cdot |AB| = |AB|^2 \implies |AB| = |A| \cdot |B| = 0 \implies$$
$$\implies |A| = 0 \;\text{ ή }\; |B| = 0 \implies |BA| = |B| \cdot |A| = 0$$

Τότε $|N| = |BA| = 0$, και άρα από τη σχέση ($\dagger$) προκύπτει ότι:

$$\mathsf{Tr}(M)M = O \qquad \text{και} \qquad N^2 - \mathsf{Tr}(N)N = O \tag{$\dagger\dagger$}$$

Από την πρώτη σχέση προκύπετι ότι είτε $\mathsf{Tr}(M) = 0$ είτε $M = O$. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $\mathsf{Tr}(M) = 0$. Επειδή[1]

$$\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA) \tag{$\star$}$$

θα έχουμε

$$\mathsf{Tr}(M) = \mathsf{Tr}(N) \implies \mathsf{Tr}(N) = 0$$

Τότε από τη σχέση ($\dagger$) προκύπτει ότι:

$$N^2 = O, \quad \text{δηλαδή :} \quad BA = O \qquad \square$$

Άσκηση 7. *Έστω A και B δύο 2×2 πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, και υποθέτουμε ότι:*

$$A = AB - BA$$

Να δειχθεί ότι:

$$A^2 = O$$

---

[1]Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Τότε:

$$AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad BA = \begin{pmatrix} xa+yc & xb++yd \\ za+wc & zb+wd \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\mathsf{Tr}(AB) = ax + bz + cy + dw = xa + yc + zb + wd = \mathsf{Tr}(BA) \tag{$\star$}$$

Λύση. Επειδή για το ίχνος πινάκων ικανοποιείται η σχέση $\mathsf{Tr}(C+D)=\mathsf{Tr}(C)+\mathsf{Tr}(D)$, $\forall C,D\in\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, χρησιμοποιώντας τη σχέση $(\star)$, θα έχουμε:

$$A=AB-BA \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{Tr}(A)=\mathsf{Tr}(AB-BA)=\mathsf{Tr}(AB)-\mathsf{Tr}(BA)=0$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται τότε ότι:

$$A^2-\mathsf{Tr}(A)A+|A|I_2=O \quad\Longrightarrow\quad A^2+|A|I_2=O \quad\Longrightarrow\quad A^2=-|A|I_2 \tag{$*$}$$

Από τη σχέση $A=AB-BA$ θα έχουμε:

$$A=AB-BA \quad\Longrightarrow\quad A^2=A(AB-BA)=A^2B-ABA \quad\text{και}\quad A^2=ABA-BA^2$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε άμεσα ότι:

$$2A^2=A^2B-BA^2 \quad\overset{(*)}{\Longrightarrow}\quad 2A^2=(-|A|I_2)B-B(-|A|I_2)=-|A|B+|A|B=O$$

Άρα $2A^2=O$ και τότε προφανώς[2] θα έχουμε $A^2=O$. □

Άσκηση 8. *Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, και υποθέτουμε ότι:*

$$|A|=0 \quad\text{και}\quad \mathsf{Tr}(A)\neq -1$$

Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A+I_2$ είναι αντιστρέψιμος και:

$$A^{-1}=I_2-\frac{1}{1+\mathsf{Tr}(A)}A$$

Λύση. Επειδή $|A|=0$, από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton, θα έχουμε:

$$A^2-\mathsf{Tr}(A)A=O \quad\Longrightarrow\quad A^2=\mathsf{Tr}(A)I_2)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, θα έχουμε:

$$(A+I_2)\cdot\left(I_2-\frac{1}{1+\mathsf{Tr}(A)}A\right)=A-\frac{1}{1+\mathsf{Tr}(A)}A^2+I_2-\frac{1}{1+\mathsf{Tr}(A)}A=$$

$$=A-\frac{\mathsf{Tr}(A)}{1+\mathsf{Tr}(A)}A+I_2-\frac{1}{1+\mathsf{Tr}(A)}A=\left(1-\frac{\mathsf{Tr}(A)}{1+\mathsf{Tr}(A)}-\frac{1}{1+\mathsf{Tr}(A)}\right)A+I_2=I_2$$

Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας $A+I_2$ είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1}=I_2-\frac{1}{1+\mathsf{Tr}(A)}A$$ □

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

και έστω ο πίνακας

$$B=A^4-3A^3+3A^2-2A+8I_2$$

(1) *Να δειχθεί ότι:*

$$B^2=-I_2$$

(2) *Είναι ο πίνακας B ή ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$;*
(3) *Είναι ο πίνακας B ή ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{C}$;*

Αν είναι στις παραπάνω περοιπτώσεις ο πίνακας B ή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, να διαγωνοποιηθεί.

---

[2]Υπενθυμίζουμε ότι το σώμα $\mathbb{K}$ είναι ένα εκ των $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, και $\mathbb{C}$. Υπάρχουν σώματα $\mathbb{K}$ για τα οποία ισχύει ότι $2a=0$, $\forall a\in\mathbb{K}$, για παράδειγμα το σώμα $\mathbb{Z}_2$. Για ένα τέτοιο σώμα $\mathbb{K}$, ισχύει ότι $2C=O$ για κάθε πίνακα C με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.

Λύση. (1) Θα υπολογίσουμε πρώτα τον πίνακα $B = A^4 - 3A^3 + 3A^2 - 2A + 8I_2$.

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυλώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 2 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 5$$

Ακολούθως για να υπολογίσουμε τον πίνακα B εκτελούμετην Ευκλείδεια διαίρεση του πολυωνύμου $P(t) = t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 2t + 8$ με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t) = t^2 - 4t + 5$ του πίνακα A:

$$P(t) = P_A(t)Q(t) + R(t) \quad \Longrightarrow \quad t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 2t + 8 = (t^2 - 4t + 5)(t^2 + t + 2) + t - 2$$

Άρα $P(t) = P_A(t)Q(t) + (t-2)$. Επειδή $P(A) = B$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των Cayley-Hamilton θα έχουμε:

$$B = P(A) = P_A(A)Q(A) + (A - 2I_2) \quad \text{και} \quad P_A(A) = O \quad \Longrightarrow \quad B = A - 2I_2$$

και τότε:

$$B = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B:

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -1-t & -1 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton προκύπτει ότι

$$O = P_B(B) = B^2 + I_2 \quad \Longrightarrow \quad B^2 = -I_2$$

(2) Επειδή $P_B(t) = t^2 + 1$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B δεν έχει καμμία πραγματική τιμή και άρα ο πίνακας B δεν είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(3) Επειδή $P_B(t) = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$ υπεράνω του $\mathbb{C}$ και επομένως ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{C}$.

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(i)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(B - iI_2)X = O \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1-i & -1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(i) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(i)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(B + iI_2)X = O \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1+i & -1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(-i) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1+i & -1+i \end{pmatrix}$, αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα μιγαδικών αριθμών έτσι ώστε:

$$P^{-1}\,B\,P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

(4) Επειδή $B = A - 2I_2$, θα έχουμε:

$$P^{-1}\,B\,P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P^{-1}\,(A - 2I_2)\,P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P^{-1}\,A\,P - P^{-1}(2I_2)\,P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad P^{-1}\,A\,P - 2I_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P^{-1}\,A\,P = 2I_2 + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{C}$ καθώς είναι όμοιος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$ και δεν είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$ διότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $P_A(t) = t^2 - 4t + 5$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. □

Άσκηση 10. *Να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$, *δηλαδή να βρεθεί ένας πίνακας* $B \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε* $B^2 = A$.

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 6-t & 2 \\ 3 & 7-t \end{vmatrix} = t^2 - 13t + 36$$

Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα $t^2 - 13t + 36 = (t-9)(t-4)$, οι ρίζες του $P_A(t)$ είναι οι 9 και 4 και επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = 9$. Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες, έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 \quad \Longrightarrow \quad A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 P^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A = \left(P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}\right)^2$$

Επομένως, θέτοντας:

$$B = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{†}$$

αποκτούμε έναν 2×2 πίνακα B έτσι ώστε: $B^2 = A$. Θα προσδιορίσουμε τους πίνακες P, P^{-1}.

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(4)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - 4I_2)X = O \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(9)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - 9I_2)X = O \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 3x - 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(9) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Θέτουμε

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{και τότε} \qquad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε από τη σχέση (†) προκύπτει ότι:

$$B = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και τελικά:

$$\boxed{B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}}$$

$\square$

Άσκηση 11. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και $\mathcal{B}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ και $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο. Τότε:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\big(P(f)\big) = P\big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\big)$$

Λύση. Έστω $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{m-1}t^{m-1} + a_m t^m$. Τότε:

$$P(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = a_0 I_n + a_1 M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) + a_2 M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^2 + \cdots + a_{m-1}M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^{m-1} + a_m M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^m \qquad (\dagger)$$

Υπενθυμίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα Ι, ότι αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, τότε η απεικόνιση

$$\Phi\ :\ \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E}) \ \longrightarrow\ \mathsf{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \Phi(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

είναι ισομορφισμός $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων, όπου $n = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E}$. Επιπλέον η Φ στέλνει την σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων στο γινόμενο των αντίστοιων πινάκων, δηλαδή ισχύει:

$$\Phi(f \circ g) = \Phi(f)\cdot\Phi(g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$$

Ιδιαίτερα θα έχουμε:

$$\Phi(f^k) = \Phi(f\circ f\circ\cdots\circ f) = \Phi(f)\cdot\Phi(f)\cdot\ \cdots\ \cdot\Phi(f) = \Phi(f)^k = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^k$$

Επίσης η Φ και στέλνει τον ταυτοτικό ενδομορφισμό $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ στον μοναδιαίο $n\times n$ πίνακα I_n:

$$\Phi(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}) = I_n$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες του ισομορφισμού Φ, η σχέση $(\dagger)$ δίνει:

$$\begin{aligned} P(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) &= a_0\Phi(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}) + a_1\Phi(f) + a_2\Phi(f)^2 + \cdots + a_n\Phi(f)^m = \\ &= \Phi(a_0\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_m f^m) = \Phi(P(f)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(P(f)) \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 12. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου$\mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$. Να δειχθεί ότι το ελάχιστο πολυώνυμο της f συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακά της σε μια τυχούσα βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$:*

$$Q_f(t) = Q_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}(t)$$

Λύση. Έστω $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Τότε θέτοντας $P(t) = Q_f(t)$ στην Άσκηση 11, θα έχουμε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Q_f(f)) = Q_f(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = Q_f(A)$$

Επειδή $Q_f(f) = 0$ και ο πίνακας του μηδενικού ενδομορφισμού ως προς τυχούσα βάση είναι ο μηδενικός, έπεται ότι $Q_f(A) = O$, δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο της f μηδενίζει τον πίνακα A. Τότε όμως θα έχουμε:

(1) $$Q_A(t)\ \mid\ Q_f(t)$$

Από την άλλη πλευρά, θέτοντας $P(t) = Q_A(t)$ στην Άσκηση 11, θα έχουμε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Q_A(f)) = Q_A(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = Q_A(A)$$

Επειδή $Q_A(A) = O$ και επειδή ο μοναδικός ενδομορφισμός με μηδενικό πίνακα σε τυχούσα βάση είναι ο μηδενικός ενδομορφισμός, έπεται ότι ο ενδομορφισμός $Q_A(f)$ είναι ο μηδενικός, δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A μηδενίζει τον ενδομορφισμό f. Τότε όμως θα έχουμε:

(2) $$Q_f(t)\ \mid\ Q_A(t)$$

Επειδή τα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $Q_f(t)$ είναι κανονικά, από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $Q_A(t) = Q_f(t)$, δηλαδή: $Q_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}(t) = Q_f(t)$. $\square$

Άσκηση 13. (1) *Έστω $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$ και $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Τότε για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ισχύει ότι:*

$$Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P$$

(2) *Να δειχθεί ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.*

(3) *Να δειχθεί ότι*[3]*, για κάθε τετραγωνικό πίνακα A, οι πίνακες A και ${}^tA$ έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.*

Λύση. (1) Χρησιμοποιώντας ότι $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$, $\forall k \geq 1$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Q(P^{-1}AP) &= a_0 I_n + a_1(P^{-1}AP) + a_2(P^{-1}AP)^2 + \cdots + a_m(P^{-1}AP)^m = \\ &= a_0 I_n + a_1(P^{-1}AP) + a_2(P^{-1}A^2P) + \cdots + a_m(P^{-1}A^mP) = \\ &= a_0 I_n + P^{-1}a_1AP + P^{-1}a_2A^2P + \cdots + P^{-1}a_mA^mP = \\ &= P^{-1}\big(a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m\big)P = P^{-1}Q(A)P \end{aligned}$$

(2) Έστω ότι A και B είναι όμοιοι πίνακες. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$. Θέτοντας $P(t) = Q_B(t)$ και $P(t) = Q_A(t)$ στο μέρος (1) να είναι τα ελάχιστα πολυώνυμα των πινάκων B και A, έπεται ότι:

$$O = Q_B(B) = Q_B(P^{-1}AP) = P^{-1}Q_B(A)P \implies Q_B(A) = O \implies Q_A(t) \mid Q_B(t) \qquad (\dagger)$$

$$Q_A(B) = Q_A(P^{-1}AP) = P^{-1}Q_A(A)P = P^{-1}OP = O \implies Q_A(B) = O \implies Q_B(t) \mid Q_A(t) \quad (\dagger\dagger)$$

Επειδή τα ελάχιστα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $Q_B(t)$ είναι κανονικά, από τις σχέσεις $(\dagger)$ και $(\dagger\dagger)$ προκύπτει ότι: $Q_A(t) = Q_B(t)$.

(3) Έστω ότι $Q_{{}^tA}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_{k-1}t^{k-1} + t^k$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του ${}^tA$. Τότε, χρησιμοποιώντας ότι η απεικόνιση $\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, $A \longmapsto {}^tA$ είναι γραμμική και ${}^t(A^m) = ({}^tA)^m$, $\forall m \geq 0$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} O = Q_{{}^tA}({}^tA) &= a_0I_n + a_1{}^tA + a_2({}^tA)^2 + \cdots + a_{k-1}({}^tA)^{k-1} + ({}^tA)^k = \\ &= a_0I_n + a_1{}^tA + a_2{}^t(A^2) + \cdots + a_{k-1}{}^t(A^{k-1}) + {}^t(A^k) = \\ &= {}^t(a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_{k-1}A^{k-1} + A^k) = Q_{{}^tA}(A) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$Q_A(t) \mid Q_{{}^tA}(t) \qquad (*)$$

Παρόμοια, έστω ότι $Q_A(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_{m-1}t^{m-1} + t^m$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A. Τότε:

$$\begin{aligned} O = Q_A(A) = b_0I_n + b_1A + b_2A^2 + \cdots + b_{m-1}A^{m-1} + A^m &\implies \\ \implies {}^t(b_0I_n + b_1A + b_2A^2 + \cdots + b_{m-1}A^{m-1} + A^m) = O &\implies \\ \implies b_0I_n + b_1{}^tA + b_2{}^t(A^2) + \cdots + b_{m-1}{}^t(A^{m-1}) + {}^t(A^m) = O &\implies \\ \implies b_0I_n + b_1{}^tA + b_2({}^tA)^2 + \cdots + b_{m-1}({}^tA)^{m-1} + ({}^tA)^m = O \quad Q_A({}^tA) = O \end{aligned}$$

Επομένως:

$$Q_{{}^tA}(t) \mid Q_A(t) \qquad (**)$$

Επειδή τα ελάχιστα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $Q_{{}^tA}(t)$ είναι κανονικά, από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ προκύπτει ότι: $Q_A(t) = Q_{{}^tA}(t)$. □

Άσκηση 14. *Βρείτε τα ελάχιστα πολυώνυμα των ακόλουθων πινάκων πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

[3] Αποδεικνύεται ότι οι πίνακες A κα ${}^tA$ είναι όμοιοι.

Λύση. **1.** Για τον πίνακα A έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5-t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3-t & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-t & -4 \\ 4 & -5-t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ 2 & -1-t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-1)^2$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$, και τα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $P_A(t)$ έχουν τις ίδιες ρίζες. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα εκ των:

$$(t+1)(t-1), \quad (t+1)^2(t-1), \quad (t+1)(t-1)^2, \quad (t+1)^2(t-1)^2$$

Στη συνέχεια για να προσδιορίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο, υπολογίζουμε ποιο από τα παρακάτω γινόμενα πινάκων δίνει το μηδενικό πίνακα:

$$(A+I_4)(A-I_4), \quad (A+I_4)^2(A-I_4), \quad (A+I_4)(A-I_4)^2, \quad (A+I_4)^2(A-I_4)^2$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$(A+I_4)(A-I_4) \neq O, \qquad (A+I_4)^2(A-I_4) \neq O, \qquad (A+I_4)(A-I_4)^2 \neq O$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το

$$Q_A(t) = (t+1)^2(t-1)^2$$

Πραγματικά:

$$(A+I_4)^2(A-I_4)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^2 = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή το $(t+1)^2(t-1)^2$ μηδενίζει τον πίνακα A και είναι το κανονικό πολυώνυμο με τον μικρότερο βαθμό το οποίο μηδενίζει τον πίνακα A. Επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι $Q_A(t) = (t+1)^2(t-1)^2$.

2. Για τον πίνακα B έχουμε:

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ 0 & 4-t & -1 \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -(4-t) & 4-t & 0 \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t) \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} (4-t) \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5-t \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t) \begin{vmatrix} 4-t & -1 \\ -2 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t)(t^2-9t+18) = (4-t)(t-3)(t-6)$$

Συνεπώς, αφού το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_B(t)$ έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_B(t)$ έπεται ότι

$$Q_B(t) = (4-t)(t-3)(t-6)$$

□

Άσκηση 15. *Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον πίνακα

$$B = A^{23} - 3A^{22} - 4A^{21} + 10A^{20} - A^6 + 3A^5 + 4A^4 - 11A^3 + 4A^2 + 5A + I_3$$

Λύση. Εύκολα βρίσκουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ είναι

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ -1 & -t & 4 \\ 0 & 2 & 2-t \end{vmatrix} = \cdots = -t^3 + 3t^2 + 4t - 10$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$R(t) = t^{23} - 3t^{22} - 4t^{21} + 10t^{20} - t^6 + 3t^5 + 4t^4 - 11t^3 + 4t^2 + 5t + 1$$

Διαιρώντας το πολυώνυμο $R(t)$ με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ θα έχουμε:

$$R(t) = P_A(t)(-t^{20} + t^3 + 1) + (t^2 + t + 11) \tag{$*$}$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε ότι $P_A(A) = 0$. Επομένως, από τη σχέση $(*)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} B = R(A) \quad &= \quad P_A(A)(-A^{20} + A^3 + I_3) + (A^2 + A + 11I_3) \\ &\Longrightarrow \quad B = A^2 + A + 11I_3 \\ &\quad \vdots \\ &\Longrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 20 \\ -2 & 17 & 9 \\ -2 & 6 & 25 \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

Άσκηση 16. *Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο σταθερός όρος του ελαχίστου πολυωνύμου $Q_A(t)$ του A είναι μη-μηδενικός.*

Λύση. "$\Longleftarrow$" Υποθέτουμε πρώτα ότι ο σταθερός όρος του ελαχίστου πολυωνύμου του πίνακα A είναι μη-μηδενικός και επομένως, αν $Q_A(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_{k-1}t^{k-1} + t^k$, τότε $b_0 \neq 0$. Επειδή $Q_A(A) = O$, θα έχουμε:

$$b_0 I_n + b_1 A + b_2 A^2 + \cdots + b_{k-1}A^{k-1} + A^k = O \quad \Longrightarrow \quad b_1 A + b_2 A^2 + \cdots + b_{k-1}A^{k-1} + A^k = -b_0 I_n \quad \Longrightarrow$$

$$\left(-\frac{b_1}{b_0} I_n - \frac{b_2}{b_0} A - \cdots - \frac{b_{k-1}}{b_0} A^{k-2} - \frac{1}{b_0} A^{k-1}\right) A = I_n$$

Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = -\frac{b_1}{b_0} I_n - \frac{b_2}{b_0} A - \cdots - \frac{b_{k-1}}{b_0} A^{k-2} - \frac{1}{b_0} A^{k-1}$$

"$\Longrightarrow$" Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Γνωρίζουμε τότε ότι ο σταθερός όρος a_0 του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(t)$ του A είναι μη-μηδενικός. Έστω ότι:

$$P_A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + (-1)^n t^n \quad \text{και} \quad Q_A(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_{k-1}t^{k-1} + t^k$$

Επειδή $Q_A(t) \mid P_A(t)$, έπεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $R(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m$ έτσι ώστε:

$$P_A(t) = Q_A(t)R(t) \quad \Longrightarrow \quad a_0 = b_0 c_0$$

Επειδή $a_0 \neq 0$ έπεται ότι $b_0 \neq 0$. $\square$

Άσκηση 17. *Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να εκφράσετε τον αντίστροφο του πίνακα*

$$B = A^4 + 5A^3 - 48A^2 - I_2$$

στη μορφή $\kappa A + \lambda I_2$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ είναι κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί.

Λύση. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -5 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t)(3-t) - 5 = t^2 - 5t + 1$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $R(t) = t^4 + 5t^3 - 48t^2 - 1$ και εκτελούμε τη διαίρεση του $R(t)$ με το $P_A(t)$:

$$R(t) = P_A(t)(t^2 + 10t + 1) + (-5t - 2)$$

Επομένως, από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$B = R(A) = P_A(A)(A^2 + 10A + I_2) + (-5A - 2I_3) = -5A - 2I_2$$

Επομένως:

$$B = \begin{pmatrix} -12 & 25 \\ 5 & -17 \end{pmatrix}$$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B. Έχουμε:

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -12-t & 25 \\ 5 & -17-t \end{vmatrix} = (-12-t)(-17-t) - 125 = t^2 + 29t + 79$$

Συνεπώς από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$\begin{aligned} P_B(B) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad B^2 + 29B + 79I_2 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad B(B + 29I_2) = -79I_2 \\ &\Longrightarrow \quad B(-\frac{1}{79}(B + 29I_2)) = I_2 \\ &\Longrightarrow \quad B^{-1} = -\frac{1}{79}(B + 29I_2) \\ &\Longrightarrow \quad B^{-1} = -\frac{1}{79}(-5A - 2I_2 + 29I_2) \\ &\Longrightarrow \quad B^{-1} = \frac{5}{79}A - \frac{27}{29}I_2 \end{aligned}$$

Άρα εκφράσαμε τον αντίστροφο του πίνακα B στη μορφή $\kappa A + \lambda I_2$, όπου $\kappa = \frac{5}{79}$ και $\lambda = -\frac{27}{29}$. □

Άσκηση 18. *Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{K}$, και έστω k ένας φυσικός αριθμός, $k > 2$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να αποδειχθεί ότι*

$$A^k = 0 \quad \Longrightarrow \quad A^2 = 0$$

Λύση. Θεωρούμε το πολυώνυμο $R(t) = t^k$. Τότε από υπόθεση έπεται ότι $R(A) = A^k = 0$. Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του πίνακα A διαιρεί το πολυώνυμο $g(t)$ και άρα $Q_A(t) = t^n$ όπου $1 \leq n \leq k$. Όμως ο βαθμός του $Q_A(t)$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος του 2 διότι $Q_A(t)/P_A(t)$ και $\deg P_A(t) = 2$. Άρα έχουμε ότι $1 \leq n \leq 2$. Αν $n = 1$ τότε $Q_A(t) = t$ και από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε

$$Q_A(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 0 \quad \Longrightarrow \quad A^2 = 0$$

που είναι η τετριμμένη περίπτωση.

Αν $n = 2$ τότε $Q_A(t) = t^2$ και από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι

$$Q_A(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A^2 = 0$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 19. *Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών, όπου n είναι περιττός, να δειχθεί ότι*

$$A^2 + I_n \neq O$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι $A^2 + I_n = O$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^2 + 1$. Τότε $Q(A) = O$ και επομένως

$$Q_A(t) \mid t^2 + 1$$

Επειδή το πολυώνυμο t^2+1 είναι ανάγωγο, έπεται ότι $Q_A(t) = t^2+1$. Το πολυώνυμο t^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Από την άλλη πλευρά, επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ είναι περιττού βαθμού, έπεται ότι[4] έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα. Επειδή το ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυλωνυμο έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t) = t^2+1$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα, και αυτό είναι άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $A^2 + I_n = O$. Άρα $A^2 + I_n \neq O$. □

Άσκηση 20. *Έστω $R(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$ ένα πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{K}$ με $a_0 \neq 0$.*

(1) *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $R(f) = 0$, να δειχθεί ότι ο f είναι ισομορφισμός και να υπολογισθεί ο f^{-1}.*

(2) *Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ και $R(A) = 0$, να δεχιθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογισθεί ο A^{-1}.*

Λύση. Συμβολίζουμε με $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ τον ταυτοτικό ενδομορφισμό του $\mathcal{E}$. Επειδή $a_0 \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} R(f) &= a_0 \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + a_1 f + \cdots + a_k f^k = 0 \\ &\Longrightarrow a_1 f + \cdots + a_k f^k = -a_0 \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \\ &\Longrightarrow f \circ (a_1 \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + \cdots + a_k f^{k-1}) = -a_0 \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \\ &\Longrightarrow f \circ \Big(-\frac{a_1}{a_0} \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - \cdots - \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}\Big) = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Παρόμοια θα έχουμε: $(-\frac{a_1}{a_0}\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - \cdots - \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}) \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

Άρα ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός με αντίστροφο ενδομορφισμό

$$f^{-1} = -\frac{a_1}{a_0}\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - \cdots - \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}$$

Παρόμοια εργαζόμαστε στη περίπτωση του ερωτήματος (2). Εναλλακτικά χρησιμοποιούμε τον ενδομορφισμό $f_A\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n$, $f_A(X) = AX$. □

Άσκηση 21. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος (α) υπεράνω του $\mathbb{R}$; (β) υπεράνω του $\mathbb{C}$;

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = -t^3 + 1$$

1. Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα $P_A(t) = -t^3 + 1 = -(t-1)(t^2+t+1)$, η μόνη ρίζα του $P_A(t)$ υπεράνω του $\mathbb{R}$ είναι η $\lambda = 1$ και επομένως ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι όπως γνωρίζουμε διαιρέτης του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(t) = -t^3 + 1$. Οι μόνοι διαιρέτες, εκτός του σταθερού πολυωνύμου 1, υπεράνω του $\mathbb{R}$ του $-t^3+1 = -(t-1)(t^2+t+1)$ είναι οι $t-1$, t^2+t+1, και $(t-1)(t^2+t+1) = t^3 - 1$. Προφανώς $Q_A(t) \neq t-1$ διότι διαφορετικά θα είχαμε

$$O = Q_A(A) = A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

[4] Θεωρούμε γνωστό ότι: «*κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα*».

και αυτό είναι άτοπο.

Αν $Q_A(t) = t^2 + t + 1$ τότε θα είχαμε

$$O = Q_A(A) = A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $Q_A(t) \neq t^2 + t + 1$ και επομένως: $Q_A(t) = (t-1)(t^2+t+1) = t^3 - 1$.

2. Εργαζόμενοι υπεράνω του $\mathbb{C}$, έχουμε

$$P_A(t) = -(t-1)(t^2+t+1) = -(t-1)(t-\omega)\left(t-\omega^2\right)$$

όπου

$$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{και} \qquad \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

είναι οι κυβικές μιγαδικές ρίζες της μονάδας. Έτσι οι ιδιοτιμές του A υπεράνω του $\mathbb{C}$ είναι διακεκριμένες, έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{C}$, και άρα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(1)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - I_3)X = O \implies \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x+z=0 \\ x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(\omega)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - \omega I_3)X = O \implies \begin{pmatrix} -\omega & 0 & 1 \\ 1 & -\omega & 0 \\ 0 & 1 & -\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -\omega x+z=0 \\ x-\omega y=0 \\ y-\omega z=0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \omega^2 x \\ \omega x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(\omega) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(\omega^2)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - \omega^2 I_3)X = O \implies \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 & 1 \\ 1 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -\omega^2 x+z=0 \\ x-\omega^2 y=0 \\ y-\omega^2 z=0 \end{cases} \implies$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \omega x \\ \omega^2 x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(\omega^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο ππινακα μιγαδικών αριθμών έτσι ώστε:

$$P^{-1}\, A\, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{C}$, το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων και έχει ως ρίζες τις ιδιοτιμές του A. Επομένως: $Q_A(t) = (t-1)(t^2+t+1) = t^3 - 1$.

Συνοψίζοντας, το ελάχιστο πολυώνυμο του A, υπεράνω του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{C}$ είναι το:

$$\boxed{Q_A(t) = t^3 - 1}$$

□

Άσκηση 22. *Έστω ο $n \times n$ πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι ταυτοδύναμος, δηλαδή $(\frac{1}{n}A)^2 = \frac{1}{n}A$.*
(2) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του $\frac{1}{n}A$.*
(3) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*

Λύση. Για το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$\left(\frac{1}{n}A\right)^2 = \left(\frac{1}{n}A\right)\left(\frac{1}{n}A\right) = \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} = \frac{1}{n}A$$

και άρα ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι ταυτοδύναμος.

Έστω λ μια ιδιοτιμή του πίνακα $B = \frac{1}{n}A$. Συνεπώς, υπάρχει ένα μη-μηδενικο διάνυσμα στήλη X έτσι ώστε $BX = \lambda X$. Επειδή $B^2 = B$ από το πρώτο ερώτημα, τότε έχουμε:

$$BX = \lambda X \implies B^2 X = \lambda BX \implies BX = \lambda^2 X \implies \lambda X = \lambda^2 X \implies (\lambda - \lambda^2)X = 0$$

και επειδή το $X \neq 0$ έπεται ότι $\lambda(1-\lambda) = 0$, δηλαδή $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε ότι πράγματι οι αριθμοί $0, 1$ είναι ιδιοτιμές του B. Επομένως, ο πίνακας $B = \frac{1}{n}A$ έχει ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ με κατάλληλες πολλαπλότητες. Θεωρούμε το πολυώνυμο $R(t) = t^2 - t$. Τότε

$$R(B) = B^2 - B = B - B = 0$$

και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_B(t)$ του πίνακα B διαιρεί το πολυώνυμο $R(t)$. Επομένως, έχουμε:

$$Q_B(t) \;/\; R(t) \implies Q_B(t) = 1 \quad \text{ή} \quad Q_B(t) = t - 1 \quad \text{ή} \quad Q_B(t) = t(t-1)$$

Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι

$$Q_B(x) = t(t-1)$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A έχει διακεκριμένες ρίζες και και συνεπώς από γνωστό κριτήριο διαγωνοποίησης έπεται ότι ο πίνακας $B = \frac{1}{n}A$ είναι διαγωνοποιήσιμος. Επομένως ο πίνακας B είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακας στη διαγώνιο του οποίου είναι τα στοιχεία 0 και 1. Για να προσδιορίσουμε πόσες φορές εμφανίζεται το 1 και πόσες φορές εμφανίζεται το 0, αρκεί να προσδιορίσουμε την αλγεβρική πολλαπλότητα τους ως ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του B.

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B:

$$P_{\frac{1}{n}A}(t) = |\frac{1}{n}A - tI_n| = \begin{vmatrix} \frac{1}{n}-t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n}-t & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n}-t & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}-t & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n}-t \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_n}$$

$$\begin{vmatrix} 1-t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 1-t & \frac{1}{n}-t & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 1-t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n}-t & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}-t & \frac{1}{n} \\ 1-t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n}-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n}-t & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n}-t & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}-t & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n}-t \end{vmatrix} \xrightarrow[\cdots, \Gamma_n - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1,}$$

$$(1-t) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -t \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(1-t)t^{n-1}$$

Άρα

$$P_{A_n}(t) = (-1)^n t^{n-1}(1-t)$$

και επομένως οι ιδιοτιμές του $B = \frac{1}{n}A$ είναι οι $\lambda_1 = 1$ με πολλαπλότητα 1 και $\lambda_2 = 0$ με πολλαπλότητα $n-1$. Επειδή ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathcal{V}(1) = 1$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathcal{V}(0) = n-1$. Επομένως ο πίνακας $B = \frac{1}{n}A$ είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Υπενθυμίζουμε ότι η σχέση ομοιότητας $n \times n$ πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Η κλάση ομοιότητας ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ αποτελείται από το σύνολο ολων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ οι οποίοι είναι όμοιοι με τον A.

Άσκηση 23. *Να περιγραφούν οι διαφορετικές κλάσεις ομοιότητας ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ για τον οποίο ισχύει*

$$A^3 = A$$

Λύση. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$Q(t) = t^3 - t$$

Τότε προφανώς θα έχουμε ότι $Q(A) = O$ και επομένως το πυλώνυμο $Q(t)$ διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$:

$$Q_A(t) \mid Q(t)$$

Επειδή $Q(t) = t(t^2-1) = t(t-1)(t+1)$, οι διαιρέτες του $Q(t)$, εκτός του σταθερού πολυωνύμου 1, είναι οι: t, $t-1$, $t+1$, $t(t-1)$, $t(t+1)$, $(t-1)(t+1)$, και $t(t-1)(t+1)$, θα έχουμε ότι το $Q_A(t)$ θα είναι ένα εκ των πολυωνύμων:

$$t, \quad t-1, \quad t+1, \quad t(t-1), \quad t(t+1), \quad (t-1)(t+1), \quad t(t-1)(t+1)$$

(1) Αν $Q_A(t) = t$, τότε $O = Q_A(A) = A = O$, και άρα: $A = O$.
(2) Αν $Q_A(t) = t-1$, τότε $O = Q_A(A) = A - I_n = O$, και άρα: $A = I_n$.
(3) Αν $Q_A(t) = t+1$, τότε $O = Q_A(A) = A + I_n = O$, και άρα: $A = -I_n$.
(4) Αν $Q_A(t) = t(t-1)$, τότε $O = Q_A(A) = A(A - I_n) = O$, και άρα ο πίνακας A είναι ταυτοδύναμος: $A^2 = A$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα στη διαγώνιου του οποίου υπάρχουν τα στοιχεία 0 και 1.
(5) Αν $Q_A(t) = t(t+1)$, τότε $O = Q_A(A) = A(A + I_n) = O$, και άρα για τον πίνακα A ισχύει ότι: $A^2 = -A$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα στη διαγώνιου του οποίου υπάρχουν τα στοιχεία 0 και -1.
(6) Αν $Q_A(t) = (t-1)(t+1)$, τότε $O = Q_A(A) = A^2 - I_2 = O$, και άρα: $A^2 = I_2$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα στη διαγώνιου του οποίου υπάρχουν τα στοιχεία 1 και -1.
(7) Αν $Q_A(t) = t(t-1)(t+1)$, τότε $O = Q_A(A) = A(A^2 - I_2) = O$, και άρα: $A^3 = A$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα στη διαγώνιου του οποίου υπάρχουν τα στοιχεία 0, 1 και -1.

Επομένως υπάρχουν οι ακόλουθες 7 διαφορετικές κλάσεις ομοιοότητας για την πίνακα A, δηλαδή ο πίνακας A είναι όμοιος με έναν και μόνον έναν εκ των παρακάτων 7 διαγώνιων πινάκων:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -I_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου και επομένως η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής συμπίπτει με το πλήθος των εμφανίσεών της στον διαγώνιο πίνακα ο οποίος είναι όμοιος με τον A. Επειδή η διάσταση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(\lambda)$ συμπίπτει με τη διάσταση του χώρου των λύσεων $\Lambda(\Sigma(\lambda))$, όπου $\Sigma(\lambda)$ είναι το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A-\lambda I_n)X = O$, έπεται ότι: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(\lambda) = n - \mathbf{r}(A-\lambda I_n)$.

Επομένως θα έχουμε:

(1) Στον πίνακα O η μόνη ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται n φορές.
(2) Στον πίνακα I_n η μόνη ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται n φορές.
(3) Στον πίνακα $-I_n$ η μόνη ιδιοτιμή -1 εμφανίζεται n φορές.
(4) Στον πίνακα A_1 η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n-\mathbf{r}(A)$ φορές και η ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται $\mathbf{r}(A)$ φορές.
(5) Στον πίνακα A_2 η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n-\mathbf{r}(A)$ φορές και η ιδιοτιμή -1 εμφανίζεται $\mathbf{r}(A)$ φορές.
(6) Στον πίνακα A_3 η ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται $n-\mathbf{r}(A-I_n)$ φορές και η ιδιοτιμή -1 εμφανίζεται $\mathbf{r}(A-I_n) = n-\mathbf{r}(A+I_n)$ φορές.
(7) Στον πίνακα A_4 η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n-\mathbf{r}(A)$ φορές, η ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται $n-\mathbf{r}(A-I_n)$ φορές, και η ιδιοτιμή -1 εμφανίζεται $n-\mathbf{r}(A+I_n)$ φορές. □

Άσκηση 24. *Θεωρούμε τον πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) *Να βρεθεί μη-μηδενικό πολυώνυμο* $Q(t)$ *έτσι ώστε* $Q(A) = 0$.
(2) *Να δείξετε ότι ο* A *είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί πολυώνυμο* $P(t)$ *έτσι ώστε* $P(A) = A^{-1}$.

Λύση. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 1 & -t & 1 \\ 4 & -4 & 5-t \end{vmatrix} = \cdots = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6$$

και άρα από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$\begin{aligned} P_A(A) = 0 &\implies -A^3 + 6A^2 - 11A + 6I_3 = 0 \\ &\implies A^3 - 6A^2 + 11A = 6I_3 \\ &\implies A\Big(\frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3)\Big) = I_3 \\ &\implies A^{-1} = \frac{1}{6}A^2 - A^2 + \frac{11}{6}I_3 \end{aligned}$$

Επομένως βρήκαμε πολυώνυμα $Q(t) = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6$ και $P(t) = \frac{1}{6}t^2 - t + \frac{11}{6}$ έτσι ώστε

$$Q(A) = 0 \quad \text{και} \quad P(A) = A^{-1}$$

Να σημειώσουμε ότι από τον υπολογισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(t) = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6$ γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος διότι $|A| = 6$, όπου 6 είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P_A(t)$. □

Άσκηση 25. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί πολυώνυμο $P(t)$ έτσι ώστε:*

$$A^{-2} = P(A)$$

(2) *Να δειχθεί ότι*

$$A^{2018} - 2A^{2017} = A^2 - 2A$$

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 & -1 \\ 0 & -2-t & -1 \\ 0 & 3 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} -2-t & -1 \\ 3 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\big((-2-t)(2-t)+3\big) = (2-t)(t^2-1)$$

Επομένως

$$P_A(t) = -(t-2)(t-1)(t+1) = -t^3 + 2t^2 + t - 2 = -(t^3 - 2t^2 - t + 2)$$

Επομένως ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, και $\lambda_3 = 2$, και επομένως είναι διαγωνοποιήσιμος. Επειδή ο πίνακας A δεν έχει τον αριθμό 0 ως ιδιοτιμή, έπεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι έχουμε $|A| = P_A(0) = -2 \neq 0$. Έτσι υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} και επομένως υπάρχουν οι πίνακες $(A^{-1})^n = A^{-n}$, $\forall n \geq 1$.

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι:

$$O = P_A(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2I_2 \implies A^3 - 2A^2 - A = -2I_2 \implies A\left(-\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_2)\right) = I_2$$

Επομένως:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\left(A^2 - 2A - I_2\right) \implies A^{-2} = (A^{-1})^2 = \Big(-\frac{1}{2}\left(A^2 - 2A - I_2\right)\Big)^2 \implies$$

$$\implies A^{-2} = \frac{1}{4}\Big(A^4 - 4A^3 + 2A^2 + 4A + I_2\Big)$$

Επειδή $A^3 = 2A^2 + A - 2I_2$, θα έχουμε:

$$A^4 = 2A^3 + A^2 - 2A \implies A^4 - 4A^3 + 2A^2 + 4A + I_2 = 2A^3 + A^2 - 2A - 4A^3 + 2A^2 + 4A + I_2 =$$

$$= -2A^3 + 3A^2 + 2A + I_2 = -2(2A^2 + A - 2I_2) + 3A^2 + 2A + I_2 = -4A^2 - 2A + 4I_2 + 3A^2 + 2A + I_2 =$$

$$= -A^2 + 5I_2$$

Επομένως:

$$A^{-2} = \frac{1}{4}\left(-A^2 + 5I_2\right) = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{5}{4}I_2$$

Άρα θεωρώντας το πολυώνυμο

$$P(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{4}$$

προκύπτει ότι:

$$P(A) = A^{-2}$$

Από τη σχέση $A^3 - 2A^2 - A + 2I_2$ προκύπτει ότι:

$$A^3 - 2A^2 = A - 2I_2 \implies A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A \tag{1}$$

Δείχνουμε με επαγωγή ότι, $\forall k \geq 1$:

$$A^{2k} - 2A^{2k-1} = A^2 - 2A \tag{$*$}$$

Η σχέση $(*)$ είναι προφανώς αληθής αν $k = 1$, και η σχέση (1) δείχνει ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ είναι αληθής αν $k = 2$.

Υποθέτουμε ότι $k > 2$ και ότι η σχέση $(*)$ είναι αληθής. Τότε πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $(*)$ με A^2 προκύπτει ότι:

$$A^{2k+2} - 2A^{2k+1} = A^4 - 2A^3 \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \quad A^{2(k+1)} - 2A^{2(k+1)-1} = A^2 - 2A$$

δηλαδή η σχέση $(*)$ ισχύει και για $k+1$. Επομένως η σχέση $(*)$ ισχύει για κάθε $k \geq 2$. Θέτοντας $k = 1009$ στη σχέση (2) έχουμε:

$$A^{2018} - 2A^{2017} = A^2 - 2A$$

Γενικότερα, εργαζόμενοι παρόμοια δείχνουμε ότι, $\forall n \geq 2$:

$$A^{n+1} - 2A^n = \begin{cases} A^2 - 2A, & \text{αν } n: \text{ περιττός} \\ A - 2I_2, & \text{αν } n: \text{ άρτιος} \end{cases}$$

□

Άσκηση 26. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-a-t & a & a-3 \\ 1 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -1-t \end{vmatrix} = -t^3 - (a-1)t^2 + t + a - 1$$

Επομένως

$$P_A(t) = -(t^2-1)(t+(a-1)) = -(t-1)(t+1)\big(t-(1-a)\big)$$

Εξετάζουμε περιπτώσεις:

1. Αν $1 - a \neq \pm 1$, δηλαδή $a \neq 0$ και $a \neq 2$. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ έχει τρεις διακεκριμένες ρίζες, τις 1, -1, και $1-a$. Άρα ο πίνακας A έχει τρειςε διακεκριμένες ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, και $\lambda_3 = 1-a$, και επομένως ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του πίνακα A έχει τις ίδιες ρίζες με το $P_A(t)$, έπεται ότι:

$$Q_A(t) = t^3 + (a-1)t^2 - t + 1 - a$$

και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε, επιλύοντας τα αντίστοιχα ομογενή γραμμικά συστήματα, ότι:

$$\mathcal{V}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \mathcal{V}(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \mathcal{V}(1-a) = \left\langle \begin{pmatrix} a^2-3a+3 \\ 2-a \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a^2-3a+3 \\ 2 & 0 & 2-a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Έστω $a = 0$. Τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = -(t-1)(t+1)(t-1) = -(t-1)^2(t+1)$$

Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του A είναι ένα εκ διαιρετών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, και άρα θα είναι ένα εκ των:

$$(t-1), \quad (t+1), \quad (t-1)(t+1), \quad (t-1)^2, \quad (t-1)^2(t+1)$$

(α΄) Επειδή

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq t-1$$

(β΄) Επειδή

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq t+1$$

(γ΄) Επειδή

$$(A - I_2)(A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq (t-1)(t+1)$$

(δ΄) Επειδή

$$(A - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq (t-1)^2$$

Άρα το πολυώνυμο που μένει $(t-1)^2(t+1)$ είναι αναγκαστικά το ελάχιστο πολυώνυμο του A:

$$Q_A(t) = (t-1)^2(t+1)$$

Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, έπεται ότι ο πίνακας A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

3. Έστω $a = 2$. Τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = -(t-1)(t+1)(t+1) = -(t+1)^2(t-1)$$

Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του A είναι ένα εκ διαιρετών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, και άρα θα είναι ένα εκ των:

$$(t-1), \quad (t+1), \quad (t-1)(t+1), \quad (t+1)^2, \quad (t-1)^2(t+1)$$

(α΄) Επειδή

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq t-1$$

(β΄) Επειδή

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq t+1$$

(γ΄) Επειδή

$$(A - I_2)(A + I_2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq (t-1)(t+1)$$

(δ΄) Επειδή

$$(A+I_2)^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \neq O \quad \Longrightarrow \quad Q_A(t) \neq (t+1)^2$$

Άρα το πολυώνυμο που μένει $(t+1)^2(t-1)$ είναι αναγκαστικά το ελάχιστο πολυώνυμο του A:

$$Q_A(t) = (t+1)^2(t-1)$$

Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, έπεται ότι ο πίνακας A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Συνοψίζουμε:

$$Q_A(t) = \begin{cases} t^3+(a-1)t^2-t+1-a, & \text{αν } a \neq 0,2 \\ (t-1)^2(t+1), & \text{αν } a = 0 \\ (t+1)^2(t-1), & \text{αν } a = 2 \end{cases}$$

και

$$\textit{Ο πίνακας } A \textit{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \quad \Longleftrightarrow \quad a \neq 0,2$$

και τότε ο A είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1-a\end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 27. *Έστω ότι $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^3 = 2A$. Αν ο A είναι πίνακας πραγματικών αριθμών, δηλαδή αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*

Αν ο A είναι πίνακας ρητών αριθμών, δηλαδή αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, είναι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος;

Λύση. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^3 - 2t = t(t^2-2)$. Τότε προφανώς θα έχουμε:

$$Q(A) = A^3 - 2A = O \quad \Longrightarrow \quad Q_A(t) \mid Q(t) \quad \Longrightarrow \quad Q_A(t) \mid t(t^2-2)$$

(1) Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, τότε, επειδή το πολυώνυμο t^2-2 είναι ανάγωγο υπεράνω του $\mathbb{Q}$, και δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{Q}$, έπεται ότι είτε $Q_A(t) = t$ είτε $Q_A(t) = t^2-2$ είτε $Q_A(t) = t(t^2-2)$. Η μόνη περίπτωση για να έχει το $Q_A(t)$ διακεκριομένες ρίζες στο $\mathbb{Q}$, είναι η περίπτωση $Q_A(t) = t$ και τότε $A = 0$. Άρα αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, τότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{Q}$ αν και μόνον αν $A = O$.

(2) Υποθέτουμε ότι $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Τότε, $t(t^2-2) = t(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$ και επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι ένα εκ των:

$$t, \quad t-\sqrt{2}, \quad t+\sqrt{2}, \quad t(t-\sqrt{2}), \quad t((t+\sqrt{2}), \quad t^2-2 = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}), \quad t(t-\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

ΣΕ κάθε περίπτωση το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων και επομένως ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου και επομένως η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής συμπίπτει με το πλήθος των εμφανίσεών της στον διαγώνιο πίνακα ο οποίος είναι όμοιος με τον A. Επειδή η διάσταση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(\lambda)$ συμπίπτει με τη διάσταση του χώρου των λύσεων $\Lambda(\Sigma(\lambda))$, όπου $\Sigma(\lambda)$ είναι το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A-\lambda I_n)X = O$, έπεται ότι: $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathcal{V}(\lambda) = n - \mathbf{r}(A-\lambda I_n)$.

Επομένως θα έχουμε:

(α΄) Αν $Q_A(t) = t$, τότε $A = O$ και η διαγώνια μορφή του πίνακα είναι ο μηδενικός πίνακας O και άρα η μόνη ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται n φορές.

(β΄) Αν $Q_A(t) = t-\sqrt{2}$, τότε $A = \sqrt{2}I_n$ και η διαγώνια μορφή του πίνακα είναι ο διαγώνιος πίνακας $\sqrt{2}I_n$, όπου η ιδιοτιμή $\sqrt{2}$ εμφανίζεται n φορές.

(γ΄) Αν $Q_A(t) = t+\sqrt{2}$, τότε $A = -\sqrt{2}I_n$ και η διαγώνια μορφή του πίνακα είναι ο διαγώνιος πίνακας $-\sqrt{2}I_n$, όπου η ιδιοτιμή $-\sqrt{2}$ εμφανίζεται n φορές.

(δ') Αν $Q_A(t) = t(t-\sqrt{2})$, τότε $A^2 = A\sqrt{2}I_n$ και στη διαγώνια μορφή του πίνακα A, η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A)$ φορές και η ιδιοτιμή $\sqrt{2}$ εμφανίζεται $\mathbf{r}(A)$ φορές.

(ε') Αν $Q_A(t) = t(t+\sqrt{2})$, τότε $A^2 = -A\sqrt{2}I_n$ και στη διαγώνια μορφή του πίνακα A η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A)$ φορές και η ιδιοτιμή $-\sqrt{2}$ εμφανίζεται $\mathbf{r}(A)$ φορές.

(ϛ') Αν $Q_A(t) = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$, τότε $A^2 = 2I_n$ και στη διαγώνια μορφή του πίνακα A η ιδιοτιμή $\sqrt{2}$ εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A - \sqrt{2}I_2)$ φορές και η ιδιοτιμή $-\sqrt{2}$ εμφανίζεται $\mathbf{r}(A + \sqrt{2}I_2)$ φορές.

(ζ) Αν $Q_A(t) = t(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$, τότε $A^3 = 2A$ και στη διαγώνια μορφή του πίνακα A, η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A)$ φορές, η ιδιοτιμή $\sqrt{2}$ εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A - \sqrt{2}I_2)$ φορές, και η ιδιοτιμή $-\sqrt{2}$ εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A + \sqrt{2}I_2)$ φορές. □

Άσκηση 28. *Έστω A ένας 4×4 πίνακας πραγματικών αριθμών για τον οποίο ισχύουν τα εξής:*

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-4\\2\end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

Λύση. Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0 & -2\\0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

και θέτουμε:

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι $|B| = -6 \neq 0$ και άρα ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος. Επομένως το σύνολο $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}_4$ και ιδιαίτερα έχουμε:

$$\begin{cases} E_1: \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_1 = 0 \text{ διότι: } A \cdot E_1 = 0 \cdot E_1 \\[2ex] E_2: \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_2 = -1 \text{ διότι: } A \cdot E_2 = -1 \cdot E_2 \\[2ex] E_3: \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_3 = 2 \text{ διότι: } A \cdot E_3 = 2 \cdot E_3 \\[2ex] E_4: \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_3 = 2 \text{ διότι: } A \cdot E_4 = 2 \cdot E_4 \end{cases}$$

Επειδή η βάση $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα A έπεται ότι ο A διαγωνοποιείται. Επειδή ο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τπ ελάχιστο πολυώνυμο του A έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$Q_A(t) = t(t+1)(t-2)$$

Τέλος να σημειώσουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το πίνακα A. Πράγματι έχουμε:

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \implies A = B \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

$$\implies A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0 & -2\\0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\-\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1\\0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\-\frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0\\1 & \frac{3}{2} & -1 & -1\end{pmatrix} \quad \square$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

(1) Ένας ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται *μηδενοδύναμος* αν: $f^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.
(2) Ο πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ καλείται *μηδενοδύναμος* αν: $A^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.

Άσκηση 29. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος διάστασης $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο f είναι μηδενοδύναμος: $f^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.*
(2) *Η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η μηδενική.*
(3) *$f^n = 0$.*
(4) *Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f είναι της μορφής: $Q_f(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$.*

Λύση. (1) $\Longrightarrow$ (2) Αν $f^m = 0$, τότε το πολυώνυμο $Q(t) = t^m$ μηδενίζει τον f και άρα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$. Προφανώς τότε το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι της μορφής $Q_f(t) = t^k$, για κάποιο $k \leq m$, του οποίου η μοναδική ρίζα είναι η $\lambda = 0$. Επειδή οι ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές της f έπεται ότι η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η μηδενική.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Αν η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η μηδενική, τότε προφανώς το ελάχιστο πολυώνυμο του f θα είναι της μορφής $Q_f(t) = t^m$ για κάποιο $1 \leq m \leq n$. Επειδή το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι $P_f(t) = (-1)^n t^n$. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton θα έχουμε: $0 = P_f(f) = (-1)^n f^n$ και άρα $f^n = 0$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Αν $f^n = 0$, τότε το πολυώνυμο $Q(t) = t^n$ μηδενίζει τον f και άρα διαιρείται το από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ της f. Προφανώς τότε $Q_f(t) = t^m$ για κάποιο $1 \leq m \leq n$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Αν το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ είναι της μορφής $Q_f(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$, τότε $0 = Q_f(f) = f^m$. □

Άσκηση 30. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο A είναι μηδενοδύναμος: $A^m = O$, για κάποιο $m \geq 1$.*
(2) *Η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η μηδενική.*
(3) *$A^n = O$.*
(4) *Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι της μορφής: $Q_A(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$.*

Λύση. Η λύση προκύπτει χρησιμοποιώντας τον ενδομορφισμό $f_A\colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n$, $f_A(X) = AX$, την Άσκηση 29, και τα γνωστά μας αποτελέσματα: (α) Ο πίνακας του f_A στην κανονική βάση του $\mathbb{K}_n$ είναι ο A, (β) $A^m = O$ αν και μόνον αν $f_A^m = 0$, (γ) οι ιδιοτιμές του A συμπίπτουν με τις ιδιοτιμές του f_A, και (δ) το ελάχιστο πολυώνυμο του f_A συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα της σε τυχούσα βάση του $\mathbb{K}_n$. □

Άσκηση 31. *Αν $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Τότε οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηρισικό πολυώνυμο:*

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$

Λύση. • *Πρώτη Περίπτωση*: Ένας εκ των πινάκων A, B είναι αντιστρέψιμος. Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε:

$$BA = A^{-1}ABA = A^{-1}(AB)A$$

και επομένως οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηρσιτικό πολυώνυμο, έπεται ότι: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$. Παρόμοια αν ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε $AB = B^{-1}BAB = B^{-1}(BA)B$, δηλαδή οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι και άρα $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$.

• <u>*Δεύτερη Περίπτωση*</u>: Υποθέτουμε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε η βαθμίδα του είναι $\mathbf{r}(A) := r < n$. Από την Γραμμική Άλγεβρα Ι γνωρίζουμε ότι ο A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\widetilde{I}_r := \begin{pmatrix} I_r & O_{r\times n-r} \\ O_{n-r\times r} & O_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$

Δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $Q_1, P_1 \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$Q_1 A P_1 = \widetilde{I}_r$$

Θέτοντας $Q = Q_1^{-1}$ και $P := P_1^{-1}$ θα έχουμε τότε:

(3) $$A = Q\widetilde{I}_r P$$

Θεωρούμε τον πίνακα $C := PBQ$ τον οποίο τον χωρίζουμε σε υποπίνακες:

$$C = PBQ = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

όπου

$$C_{11} \in \mathsf{M}_r(\mathbb{K}), \quad C_{12} \in \mathsf{M}_{r\times n-r}(\mathbb{K}), \quad C_{21} \in \mathsf{M}_{n-r\times r}(\mathbb{K}), \quad C_{22} \in \mathsf{M}_{n-r}(\mathbb{K})$$

και τότε

$$B = P^{-1}CQ^{-1} = P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Επομένως:

$$AB = AP^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1} = Q\widetilde{I}_r PP^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1} = Q\widetilde{I}_r \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\widetilde{I}_r \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ O_{r\times r} & O_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$

και επομένως θα έχουμε:

$$AB = Q \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ O_{r\times r} & O_{n-r\times n-r} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Δηλαδή ο πίνακας AB είναι όμοιος με τον πίνακα

$$M = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ O_{r\times r} & O_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$

Επίσης:

$$BA = P^{-1}CQ^{-1}A = P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1}\, Q\widetilde{I}_r P = P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \widetilde{I}_r P$$

Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \widetilde{I}_r = \begin{pmatrix} C_{11} & \mathbb{O}_{r\times n-r} \\ C_{21} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$

Άρα θα έχουμε

$$BA = P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & O_{r\times n-r} \\ C_{21} & O_{n-r\times n-r} \end{pmatrix} P$$

Δηλαδή ο πίνακας BA είναι όμοιος με τον πίνακα

$$N = \begin{pmatrix} C_{11} & O_{r\times n-r} \\ C_{21} & O_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$

Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα έχουμε

$$P_{AB}(t) = P_M(t)$$
$$P_{BA}(t) = P_N(t)$$

Όμως:

$$P_M(t) = \begin{vmatrix} C_{11} - tI_r & C_{12} \\ {}_{r\times r} & O_{n-r\times n-r} - tI_{n-r\times n-r} \end{vmatrix} = (-1)^{n-r} P_{C_{11}}(t)$$

και

$$P_N(t) = \begin{vmatrix} C_{11} - tI_r & O_{r\times n-r} \\ C_{21} & O_{n-r\times n-r} - tI_{n-r\times n-r} \end{vmatrix} = (-1)^{n-r} P_{C_{11}}(t)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $P_M(t) = P_N(t)$ και επομένως

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$

□

Άσκηση 32. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω $f,\ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Τότε οι ενδομορφισμοί $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:*

$$P_{f\circ g}(t) = P_{g\circ f}(t)$$

Λύση. Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση του $\mathcal{E}$ και $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ και $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$. Τότε από την Άσκηση 31 έχουμε: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$. Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας γραμμικής απεικόνισης συμπίπτει με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακά της σε τυχούσα βάση, έπεται ότι:

$$P_f(t) = P_A(t) \qquad \text{και} \qquad P_g(t) = P_B(t)$$

Επειδή ο πίνακας της $f \circ g$ στην βάση $\mathcal{B}$ είναι ο AB, δηλαδή $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ g) = AB$, και ο πίνακας της $g \circ f$ στην βάση $\mathcal{B}$ είναι ο BA, δηλαδή $M_{B}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = BA$, θα έχουμε:

$$P_{f\circ g}(t) = P_{AB}(t) = P_{BA}(t) = P_{g\circ f}(t)$$

□

Άσκηση 33. *Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι 3 και -1. Έστω $n \geq 0$. Να βρεθεί ο πίνακας A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$, συναρτήσει των πινάκων A και I_2, σε δύο μέρη:*

(1) *Να βρεθούν αριθμοί $a_n, b_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{n+1} = a_nA + b_nI_2$.*
(2) *Να βρεθούν αριθμοί $c_n, d_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{-n-1} = c_nA + d_nI_2$.*

Λύση. Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι οι αριθμοί 3 και -1, έπεται ότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο θα είναι

$$P_A(t) = (t-3)(t+1) = t^2 - 2t - 3$$

Επειδή ο A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, έπεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Προφανώς θα έχουμε:

$$A = 1A + 0I_2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = 1 \ \text{ και } \ b_0 = 0$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι $P_A(A) = O$, και επομένως:

$$P_A(A) = O \quad \Longrightarrow \quad A^2 - 2A - 3I_2 = O \quad \Longrightarrow \quad A^2 = 2A + 3I_2 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 2 \ \text{ και } \ b_1 = 3$$

Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι:

$$A^2 = 2A + 3I_2 \quad \Longrightarrow \quad A^3 = 2A^2 + 3A = 2(2A + 3I_2) + 3A = 7A + 6I_2 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = 7 \ \text{ και } \ b_2 = 6$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε προσδιορίσει τις ακολουθίες αριθμών $\{a_n\}_{n\geq 0}$ και $\{b_n\}_{n\geq 0}$ έτσι ώστε $A^{n+1} = a_nA + b_nI_2$. Τότε:

$$a_{n+1}A + b_{n+1}I_2 = A^{n+2} = A \cdot A^{n+1} = A(a_nA + b_nI_2) = a_nA^2 + b_nA = a_n(2A + 3I_2) + b_nA \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad a_{n+1}A + b_{n+1}I_2 = (2a_n + b_n)A + 3a_nI_2 \qquad (\dagger)$$

Ισχυρισμός: Οι πίνακες A, I_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του χώρου $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$.

Πράγματι αν οι πίνακες A, I_2 είναι γραμμικά εξαρτημένοι, τότε υπάρχουν αριθμοί $(x, y) \neq (0, 0)$ έτσι ώστε : $xA + yI_2 = O$. Αν $x = 0$, τότε θα έχουμε $yI_2 = 0$ από όπου άμεσα προκύπτει ότι $y = 0$ και αυτό είναι άτοπο διότι $(x, y) \neq (0, 0)$. Άρα $x \neq 0$ και τότε $A = -\frac{y}{x}I_2$ και αυτό σημαίνει ότι $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, όπου $\lambda = -\frac{y}{x}$, ιδιαίτερα έπεται οτι η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η λ με πολλαπλότητα ίση με δύο. Αυτό είναι άτοπο διότι ο πίνακας έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές. Επομένως οι πίνακες A, I_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των πινάκων A, I_2 και τη σχέση (†) έπεται ότι:

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad \text{και} \quad b_{n+1} = 3a_n \tag{††}$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{††}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = B^2 \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = B^3 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = B^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Θα προσδιορίσουμε την n-οστή δύναμη του πίνακα B. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι

$$P_B(t) = |B - t_2| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 3 & -t \end{vmatrix} = -2t + t^2 - 3 = t^2 - 2t - 3$$

Επειδή $t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$, έπεται ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1$. Επειδή ο πίνακας B έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, έπεται ότι ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος.

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(3)$, θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \implies x = y \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\mathcal{V}(3) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_2 \mid x \in \mathbb{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(-1)$, θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \implies -3x = y \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\mathcal{V}(-1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_2 \mid x \in \mathbb{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(3)$ είναι η στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(-1)$ είναι η στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Επομένως, θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε:

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies B = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \implies$$

$$\implies B^n = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^{n+1} - 3(-1)^n & 3^n + 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

Τότε από τη σχέση (††) προκύπτει ότι:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^{n+1} - 3(-1)^n & 3^n + 3(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+2} + (-1)^{n+1} \\ 3^{n+2} + 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$a_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4} \qquad \text{και} \qquad b_n = \frac{3^{n+1} + 3(-1)^{n-1}}{4}$$

και άρα, $\forall n \geq 0$:

$$\boxed{A^{n+1} = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4} A + \frac{3^{n+1} + 3(-1)^{n-1}}{4} I_2}$$

(2) Επειδή ο αριθμός 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A, έπεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Επειδή όπως είδαμε $A^2 - 2A - 3I_2 = O$, θα έχουμε:

$$A^2 - 2A = 3I_2 \implies A(A - 2I_2) = 3I_2 \implies A\left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_2\right) = I_2 \implies$$

$$\implies A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_2 = \frac{1}{3}\left(A - 2I_2\right)$$

Τότε:

$$A^{-n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \left(A - 2I_2\right)^{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} \left(A - 2I_2\right)^{n+1} \qquad (\star)$$

Άρα αρκεί να υπολογίσουμε την n-οστή δύναμη του πίνακα $C = A - 2I_2$.

Υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$C^2 = -2A + 7I_2$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε προσδιορίσει τις ακολουθίες αριθμών $\{c_n\}_{n\geq 0}$ και $\{d_n\}_{n\geq 0}$ έτσι ώστε, $\forall n \geq 2$: $C^n = c_{n-1}A + d_{n-1}I_2$. Τότε:

$$c_0 = 1 \quad \text{και} \quad d_0 = -2 \qquad \text{και} \qquad c_1 = -2 \quad \text{και} \quad d_1 = 7$$

$$c_nA + d_nI_2 = C^{n+1} = C \cdot C^n = (A - 2I_2)(c_{n-1}A + d_{n-1}I_2) = \cdots = d_{n-1}A + (3c_{n-1} - 2d_{n-1}I_2)$$

$$\implies c_nA + d_nI_2 = d_{n-1}A + (3c_{n-1} - 2d_{n-1}I_2)$$

Επειδή όπως είδαμε οι πίνακες A και I_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, έπεται ότι

$$c_{n-1} = d_{n-1} \qquad \text{και} \qquad d_n = 3c_{n-1} - 2d_{n-1}$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

και επομένως, θέτοντας

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = D^2 \begin{pmatrix} c_{n-2} \\ d_{n-2} \end{pmatrix} = D^3 \begin{pmatrix} c_{n-3} \\ d_{n-3} \end{pmatrix} = \cdots = D^n \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Το χαρακτηριστικό πολυλωνυμο του πίνακα D είναι το $P_D(t) = t^2 + 2t - 3$ και οι ρίζες του, δηλαδή οι ιδιοτιμές του D, είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -3$. Προφανώς τότε ο πίνακας D είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα είναι όμοιος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Εύκολα υπολογίζουμε

$$\mathcal{V}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{V}(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομέμνως ο πίνακας $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο τον πίνακα $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, και ικανοποιεί τη σχέση:

$$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \implies D = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1} \implies D^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3+(-3)^{n+1} & 1-(-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Άρα

$$D^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3+(-3)^{n+1} & 1-(-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

και τότε από τη σχέση $(**)$ θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = D^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3+(-3)^{n+1} & 1-(-3)^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+3(-3)^n \\ 1+3(-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$c_n = \frac{1+3(-3)^n}{4} \quad \text{και} \quad d_n = \frac{1+3(-3)^{n+1}}{4}$$

και άρα, $\forall n \geq 0$:

$$A^{-n-1} = \frac{1}{3^{n+1}}C^{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}\big(c_nA + d_nI_2\big) = \frac{1}{3^{n+1}}\left(\frac{1+3(-3)^n}{4}A + \frac{1+3(-3)^{n+1}}{4}I_2\right)$$

Επομένως:

$$\boxed{A^{-n-1} = \frac{1+3(-3)^n}{4\cdot 3^{n+1}}\,A \;+\; \frac{1+3(-3)^{n+1}}{4\cdot 3^{n+1}}\,I_2}$$

□

Άσκηση 34 (Θεώρημα Cayley-Hamilton)**.** *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Αν $P_A(t)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, να δειχθεί ότι:*

$$P_A(A) = O$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το

$$P_A(t) = |A - tI_n| = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_2t^2 + a_1t + a_0 \tag{†}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $A - tI_n$ και τον προσαρτημένο του πίνακα $\mathsf{adj}(A - tI_n)$. Γνωρίζουμε ότι[5] θα έχουμε τότε την ακόλουθη σχέση μεταξύ πινάκων με στοιχεία πολυώνυμα με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$:

$$(A - tI_n)\cdot \mathsf{adj}(A - tI_n) = |A - tI_n|I_n = \mathsf{adj}(A - tI_n)\cdot(A - tI_n)$$

και επομένως

$$(A - tI_n)\cdot \mathsf{adj}(A - tI_n) = P_A(t)I_n = \mathsf{adj}(A - tI_n)\cdot(A - tI_n)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$A\cdot\mathsf{adj}(A - tI_n) - t\mathsf{adj}(A - tI_n) = P_A(t)I_n \tag{$*$}$$

Από τον ορισμό του προσαρτημένου πίνακα, τα στοιχεία του $\mathsf{adj}(A - tI_n)$ είναι ελλάσσονες ορίζουσες $(n-1)\times(n-1)$ πινάκων με στοιχεία πολυώνυμα και άρα τα στοιχεία του $\mathsf{adj}(A - tI_n)$ είναι πολυώνυμα

[5] Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε πίνακα A με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, ισχύει η σχέση

$$A\cdot\mathsf{adj}(A) = |A|I_n = \mathsf{adj}(A)\cdot A$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η παραπάνω σχέση ισχύει και για πίνακες με στοιχεία πολυώνυμα με συντελεστές υπεράνω ενός σώματος.

βαθμού το πολύ $n-1$. Τότε ο πίνακας $\mathsf{adj}(A-tI_n)$ μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$ με συντελεστές $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$:

$$\mathsf{adj}(A-tI_n) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_{n-1}t^{n-1}, \qquad B_i \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}),\ \ 0 \leq i \leq n-1 \qquad (**)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (*) και (**) θα έχουμε:

$$A\big(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_{n-1}t^{n-1}\big) - t\big(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_{n-1}t^{n-1}\big) = P_A(t)I_n$$

Επομένως με αναγωγή ομοίων όρων προκύπτει ότι:

$$AB_0 + \big(AB_1 - B_0\big)t + \big(AB_2 - B_1\big)t^2 + \cdots + \big(AB_{n-1} - B_{n-2}\big)t^{n-1} - B_{n-1}t^n = P_A(t)I_n \qquad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις $(\dagger)$ και $(\dagger\dagger)$ τότε, εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0 I_n \\ AB_1 - B_0 &= a_1 I_n \\ AB_2 - B_1 &= a_2 I_n \\ &\vdots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I_n \\ -B_{n-1} &= (-1)^n I_n \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση με τον πίνακα I_n, τη δεύτερη σχέση με τον πίνακα A, την τρίτη σχέση με τον πίνακα A^2, $\cdots$, την τελευταία σχέση με τον πίνακα A^n, και ακολούθως προσθέτοντας τις σχέσεις που προκύπτουν, θα έχουμε:

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots a_{n-1}A^{n-1} + (-1)^n A^n = O$$

Επομένως:

$$P_A(A) = O \qquad \square$$

• • • • •

Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση Πινάκων

Η επόμενη ομάδα ασκήσεων **35** - **40** αφορά ταυτόχρονη διαγωνοποίηση ενδομορφισμών και τετραγωνικών πινάκων, με την ακόλουθη έννοια.

(1) Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f,\, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Τότε οι ενδομορφισμοί f και g καλούνται **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι**, αν υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g.

(2) Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Οι πίνακες A, B καλούνται **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1 \qquad \text{και} \qquad P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$$

όπου οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι διαγώνιοι. Δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ο οποίος διαγωνοποιεί ταυτόχρονα τους A, B.

Άσκηση 35. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Αν οι πίνακες A, B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι, τότε ισχύει ότι:*

$$A\,B = B\,A$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A, B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι. Τότε οι πίνακες είναι διαγωνοποιήσιμοι και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1 \qquad \text{και} \qquad P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$$

όπου οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι διαγώνιοι. Τότε θα έχουμε:

$$P^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot B \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_1 \cdot \Delta_2$$
$$P^{-1} \cdot (B \cdot A) \cdot P = P^{-1} \cdot B \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot B \cdot P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_2 \cdot \Delta_1$$

Επειδή προφανώς διαγώνιοι πίνακες μετατίθενται, θα έχουμε $\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \Delta_2 \cdot \Delta_1$. Τότε

$$P^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot P = P^{-1} \cdot (B \cdot A) \cdot P \implies (A \cdot B) \cdot P = (B \cdot A) \cdot P \implies A \cdot B = B \cdot A \qquad \square$$

Άσκηση 36. *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \qquad \text{και} \qquad f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$$

Θεωρούμε τον επαγόμενο ενδομορφισμό $f_{\mathcal{V}} = f|_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, όπου $f|_{\mathcal{V}}$ είναι ο περιορισμός του f στον υπόχωρο $\mathcal{V}$.

(1) *Να δειχθεί ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t)$ του $f_{\mathcal{V}}$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f:*

$$Q_{f_{\mathcal{V}}}(t) \mid Q_f(t)$$

(2) *Να δειχθεί ότι*

$$\text{Ο } f \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \implies \text{Ο } f_{\mathcal{V}} \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος}$$

Λύση. (1) Έστω $Q_f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_{m-1} t^{m-1} + t^m$ το ελάχιστο πολυώνυμο του f, και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$Q_f(f_{\mathcal{V}}) = a_0 \mathsf{Id}_{\mathcal{V}} + a_1 f_{\mathcal{V}} + \cdots + a_{m-1} (f_{\mathcal{V}})^{m-1} + (f_{\mathcal{V}})^m : \mathcal{V} \longrightarrow V$$

Τότε, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$: $Q_f(f_{\mathcal{V}})(\vec{v}) = a_0(\vec{v}) + a_1 f_{\mathcal{V}}(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1}(f_{\mathcal{V}})^{m-1}(\vec{v}) + (f_{\mathcal{V}})^m(\vec{v})$. Επειδή $f_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = f(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$, έπεται ότι θα έχουμε: $Q_f(f_{\mathcal{V}})(\vec{v}) = a_0(\vec{v}) + a_1 f(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{v}) + f^m(\vec{v}) = (a_0 \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + a_1 f + \cdots a_{m-1} f^{m-1} + f^m)(\vec{v}) = Q_f(f)(\vec{v}) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q_f(t)$ μηδενίζει την $f_{\mathcal{V}}$. Τότε όμως το $Q_f(t)$ θα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο της $f_{\mathcal{V}}$: $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t) \mid Q_f(t)$.

(2) Από το μέρος (1), έχουμε $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t) \mid Q_f(t)$. Επειδή ο f είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του $f_{\mathcal{V}}$ είναι διαιρέτης του $Q_f(t)$, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t)$ του $f_{\mathcal{V}}$ αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Επομένως ο $f_{\mathcal{V}}$ είναι διαγωνοποιήσιμος. $\square$

Άσκηση 37. *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k \qquad \text{και} \qquad f(\mathcal{V}_i) \subseteq \mathcal{V}_i, \;\; 1 \leq i \leq k$$

Θεωρούμε τους επαγόμενους ενδομορφισμούς $f_{\mathcal{V}_i} \colon \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{V}_i$, όπου $f_{\mathcal{V}_i} = f|_{\mathcal{V}_i}$ είναι ο περιορισμός του f στον υπόχωρο $\mathcal{V}_i$. Τότε:

$$\text{Ο } f \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \iff \text{Ο } f_{\mathcal{V}_i} \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος}, \quad 1 \leq i \leq k$$

Λύση. Αν ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε από την Άσκηση 36 έπεται ότι κάθε ενδομορφισμός $f_{\mathcal{V}_i}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, $1 \leq i \leq k$.

Αντίστροφα, έστω $\mathcal{B}_i$ μια βάση του $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq k$, η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα τοψ $f_{\mathcal{V}_i}$. Από το ορισμό των ενδομορφισμών $f_{\mathcal{V}_i}$, έπεται προφανώς ότι τα διανύσματα κάθε βάσης $\mathcal{B}_i$ είναι και ιδιοδιανύσματα του f. Επειδή το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_k$ είναι ευθύ και μας δίνει τον χώρο $\mathcal{E}$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f. Άρα ο f είναι διαγωνοποιήσιμος. $\square$

Άσκηση 38. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f,\, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι διαγωνοποιήσιμοι και $f \circ g = g \circ f$. Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g.*

Λύση. Επειδή ο g είναι διαγωνοποιήσιμος, όπως γνωρίζουμε θα έχουμε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_g(\lambda_1) \oplus \mathcal{V}_g(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_g(\lambda_k)$$

όπου $\lambda_1, \cdots \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του g και $\mathcal{V}_g(\lambda_i)$ είναι οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι:

$$\mathcal{V}_g(\lambda_i) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid g(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x}\}, \qquad 1 \leq i \leq k$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_g(\lambda_i)$. Τότε $g(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x}$ και επομένως, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$:

$$f(g(\vec{x})) = f(\lambda_i \vec{x}) \implies (f \circ g)(\vec{x}) = \lambda_i f(\vec{x}) \implies (g \circ f)(\vec{x}) = \lambda_i f(\vec{x}) \implies g(f(\vec{x})) = \lambda_i f(\vec{x})$$

Επομένως το διάνυσμα $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}_g(\lambda_i)$, και άρα: $f(\mathcal{V}_g(\lambda_i) \subseteq \mathcal{V}_g(\lambda_i)$. Αυτό σημαίναι ότι μπορούμε να περιορίσουμε τον f σε έναν ενδομορφισμό

$$f_i := f|_{\mathcal{V}_g(\lambda_i)} :\ \mathcal{V}_g(\lambda_i) \longrightarrow \mathcal{V}_g(\lambda_i), \quad f_i(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Επειδή ο f είναι διαγωνοποιήσιμος, από την Άσκηση 37 έπεται ότι ο ενδομορφισμός f_i είναι διαγωνοποιήσιμο, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$. Έστω $\mathcal{B}_i$ μια βάση του $\mathcal{V}_g(\lambda_i)$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f_i. Από το ορισμό των ενδομορφισμών f_i, έπεται προφανώς ότι τα διανύσματα κάθε βάσης $\mathcal{B}_i$ είναι και ιδιοδιανύσματα του f. Επειδή το άθροισμα $\mathcal{V}_g(\lambda_1) + \mathcal{V}_g(\lambda_2) + \cdots + \mathcal{V}_g(\lambda_k)$ είναι ευθύ και μας δίνει τον χώρο $\mathcal{E}$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f. Επειδή $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{V}_g(\lambda_i)$ έπεται ότι τα διανύσματα κάθε βάσης $\mathcal{B}_i$ είναι και ιδιοδιανύσματα του g. Καταλήγουμε ότι η βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g. □

Η ακόλουθη Άσκηση παρουσιάζει ένα κριτήριο ταυτόχρονης διαγωνοποίησης για ενδομορφισμούς.

Άσκηση 39. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f,\, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Οι f και g είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.*
(2) *Οι f και g είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $f \circ g = g \circ f$.*

Λύση. (2) $\Longrightarrow$ (1) Η κατεύθυνση αυτή αποδείχθηκε στην Άσκηση 38.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Έστω ότι οι f και g είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι, δηλαδή υπάρχει βάση

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \cdots,\, \vec{e}_n\big\}$$

του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g, τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ του f και στις ιδιοτιμές $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ του g. Τότε:

$$(f \circ g)(\vec{e}_i) = f(g(\vec{e}_i)) = f(\mu_i \vec{e}_i) = \mu_i f(\vec{e}_i) = \mu_i \lambda_i \vec{e}_i$$

$$(g \circ f)(\vec{e}_i) = g(f(\vec{e}_i)) = g(\lambda_i \vec{e}_i) = \lambda_i g(\vec{e}_i) = \lambda_i \mu_i \vec{e}_i$$

Επομένως $(f \circ g)(\vec{e}_i) = (g \circ f)(\vec{e}_i)$, για κάθε διάνυσμα $\vec{e}_i$ της βάσης $\mathcal{C}$. Τότε όμως προφανώς $f \circ g = g \circ f$. □

Η ακόλουθη Άσκηση παρουσιάζει ένα κριτήριο ταυτόχρονης διαγωνοποίησης για τετραγωνικούς πίνακες.

Άσκηση 40. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Οι πίνακες A και B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.*
(2) *Οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $A\,B = B\,A$.*

Λύση. (1) $\Longrightarrow$ (2) Η κατεύθυνση αυτή αποδείχθηκε στην Άσκηση 35.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $A\,B = B\,A$. Θεωρούμε τους ενδομορφισμούς

$$f_A,\ f_B : \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \qquad f_A(X) = A \cdot X \quad \text{και} \quad f_B(X) = B \cdot X$$

Επειδή οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι, έπεται ότι και οι ενδομορφισμοί f_A και f_B είναι διαγωνοποιήσιμοι. Επειδή $A \cdot B = B \cdot A$, έπεται άμεσα ότι $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$. Τότε από την Άσκηση 39 έπεται ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{K}_n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f_A και του f_B. Άρα ο πίνακας του f_A στην $\mathcal{C}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας Δ_1 και ο πίνακας του f_B στην $\mathcal{C}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας Δ_2. Τότε όμως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε οι πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1$ και $P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$. $\square$

• • • • •

Αλγόριθμος Τριγωνοποίησης Πίνακα

Οι υπόλοιπες ασκήσεις είναι αφιερωμένες στην τριγωνοποίηση τετραγωνικών πινάκων με βάση τον αλγόριθμο τριγωνοποίησης ο οποίος περιγράφεται στη συνέχεια.

Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας πίνακας και υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A να αναλύεται ως εξής:

$$P_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{a_1} (t - \lambda_2)^{a_2} \ \cdots \ (t - \lambda_k)^{a_k}$$

Έτσι $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του A. Τότε όπως γνωρίζουμε ο πίνακας A είναι τριγωνοποιήσιμος. Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1}\, A\, P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \epsilon_{12} & \cdots & \epsilon_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \epsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \epsilon_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμος Τριγωνοποίησης του A

1. Επιλέγουμε μια ιδιοτιμή λ_1 του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα-στήλη E_1:

$$A \cdot E_1 = \lambda_1 E_1$$

και συμπλήρώνουμε το ιδιοδιάνυσμα E_1 σε μια βάση

$$\mathcal{B}_1 = \big\{E_1, E_2, \cdots, E_n\big\}$$

του χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$P_1 = \big(E_1 E_2 \cdots E_n\big)$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες της βάσης $\mathcal{B}_1$. Τότε ο πίνακας $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1 = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & * & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & B_1 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right)$$

Ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας B_1 έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{K}$ διότι

$$P_A(t) = P_{P_1^{-1}\cdot A\cdot P_1}(t) = (\lambda_1 - t)P_{B_1}(t)$$

(α΄) Αν ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας B_1 είναι άνω τριγωνικός, ο αλγόριθμος σταματάει και έχουμε βρει την άνω τριγωνική μορφή του A η οποία είναι ο πίνακας $P^{-1}\cdot A\cdot P_1$.

(β΄) Αν ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας B_1 δεν είναι άνω τριγωνικός, τότε προχωρούμε στο επόμενο βήμα:

2. Επιλέγουμε μια ιδιοτιμή λ_2 του B_1 (η οποία εκ΄ κατασκευής είναι και ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα E_2':

$$B_1\cdot E_2' = \lambda_2 E_2'$$

και συμπλήρώνουμε το ιδιοδιάνυσμα E_2' σε μια βάση

$$\mathcal{B}_2 = \left\{E_2', E_3', \cdots, E_n'\right\}$$

του χώρου των στηλών $\mathbb{K}_{n-1}$.

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα

$$P_2 = \left(E_2' E_3' \cdots E_n'\right)$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες της βάσης $\mathcal{B}_2$. Τότε ο πίνακας $P_2^{-1}\cdot B_1\cdot P_2$ θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$P_2^{-1}\cdot B_1\cdot P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \; * \; * \; \dots \; * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{B_2} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Ο $(n-2)\times(n-2)$ πίνακας B_2 έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{K}$ διότι

$$P_{B_1}(t) = P_{P_2^{-1}\cdot B_1\cdot P_2}(t) = (\lambda_2 - t)P_{B_2}(t)$$

(α΄) Αν ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας B_2 είναι άνω τριγωνικός, ο αλγόριθμος σταματάει και έχουμε βρει την άνω τριγωνική μορφή του A ως εξής:

Θέτουμε

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \; 0 \; \dots \; 0 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{P_2} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Τότε ο πίνακας Q_2 είναι αντιστρέψιμος, διότι $|Q_2| = 1|P_2| = |P_2| \neq 0$, και

$$Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \; 0 \; \dots \; 0 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{P_2^{-1}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Επιπλέον έχουμε:

$$(P_1Q_2)^{-1}\cdot A(P_1Q_2) = Q_2^{-1}\cdot (P_1^{-1}\cdot A\cdot P_1)\cdot Q_2 =$$

$$Q_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & B_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \cdot Q_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & P_2^{-1} & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & B_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & P_2 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & P_2^{-1} \cdot B_1 \cdot P_2 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & B_2 & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Επειδή ο B_2 είναι άνω τριγωνικός, έπεται ότι και ο A είναι άνω τριγωνικός και ο τελευταίος πίνακας, δηλαδή ο πίνακας $(P_1Q_2)^{-1} \cdot A(P_1Q_2)$ είναι μια άνω τριγωνική μορφή του A.

(β΄) Αν ο $(n-2)\times(n-2)$ πίνακας B_2 δεν είναι άνω τριγωνικός, τότε προχωρούμε στο επόμενο βήμα:

3. Το βήμα αυτό είναι η επανάληψη του βήματος **2.** για τον $(n-2)\times(n-2)$ πίνακα B_2.

4. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία η οποία μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων προφανώς θα μας οδηγήσει στην άνω τριγωνική μορφή του πίνακα A. ■

Ο παραπάνω αλγόριθμος τριγωνοποίησης δείχνει ότι αν ένας πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα $\mathbb{K}$, τότε ο A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα. Αντίστροφα, αν ο πίνακας A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα τότε προφανώς όλες οι ιδιοτιμές του ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$ καθώς είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου της άνω τριγωνικής μορφής του A. Άρα η προηγηθείσα ανάλυση δείχνει ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) *Ο πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα.*
(2) *Ο πίνακας A έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα $\mathbb{K}$.*

Άσκηση 41. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός.*

Λύση. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 2 & -2-t & 2 \\ 2 & -3 & 2-t \end{vmatrix} = -t \begin{vmatrix} -2-t & 2 \\ -3 & 2-t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2-t \end{vmatrix} = -t^3$$

Επομένως η μόνη ιδιοτιμή του πίνακα A είναι η $\lambda_A = 0$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(0)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

και άρα

$$\mathcal{V}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται διότι

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(0) = 1 \neq 3 = \text{πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_A = 0$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας τον αλγόριθμο τριγωνοποίησης όπως αυτός περιγράφεται παραπάνω, θα βρούμε αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός. Ξεκινάμε πρώτα συμπληρώνοντας το διάνυσμα της βάσης του $\mathcal{V}(0)$ σε μια βάση του $\mathbb{R}_3$. Το σύνολο

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια βάση του $\mathbb{R}_3$. Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος σχηματίστηκε από τις στήλες της βάσης $\mathcal{B}_1$. Τότε

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Αφού ο πίνακας $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$ δεν είναι άνω τριγωνικός συνεχίζουμε τη διαδικασία του αλγόριθμου τριγωνοποίησης. Θεωρούμε το πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

και τότε

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -2 - t & 2 \\ -2 & 2 - t \end{vmatrix} = t^2$$

Άρα ο πίνακας B έχει ιδιοτιμή την $\lambda_B = 0$ με πολλαπλότητα 2. Να σημειώσουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι και ιδιοτιμές του A, και άρα η μόνη ιδιοτιμή του B είναι πράγματι η $\lambda_B = 0$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(0)$ λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies y = x$$

και άρα

$$\mathcal{V}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Συνεπώς ο πίνακας B δεν διαγωνοποιείται διότι

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(0) = 1 \neq 2 = \text{πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_B = 0$$

και άρα συνεχίζουμε τον αλγόριθμο τριγωνοποίησης, δηλαδή συμπληρώνουμε το διάνυσμα της βάσης του $\mathcal{V}(0)$ σε μια βάση του $\mathbb{R}_2$. Το σύνολο

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια βάση του $\mathbb{R}_2$ και άρα έχουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε υπολογίζουμε:

$$P_2^{-1} \cdot B \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή ο πίνακας $P_2^{-1} \cdot B \cdot P_2$ είναι άνω τριγωνικός και άρα ο αλγόριθμος τριγωνοποίησης σταματάει. Τέλος υπολογίζουμε την άνω τριγωνική μορφή του πίνακα A. Θέτουμε

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και τότε έχουμε:

$$(P_1 \cdot Q_2)^{-1} \cdot A \cdot (P_1 \cdot Q_2) = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως βρήκαμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $P := P_1 \cdot Q_2$ έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός. □

Άσκηση 42. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 11 \\ -3 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι άνω τριγωνικός.

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = -(t-1)^3$$

και άρα η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

Επομένως ο πίνακας A είναι τριγωνοποιήσιμος. Εφαρμόζουμε το Αλγόριθμο Τριγωνοποίησης για να υπολογίσουμε μια άνω τριγωνική μορφή του A:

1. Για την ιδιοτιμής $\lambda = 1$, υπολογίζουμε τον ιδιοχώρο

$$\mathcal{V}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k/2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και άρα έβα ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε το E_1 σε μια βάση $\mathcal{B}_1$ του $\mathbb{R}_3$, για παράδειγμα:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P_1 = (E_1 E_2 E_3)$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του P_1:

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως τον πίνακα $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$:

$$P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο 2×2 πίνακας

$$B_1 := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν είναι άνω τριγωνικός, επομένως προχωρούμε στο επόμενο βήμα:

2. Οι ιδιοτιμές του B_1 είναι οι ιδιοτιμές του A, και άρα η μόνη ιδιοτιμή του B_1 είναι η $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2.

Για την ιδιοτιμής $\lambda = 1$ του 2×2 πίνακα B_1, υπολογίζουμε τον ιδιοχώρο

$$\mathcal{V}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ -2k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και άρα ένα ιδιοδιάνυσμα του B_1 το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το

$$E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε το E_2' σε μια βάση $\mathcal{B}_2$ του $\mathbb{R}_2$, για παράδειγμα:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \;\; E_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P_1 = (E_2' E_3')$:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του P_2:

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως τον πίνακα $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$:

$$P_1^{-2} \cdot B_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := B_2$$

ο οποίος είναι άνω τριγωνικός. Άρα ο αλγόριθμος τριγωνοποίησης σταματάει και μπορούμε να υπολογίσουμε την άνω τριγωνική μορφή ως εξής:

Θέτουμε

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & \boxed{\quad P_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την άνω τριγωνική μορφή του πίνακα A ως εξής:

$$(P_1 Q_2)^{-1} \cdot A \cdot (P_1 Q_2) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$