ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 31 Μαρτίου 2023

Αν $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων ενός Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, τότε, για να μην δημιουργείται σύγχιση με το σύμβολο του εσωτερικού γινομένου $\langle , \rangle$, **ο υπόχωρος του** $\mathcal{E}$ **ο οποίος παράγεται** από το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C}$, αντί να συμβολίζεται με $\langle \mathcal{C} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, θα συμβολίζεται με:

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \{\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η **ορθογώνια προβολή** ενός διανύσματος $\vec{x}$ σε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{y}$ είναι το διάνυσμα:

$$\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}\, \vec{y} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}\, \vec{y}$$

και έχει την ιδιότητα ότι:

$$\Big(\vec{x} - \Pi_{\vec{y}}(\vec{x})\Big) \perp \vec{y}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{E}$, τότε με τη **διαδικασία Gram-Schmidt** κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων $\mathcal{D} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\}$ και ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$, όπου:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{και} \quad \vec{y}_k = \vec{x}_k - \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) - \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_k) - \cdots - \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k), \quad 2 \leq k \leq n \tag{†}$$

και

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{y}_k}{\|\vec{y}_k\|}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Άσκηση 1. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, και $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{E}$. Έστω $\mathcal{D} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\}$ το ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων και $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ το ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων, τα οποία κατασκευάζονται με τη διαδικασία Gram-Schmidt. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k) = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

Λύση. Επειδή, $\forall k = 1, 2, \cdots, n$: $\vec{e}_k = \frac{\vec{y}_k}{\|\vec{y}_k\|}$, έπεται προφανώς ότι $\mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k) = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k)$. Πράγματι, αν $\vec{z} \in \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ έτσι ώστε:

$$\vec{z} = \lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{y}_k = \lambda_1\|\vec{y}_1\|\vec{e}_1 + \lambda_2\|\vec{y}_2\|\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_k\|\vec{y}_k\|\vec{e}_k \in \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k)$$

Άρα $\mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k) \subseteq \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k)$. Αντίστροφα, αν $\vec{z} \in \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k)$, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ έτσι ώστε:

$$\vec{z} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{e}_k = \lambda_1\frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} + \lambda_2\frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} + \cdots + \lambda_k\frac{\vec{y}_k}{\|\vec{y}_k\|} \in \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$$

Άρα $\mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k) \subseteq \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$ και επομένως: $\mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k) = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k)$.

Θα αποδείξουμε με χρήση Μαθηματικής Επαγωγής ότι: $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$.

(1) Αν $k = 1$, τότε έχουμε ότι $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$ και επομένως: $\mathcal{L}(\vec{x}_1) = \mathcal{L}(\vec{y}_1)$.

(2) Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι, αν $1 < k \leq n$, τότε για κάθε $1 \leq r < k$ ισχύει ότι:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_r) = \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_r)$$

(3) Έστω $\vec{z} \in \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ έτσι ώστε: $\vec{z} = \lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{y}_k$. Από την Επαγωγική Υπόθεση προκύπτει οτι $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_{k-1} \in \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})$, δηλαδή κάθε ένα από τα διανύσματα $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_{k-1}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}$. Τότε όμως και το διάνυσμα:

$$-\frac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_1 \rangle}{\|\vec{y}_1\|^2}\,\vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_2 \rangle}{\|\vec{y}_2\|^2}\,\vec{y}_2 - \cdots - \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_{k-1} \rangle}{\|\vec{y}_{k-1}\|^2}\,\vec{y}_{k-1}$$

είναι γραμμικός συνδθασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}$. Από τη σχέση

$$\vec{y}_k = \vec{x}_k - \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_1 \rangle}{\|\vec{y}_1\|^2}\,\vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_2 \rangle}{\|\vec{y}_2\|^2}\,\vec{y}_2 - \cdots - \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_{k-1} \rangle}{\|\vec{y}_{k-1}\|^2}\,\vec{y}_{k-1}$$

τότε προκύπτει ότι το διάνυσμα $\vec{y}_k$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_k$, δηλαδή $\vec{y}_k \in \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_k)$. Τότε όμως και το διάνυσμα $\vec{z} = \lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{y}_k$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_k$, δηλαδή $\vec{z} \in \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_k)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k) \;\subseteq\; \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) \qquad (*)$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\vec{z} \in \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k)$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ έτσι ώστε: $\vec{z} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{x}_k$. Θέτουμε $\vec{w} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \vec{x}_{k-1} \in \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})$ και τότε $\vec{z} = \vec{w} + \vec{x}_k$. Από την Επαγωγική Υπόθεση έπεται ότι $\vec{w} \in \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_{k-1}) \subseteq \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$.

Από την άλλη πλευρά από τη σχέση $(\dagger)$ έχουμε ότι

$$\vec{x}_k = \vec{y}_k + \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_1 \rangle}{\|\vec{y}_1\|^2}\,\vec{y}_1 + \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_2 \rangle}{\|\vec{y}_2\|^2}\,\vec{y}_2 + \cdots + \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_{k-1} \rangle}{\|\vec{y}_{k-1}\|^2}\,\vec{y}_{k-1}$$

και άρα $\vec{x}_k \in \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$. Επειδή $\vec{w}, \vec{x}_k \in \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$ και $\vec{z} = \vec{w} + \vec{x}_k$, έπεται ότι $\vec{z} \in \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$ και επομένως

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) \;\subseteq\; \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k) \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ προκύπτει το ζητούμενο

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) \;=\; \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$$

Σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $k = 1, 2, \cdots, n$.

$\square$

4. Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Υπενθυμίζουμε από το Φυλλάδιο Ασκήσεων ότι ο **πίνακας Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως εξής:

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{pmatrix}$$

και η **ορίζουσα Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως η ορίζουσα του πίνακα Gram:

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{vmatrix}$$

Άσκηση 2. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| \ \geq \ 0$$

Λύση. Αν τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε από την Άσκηση **20** του Φυλλαδίου Ασκήσεων **4** γνωρίζουμε ότι $\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| \ = \ 0$.

Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$. Τότε, επειδή υπόχωροι Ευκλείδειων χώρων είναι Ευκλέιδειοι χώροι, έπεται ότι ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F} = n$. Έστω $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{F}$.

Εκφράζουμε τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$ και θα έχουμε:

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{x}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n \\ \qquad\qquad\vdots \\ \vec{x}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n \end{cases}$$

Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Επειδή το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ είναι επίσης μια βάση του $\mathcal{F}$, έπεται ότι ο πίνακας A είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}, \quad \text{και ιδιαίτερα:} \quad |A| \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = {}^tA \cdot A \tag{$*$}$$

Πράγματι:

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)_{ij} = \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle \qquad \text{και} \qquad ({}^tA \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$$

Όμως, επειδή η βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθοκανονική, έπεται ότι:

$$\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\vec{e}_k, \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda j}\vec{e}_\lambda \right\rangle = \sum_{k,\lambda=1}^{n} a_{ki}a_{\lambda j}\langle \vec{e}_k, \vec{e}_\lambda \rangle = \sum_{k,\lambda=1}^{n} a_{ki}a_{\lambda j}\delta_{k\lambda} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$$

Επομένως πράγματι έχουμε $G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = {}^tA \cdot A$, και τότε θεωρώντας ορίζουσες προκύπτει ότι

$$|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)| = |{}^tA \cdot A| = |{}^tA| \cdot |A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 > 0$$

Άρα, συνοψίζοντας, δείξαμε ότι:

$$|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)| \ \geq \ 0 \qquad \square$$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\mathcal{V}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Υπενθυμίζουμε τότε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$ και η **ορθογώνια προβολή** του διανύσματος $\vec{x} \in \mathcal{E}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ είναι το (μοναδικό) διανυσμα $\vec{y} \in \mathcal{Y}$ έτσι ώστε $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, όπου $\vec{z} \in \mathcal{V}^\perp$, και συμβολίζεται με $\vec{y} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x})$. Το (μοναδικό) διάνυσμα $\vec{z}$ παραπάνω καλείται[1] η **κάθετη προβολή** του διανύσματος $\vec{x} \in \mathcal{E}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ και συμβολίζεται με $\vec{z} = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})$.

Με τους παραπάνω συμβολισμούς, έχουμε μοναδική γραφή:

$$\vec{x} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) + \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \quad \text{όπου} \quad \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V}^{\perp}$$

Άσκηση 3. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, και $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\}$ το ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων το οποίο κατασκευάζεται ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt. Να δειχθεί ότι, $\forall k = 2, \cdots, n$:*

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}) \oplus \mathcal{L}(\vec{y}_k) \qquad \textit{(ορθογώνιο ευθύ άθροισμα)} \tag{†}$$

Ιδιαίτερα να δειχθεί ότι για κάθε $k = 2, \cdots, n$, το διάνυσμα $\vec{y}_k$ είναι η κάθετη προβολή του $\vec{x}_k$ στον υπόχωρο $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})$:

$$\vec{y}_k = \mathsf{K}_{\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})}(\vec{x}_k)$$

Λύση. Έστω $k \geq 2$. Από τη διαδικασία Gram-Schmidt γνωρίζουμε ότι το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C}_k = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k\}$ είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα. Ιδιαίτερα έπεται ότι

$$\langle \vec{y}_k, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{y}_k, \vec{y}_2 \rangle = \cdots = \langle \vec{y}_k, \vec{y}_{k-1} \rangle = 0$$

Επειδή το σύνολο $\mathcal{C}_{k-1}$ είναι μια (ορθογώνια) βάση του $\mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_{k-1})$, έπεται ότι $\vec{y}_k \in \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_{k-1})^{\perp}$. Από την Άσκηση 1 γνωρίζουμε ότι $\mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_{k-1}) = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})$ και επομένως:

$$\vec{y}_k \ \in \ \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})^{\perp}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι υπόχωροι $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})$ και $\mathcal{L}(\vec{y}_k)$ είναι ορθογώνιοι:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}) \ \perp \ \mathcal{L}(\vec{y}_k)$$

και ιδιαίτερα έπεται ότι[2]:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}) \ \cap \ \mathcal{L}(\vec{y}_k) \ = \ \{\vec{0}\}$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k)$. Επειδή το σύνολο $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k$ είναι μια βάση του $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k)$, έπεται ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \lambda_k\vec{x}_k$$

για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση

$$\vec{y}_k = \vec{x}_k - \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) - \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_k) - \cdots - \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k)$$

προκύπτει ότι

$$\vec{x}_k = \vec{y}_k + \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) + \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_k) + \cdots - +\Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k)$$

Θέτοντας $\vec{z} = \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) + \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_k) + \cdots + \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k)$ έπεται ότι:

$$\vec{x}_k = \vec{z} + \vec{y}_k \tag{$*$}$$

όπου

$$\vec{z} \ \in \ \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_{k-1}) = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}) \qquad \text{και} \qquad \vec{y}_k \in \mathcal{L}(\vec{y}_k)$$

Τότε:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \lambda_k(\vec{z} + \vec{y}_k) = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \lambda_k\vec{z} + \lambda_k\vec{y}_k$$

Θέτοντας

$$\vec{w} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \lambda_k\vec{z} \ \in \ \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})$$

έχουμε ότι

$$\vec{x} = \vec{w} + \lambda_k\vec{y}_k \quad \text{όπου} \quad \vec{w} \in \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}) \quad \text{και} \quad \lambda_k\vec{y}_k \in (\lambda_k\vec{y}_k)$$

---

[1] Δηλαδή η κάθετη προβολή του $\vec{x}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στον $\mathcal{V}^{\perp}$:

$$\Pi_{\mathcal{V}^{\perp}}(\vec{x}) = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})$$

[2] Αν δύο υπόχωροι $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι ορθογώνιοι, τότε $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$. Πράγματι, αν $\vec{x} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, τότε θα έχουμε $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, διότι $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$. Επομένως $\vec{x} = \vec{0}$.

Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_k) \;\subseteq\; \mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1}) \,+\, \mathcal{L}(\vec{y}_k)$$

Επειδή $\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1}) \subseteq \mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1})$ και $\vec{y}_k \in \mathcal{L}(\vec{y}_1,\vec{y}_2,\cdots,\vec{y}_k) = \mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_k)$, έχουμε και $\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1}) + \mathcal{L}(\vec{y}_k) \subseteq \mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_k)$. Άρα

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1}) \,+\, \mathcal{L}(\vec{y}_k)$$

και επομένως, χρησιμοποιώντας ότι οι υπόχωροι $\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1})$ και $\mathcal{L}(\vec{y}_k)$ είναι ορθογώνιοι, προκύπτει ότι:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1}) \oplus \mathcal{L}(\vec{y}_k) \qquad \text{(ορθογώνιο ευθύ άθροισμα)}$$

Τέλος στη σχέση $(*)$ έχουμε

$$\vec{x}_k = \vec{z} + \vec{y}_k, \quad \text{όπου} \quad \vec{z} \in \mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1}) \quad \text{και} \quad \vec{y}_k \in \mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1})^{\perp}$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\vec{y}_k = \mathsf{K}_{\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1})}(\vec{x}_k) \quad \text{και} \quad \vec{z} = \Pi_{\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1})}(\vec{x}_k)$$

δηλαδή το διάνυσμα $\vec{z}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}_k$ στον υπόχωρο $\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1})$ και το διάνυσμα $\vec{y}_k$ είναι η κάθετη προβολή του $\vec{x}_k$ στον υπόχωρο $\mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_{k-1})$. □

Άσκηση 4. *Έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δυο υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E},\langle,\rangle)$.*

(1) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^{\perp} \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$$

(2) *Να δειχθεί ότι:*

$$(\mathcal{V}+\mathcal{W})^{\perp} = \mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp}$$

(3) *Αν* $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{E} < \infty$, *να δειχθεί ότι:*

(α΄)

$$(\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{V}$$

(β΄)

$$(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^{\perp} = \mathcal{V}^{\perp} + \mathcal{W}^{\perp}$$

(4) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{E} = \mathcal{V}^{\perp} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$$

Λύση. (1) Θα έχουμε:

$$\vec{x} \in \mathcal{W}^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \langle \vec{x},\vec{w}\rangle = 0, \ \ \forall \vec{w} \in \mathcal{W} \\ \qquad \text{και} \\ \quad \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \langle \vec{x},\vec{v}\rangle = 0, \ \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \in \mathcal{V}^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^{\perp} \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$$

(2) Έχουμε ότι $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}+\mathcal{W}$ και $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}+\mathcal{W}$. Άρα από το μέρος (1) έπεται ότι

$$\begin{cases} (\mathcal{V}+\mathcal{W})^{\perp} \subseteq \mathcal{V}^{\perp} \\ \\ (\mathcal{V}+\mathcal{W})^{\perp} \subseteq \mathcal{W}^{\perp} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{V}+\mathcal{W})^{\perp} \;\subseteq\; \mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp} \qquad (*)$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp}$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathcal{V}^{\perp}$ και $\vec{x} \in \mathcal{W}^{\perp}$. Άρα έχουμε ότι $\langle \vec{x},\vec{v}\rangle = 0$ και $\langle \vec{x},\vec{w}\rangle = 0$, για κάθε $\vec{v} \in \mathcal{V}$ και $\vec{w} \in \mathcal{W}$. Έστω $\vec{y} = \vec{v} + \vec{w}$ με $\vec{v} \in \mathcal{V}$ και $\vec{w} \in \mathcal{W}$. Τότε

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \langle \vec{x},\vec{v}\rangle + \langle \vec{x},\vec{w}\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \in (\mathcal{V}+\mathcal{W})^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp} \;\subseteq\; (\mathcal{V}+\mathcal{W})^{\perp} \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ έπεται το ζητούμενο:

$$(\mathcal{V}+\mathcal{W})^{\perp} \;=\; \mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp}$$

(3) (α') Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$. Τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{y} \in \mathcal{V}^{\perp}$ θα έχουμε προφανώς ότι $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{x} \in \mathcal{V}^{\perp\perp} = (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \ \forall \vec{y} \in \mathcal{V}^{\perp}\}$ και άρα $\mathcal{V} \subseteq (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp}$. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για κάθε υπόχωρο $\mathcal{Z}$ ενός Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης ισχύει ότι: $\mathcal{E} = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z}^{\perp}$. Επιλέγοντας διαδοχικά $\mathcal{Z} = \mathcal{V}$ και $\mathcal{Z} = \mathcal{V}^{\perp}$, θα έχουμε:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp} \\ \\ \mathcal{E} = \mathcal{V}^{\perp} \oplus (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^{\perp} \\ \\ \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^{\perp} + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} \end{cases}$$

και επομένως

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp}$$

Τότε:

$$\begin{cases} \mathcal{V} \subseteq (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} \\ \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} \end{cases} \Longrightarrow \quad \mathcal{V} = (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp}$$

(β') Χρησιμοποιώντας το μέρος (2) και το μέρος (α') του (3) έχουμε:

$$(\mathcal{V} + \mathcal{W})^{\perp} = \mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp} \Longrightarrow (\mathcal{V}^{\perp} + \mathcal{W}^{\perp})^{\perp} = (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} \cap (\mathcal{W}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^{\perp} = \big((\mathcal{V}^{\perp} + \mathcal{W}^{\perp})^{\perp}\big)^{\perp} = \mathcal{V}^{\perp} + \mathcal{W}^{\perp}$$

(γ') Έστω ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Τότε $\mathcal{E} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$ και $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$. Χρησιμοποιώντας τα μέρη (2) και (3), και το γνωστό αποτέλεσμα ότι $\mathcal{E}^{\perp} = \{\vec{0}\}$ και $\{\vec{0}\}^{\perp} = \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{V} + \mathcal{W} \\ \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{E}^{\perp} = (\mathcal{V} + \mathcal{W})^{\perp} \\ (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^{\perp} = \{\vec{0}\}^{\perp} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \{\vec{0}\} = \mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp} \\ \mathcal{V}^{\perp} + \mathcal{W}^{\perp} = \mathcal{E} \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V}^{\perp} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$$

Αντίστροφα, αν ισχύει ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V}^{\perp} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$, τότε σύμφωνα με ότι αποδείξαμε παραπάνω και χρησιμοποιώντας το μέρος (3), θα έχουμε

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}^{\perp} \oplus \mathcal{W}^{\perp} \Longrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V}^{\perp\perp} \oplus \mathcal{W}^{\perp\perp} \Longrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \qquad \square$$

Άσκηση 5. *Έστω $\mathcal{V}$ ένας υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$, όπου $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$. Να δειχθεί ότι αν $\vec{x} \notin \mathcal{V}$, τότε υπάρχει διάνυσμα $\vec{w} \in \mathcal{V}^{\perp}$ έτσι ώστε:*

$$\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \neq 0$$

Λύση. Επειδή $\vec{0} \in \mathcal{V}$ και $\vec{x} \notin \mathcal{V}$, έπεται ότι $\vec{x} \neq \vec{0}$. Επειδή

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp}$$

έπεται ότι θα έχουμε

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{w}, \quad \text{όπου} \quad \begin{cases} \vec{y} \in \mathcal{V} \\ \text{και} \\ \vec{w} \in \mathcal{V}^{\perp} \end{cases}$$

Προφανώς $\vec{w} \neq 0$ διότι διαφορετικά αν $\vec{w} = \vec{0}$, τότε $\vec{x} = \vec{y} \in \mathcal{V}$ και αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση. Άρα $\vec{w} \neq 0$ ή ισοδύναμα $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \neq 0$. Επιπλέον, επειδή $\langle \vec{y}, \vec{w} \rangle = 0$, θα έχουμε:

$$\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{y} + \vec{w}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \neq 0 \qquad \square$$

Άσκηση 6. *Έστω $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ δύο υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \, , \, \rangle)$, και έστω ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Αν $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$, να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{V} \quad \textit{και} \quad \mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{U}$$

Λύση. Επειδή $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$, έπεται ότι

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{U}, \ \ \forall \vec{v} \in \mathcal{V} : \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Από την παραπάνω σχέση έπεται προφανώς ότι:

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}^{\perp} \quad \text{και} \quad \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{U}^{\perp}$, δηλαδή $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, $\forall \vec{y} \in \mathcal{U}$. Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, υπάρχουν διανύσματα $\vec{u} \in \mathcal{U}$ και $\vec{v} \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε:

$$\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$$

Τότε:

$$0 = \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 0 \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{u}\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = \vec{0}$$

Άρα $\vec{x} = \vec{v} \in \mathcal{V}$. Έτσι δείξαμε ότι $\mathcal{U}^{\perp} \subseteq \mathcal{V}$ και επομένως $\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{V}$. Η σχέση $\mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{U}$ αποδεικνύεται παρόμοια. □

Άσκηση 7. *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\langle \, , \, \rangle_* : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}, \quad \big\langle (x_1, x_2, x_3) \, , \, (y_1, y_2, y_3) \big\rangle_* = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 6x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_3$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$*. Ακολούθως να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου* $\big(\mathbb{R}^3, \langle \, , \, \rangle_*\big)$.

Λύση. Αν $(x_1, x_2, x_3) \, , \, (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, τότε θα έχουμε:

$$\big\langle (x_1, x_2, x_3) \, , \, (y_1, y_2, y_3) \big\rangle_* = \begin{pmatrix} x_1, \ x_2, \ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

από όπου βλέπουμε εύκολα ότι η απεικόνιση $\langle \, , \, \rangle_*$ είναι συμμετρική και διγραμμική. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \big\langle (x_1, x_2, x_3) \, , \, (y_1, y_2, y_3) \big\rangle_* &= x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_3 \\ &= (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3 \end{aligned}$$

Επομένως $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\|\vec{x}\|_* = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_* = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 \ \geq \ 0$$

και

$$\|\vec{x}\|_* = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_1 - 2x_2)^2 = x_2^2 = (x_2 + x_3)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$$

Επομένως η απεικόνιση $\langle \, , \, \rangle_*$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

Θεωρούμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \big\{ \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \ \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \ \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \big\}$$

Η βάση $\mathcal{B}$ δεν είναι ορθοκανονική ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle \, , \, \rangle_*$ διότι για παράδειγμα:

$$\langle \vec{e}_1 \, , \, \vec{e}_2 \rangle_* = \langle (1, 0, 0) \, , \, (0, 1, 0) \rangle_* = -2 \neq 0$$

Εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}$.

Θέτουμε: $\vec{y}_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, 0)$.
Ακολούθως θεωρούμε το διάνυσμα:

$$\vec{y}_2 \ = \ \vec{e}_2 \ - \ \frac{\langle \vec{e}_2 \, , \, \vec{y}_1 \rangle_*}{\langle \vec{y}_1 \, , \, \vec{y}_1 \rangle_*} \, \vec{y}_1 = (0, 1, 0) - \frac{\langle (0, 1, 0) \, , \, (1, 0, 0) \rangle_*}{\langle (1, 0, 0) \, , \, (1, 0, 0) \rangle_*} \, (1, 0, 0) = (0, 1, 0) - \frac{-2}{1} \, (1, 0, 0) = (2, 1, 0)$$

και τέλος το διάνυσμα

$$\vec{y}_3 \ = \ \vec{e}_3 \ - \ \frac{\langle \vec{e}_3 \, , \, \vec{y}_1 \rangle_*}{\langle \vec{y}_1 \, , \, \vec{y}_1 \rangle_*} \, \vec{y}_1 \ - \ \frac{\langle \vec{e}_3 \, , \, \vec{y}_2 \rangle_*}{\langle \vec{y}_2 \, , \, \vec{y}_2 \rangle_*} \, \vec{y}_2$$

Υπολογίζουμε:

$$\langle \vec{e}_3 \, , \, \vec{y}_1 \rangle_* = \langle (0, 0, 1) \, , \, (1, 0, 0) \rangle_* = 0$$

$$\langle \vec{e}_3\,,\,\vec{y}_2\rangle_* = \langle (0,0,1)\,,\,(2,1,0)\rangle_* = 1$$
$$\langle \vec{y}_2\,,\,\vec{y}_2\rangle_* = \langle (2,1,0)\,,\,(2,1,0)\rangle_* = 2$$

Επομένως

$$\vec{y}_3 \;=\; (0,0,1) \,-\, \frac{1}{2}(2,1,0) = \left(-1,\,-\frac{1}{2},\,1\right)$$

Τα διανύσματα

$$\vec{y}_1 = (1,0,0), \qquad \vec{y}_2 = (2,1,0), \qquad \vec{y}_3 = \left(-1,\,-\frac{1}{2},\,1\right)$$

αποτελούν μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$. Υπολογίζουμε τα μήκη των διανυσμάτων $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$, και $\vec{y}_3$:

$$\|\vec{y}_1\|_* = \sqrt{\langle \vec{y}_1\,,\,\vec{y}_1\rangle_*} = \sqrt{\langle (1,0,0)\,,\,(1,0,0)\rangle_*} = 1$$
$$\|\vec{y}_2\|_* = \sqrt{\langle \vec{y}_2\,,\,\vec{y}_2\rangle_*} = \sqrt{\langle (2,1,0)\,,\,(2,1,0)\rangle_*} = \sqrt{2}$$
$$\|\vec{y}_3\|_* = \sqrt{\langle \vec{y}_3\,,\,\vec{y}_3\rangle_*} = \sqrt{\langle \left(-1,\,-\frac{1}{2},\,1\right)\,,\,\left(-1,\,-\frac{1}{2},\,1\right)\rangle_*} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Επομένως το σύνολο διανυσμάτων

$$\vec{\varepsilon}_1 == \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|_*} = (1,0,0), \qquad \vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|_*} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), \qquad \vec{\varepsilon}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|_*} = \left(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\,,\,\rangle_*$. □

Άσκηση 8. *Στον Ευκλείδειο χώρο* $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\,\rangle)$ *να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση των υπόχωρου* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, *και* $\mathcal{W}$ *του* $\mathbb{R}^3$, *όπου:*

$$\mathcal{U} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-5y-2z=0\big\}$$
$$\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y-z=0\big\}$$
$$\mathcal{W} = \mathcal{U}\cap\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-5y-2z=0 \;\; \textit{και} \;\; 2x-y-z=0\big\}$$

Λύση. (1) Θα έχουμε

$$\mathcal{U} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-5y-2z=0\big\} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=5y+2z\big\} =$$
$$= \big\{(5y+2z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(5y,y,0)+(2z,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\big\} =$$
$$= \big\{y(5,1,0)+z(2,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\big\} = \mathcal{L}\big(\vec{x}_1,\vec{x}_2\big)$$

όπου:

$$\vec{x}_1 = (5,1,0) \quad \text{και} \quad \vec{x}_2 = (2,0,1)$$

Επειδή $\langle \vec{x}_1,\vec{x}_2\rangle = \langle (5,1,0),(2,0,1)\rangle = 10 \neq 0$, τα διανύσματα $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ δεν είναι ορθογώνια. Εφαρμόζουμε διαδικασία Gram-Schmidt:

Θέτουμε $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (5,1,0)$ και

$$\begin{aligned}
\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2,\vec{y}_1\rangle}{\langle \vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\cdot\vec{y}_1 &= (2,0,1) - \frac{\langle (2,0,1),(5,1,0)\rangle}{\langle (5,1,0),(5,1,0)\rangle}\cdot(5,1,0) \\
&= (2,0,1) - \frac{10}{26}\cdot(5,1,0) \\
&= \left(\frac{1}{13},-\frac{5}{13},1\right)
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$:

$$\|\vec{y}_1\| = \|(5,1,0)\| = \sqrt{\langle (5,1,0),(5,1,0)\rangle} = \sqrt{26}$$
$$\|\vec{y}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{13},-\frac{5}{13},1\right)\right\| = \sqrt{\left\langle\left(\frac{1}{13},-\frac{5}{13},1\right),\left(\frac{1}{13},-\frac{5}{13},1\right)\right\rangle} = \sqrt{\frac{15}{13}}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{U}$ είναι η $\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2\}$ όπου

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(5,1,0) \qquad \text{και} \qquad \vec{e}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{13}, -\frac{5}{13}, 1\right)$$

(2) Θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y-z=0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = 2x-y\} = \\ &= \{(x,y,2x-y)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\} = \{(x,0,2x)+(0,y,-y)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1,0,2)+y(0,1,-1)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\end{aligned}$$

όπου:

$$\vec{x}_1 = (1,0,2) \qquad \text{και} \qquad \vec{x}_2 = (0,1,-1)$$

Επειδή $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle = \langle (1,0,2),(0,1,-1)\rangle = -2 \neq 0$, τα διανύσματα $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ δεν είναι ορθογώνια. Εφαρμόζουμε διαδικασία Gram-Schmidt:

Θέτουμε $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1,0,2)$ και

$$\begin{aligned}\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2,\vec{y}_1\rangle}{\langle \vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\cdot\vec{y}_1 &= (0,1,-1) - \frac{\langle (0,1,-1),(1,0,2)\rangle}{\langle (1,0,2),(1,0,2)\rangle}\cdot(1,0,2) \\ &= (0,1,-1) - \frac{-2}{5}\cdot(1,0,2) \\ &= \left(\frac{2}{5}, 1, -\frac{1}{5}\right)\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$:

$$\|\vec{y}_1\| = \|(1,0,2)\| = \sqrt{\langle (1,0,2),(1,0,2)\rangle} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{y}_2\| = \left\|\left(\frac{2}{5},1,-\frac{1}{5}\right)\right\| = \sqrt{\left\langle \left(\frac{2}{5},1,-\frac{1}{5}\right), \left(\frac{2}{5},1,-\frac{1}{5}\right)\right\rangle} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ είναι η $\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2\}$ όπου

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) \qquad \text{και} \qquad \vec{e}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{5}, 1, -\frac{1}{5}\right)$$

(3) Θα έχουμε:

$$\mathcal{W} = \mathcal{U}\cap\mathcal{V} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-5y-z=0 \;\text{ και }\; 2x-y-z=0\}$$

Το γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x-5y-z=0 \\ 2x-y-z=0\end{cases}$$

έχει γενική λύση

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\\ -t\\ 3t\end{pmatrix}, \qquad t\in\mathbb{R}$$

Επομένως

$$\mathcal{W} = \{(t,-t,3t)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\} = \{t(1,-1,3)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\vec{x})$$

όπου

$$\vec{x} = (1,-1,3)$$

Το μήκος του $\vec{x}$ είναι:

$$\|\vec{x}\| = \|(1,-1,3)\| = \sqrt{\langle (1,-1,3),(1,-1,3)\rangle} = \sqrt{11}$$

Άρα η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{W}$ είναι η

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,-1,3)$$

□

Άσκηση 9. *Στον Ευκλείδειο χώρο* $(\mathbb{R}^4, \langle\, ,\, \rangle)$ *να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου* $\mathcal{V}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (1,1,0,0), \qquad \vec{x}_2 = (0,0,-2,1), \qquad \vec{x}_3 = \vec{x}_3 = (0,-1,0,2)$$

και ακολούθως να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$*, και η ορθογώνια προβολή του διανύσματος* $(0,1,0,0)$ *στον υπόχωρο* $\mathcal{V}$*.*

Λύση. Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο διανυσμάτων $\vec{x}_1 = (1,1,0,0)$, $\vec{x}_2 = (0,0,-2,1)$, και $\vec{x}_3 = (0,-1,0,2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}$.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ δεν είναι ορθογώνιο, διότι:

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle = \langle (1,1,0,0), (0,0,-2,1)\rangle = 0$$

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_3\rangle = \langle (1,1,0,0), (0,-1,0,2)\rangle = -1 \neq 0$$

$$\langle \vec{x}_2, \vec{x}_3\rangle = \langle (0,0,-2,1), (0,-1,0,2)\rangle = 2 \neq 0$$

Θα εφαρμόσουμε διαδικασία Gram-Schmidt για να κατασκευάσουμε πρώτα ένα ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$.

Θέτουμε: $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1,1,0,0)$.

Ακολούθως θεωρούμε το διάνυσμα:

$$\vec{y}_2 \;=\; \vec{x}_2 \;-\; \frac{\langle \vec{x}_2\,,\,\vec{y}_1\rangle}{\langle \vec{y}_1\,,\,\vec{y}_1\rangle}\,\vec{y}_1 = \vec{x}_2$$

διότι $\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle = \langle \vec{x}_2\,,\,\vec{x}_1\rangle = 0$.

Τέλος το διάνυσμα

$$\vec{y}_3 \;=\; \vec{x}_3 \;-\; \frac{\langle \vec{x}_3\,,\,\vec{y}_1\rangle}{\langle \vec{y}_1\,,\,\vec{y}_1\rangle}\,\vec{y}_1 \;-\; \frac{\langle \vec{x}_3\,,\,\vec{y}_2\rangle}{\langle \vec{y}_2\,,\,\vec{y}_2\rangle}\,\vec{y}_2 = \vec{x}_3 \;-\; \frac{\langle \vec{x}_3\,,\,\vec{x}_1\rangle}{\langle \vec{x}_1\,,\,\vec{x}_1\rangle}\,\vec{x}_1 \;-\; \frac{\langle \vec{x}_3\,,\,\vec{x}_2\rangle}{\langle \vec{x}_2\,,\,\vec{x}_2\rangle}\,\vec{x}_2 =$$

$$= \vec{x}_3 \;-\; \frac{-1}{2}\vec{x}_1 \;-\; \frac{2}{5}\vec{x}_2 = \frac{10\vec{x}_3 + 5\vec{x}_1 - 4\vec{x}_2}{10} = \frac{10(0,-1,0,2) + 5(1,1,0,0) - 4(0,0,-2,1)}{10} =$$

$$= \frac{(5,-5,8,16)}{10} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

Επομένως το σύνολο διανύσματων

$$\left\{\vec{y}_1 = (1,1,0,0),\;\; \vec{y}_2 = (0,0,-2,1),\;\; \vec{y}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)\right\}$$

είναι ένα ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσματων του $\mathcal{V}$ και επομένως αποτελεί μια ορθογώνια βάση του $\mathcal{V}$. Υπολογίζουμε τα μήκη των διανυσμάτων $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$, $\vec{y}_3$:

$$\|\vec{y}_1\|^2 = \big\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0)\big\rangle = 2 \quad\Longrightarrow\quad \|\vec{y}_1\| = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{y}_2\|^2 = \big\langle (0,0,-2,1), (0,0,-2,1)\big\rangle = 5 \quad\Longrightarrow\quad \|\vec{y}_1\| = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{y}_3\|^2 = \left\langle \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right),\, \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)\right\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{16}{25} + \frac{64}{25} = \frac{370}{100} = \frac{37}{10} \quad\Longrightarrow\quad \|\vec{y}_3\| = \sqrt{\frac{37}{10}}$$

Επομένως τα σύνολο διανύσματα

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \left(0, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|} = \left(\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{37}}, -\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{37}}, \frac{4\sqrt{10}}{5\sqrt{37}}, \frac{8\sqrt{10}}{5\sqrt{37}}\right)$$

αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^{\perp} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 4 - 3 = 1$, αρκεί να προσδιορίσουμε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{V}^{\perp}$. Τότε προφανώς $\vec{x} = (a, b, c, d) \in \mathcal{V}^{\perp}$ αν και μόνον αν το $\vec{x}$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα της βάσης $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ του $\mathcal{V}$:

$$0 = \langle \vec{x}, \vec{x}_1 \rangle = \langle (a,b,c,d), (1,1,0,0) \rangle = a + b \implies a + b = 0 \implies b = -a$$

$$0 = \langle \vec{x}, \vec{x}_2 \rangle = \langle (a,b,c,d), (0,0,-2,1) \rangle = -2c + d \implies -2c + d = 0 \implies d = 2c$$

$$0 = \langle \vec{x}, \vec{x}_2 \rangle = \langle (a,b,c,d), (0,-1,0,2) \rangle = -b + 2d \implies -b + 2d = 0 \implies b = 2d$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι $\vec{x} = (-4c, 4c, c, 2c)$, όπου $c \in \mathbb{R}$. Έτσι για παράδειγμα, για $c = -\frac{1}{4}$, έχουμε ότι $\vec{x} = \left(1, -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{V}^{\perp}$, και άρα το μονοσύνολο $\left\{\left(1, -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$. Επομένως, επειδή όπως μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα $\|\vec{x}\| = \frac{\sqrt{37}}{4}$, μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$ είναι το μονοσύνολο

$$\left\{ \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{37}}, -\frac{4}{\sqrt{37}}, -\frac{1}{\sqrt{37}}, -\frac{2}{\sqrt{37}} \right) \right\}$$

Έστω $\vec{u} = (0, 1, 0, 0)$. Τότε η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ είναι το διάνυσμα

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{u}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{u}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3 = \cdots = \left(-\frac{5}{74}, \frac{5}{74}, -\frac{4}{37}, -\frac{8}{37} \right)$$ □

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο $\mathcal{V}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$, όπου $\langle , \rangle$ είναι το κανονικό (συνηθισμένο) εσωτερικό γινόμενο:*

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z = 0 \quad \text{και} \quad y - z - w = 0 \right\}$$

1. *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$.*
2. *Να βρεθεί ο ορθογώνιος υπόχωρος $\mathcal{V}^{\perp}$ του $\mathcal{V}$.*

Λύση. Από τις εξισώσεις $2x - y - z = 0$ και $y - z - w = 0$ έχουμε ότι $z = 2x - y$ και άρα $w = y - z = y - 2x + y = 2y - 2x$. Επομένως

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z = 0 \quad \text{και} \quad y - z - w = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z = 2x - y \quad \text{και} \quad w = 2y - 2x \right\} \\ &= \left\{ (x, y, 2x - y, 2y - 2x) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle (1, 0, 2, -2), (0, 1, -1, 2) \rangle \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{(1, 0, 2, -2), (0, 1, -1, 2)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}$. Αφού $\langle (1, 0, 2, -2), (0, 1, -1, 2) \rangle = -6 \neq 0$ έπεται ότι τα διανύσματα δεν είναι κάθετα μεταξύ τους. Άρα για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ εφαρμόζουμε την διαδικασία Gram-Schmidt.

<u>Διαδικασία Gram-Schmidt</u>:

Θέτουμε $\vec{x}_1 = (1, 0, 2, -2)$ και $\vec{x}_2 = (0, 1, -1, 2)$. Τότε $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1, 0, 2, -2)$ και

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \cdot \vec{y}_1 &= (0, 1, -1, 2) - \frac{\langle (0, 1, -1, 2), (1, 0, 2, -2) \rangle}{\langle (1, 0, 2, -2), (1, 0, 2, -2) \rangle} \cdot (1, 0, 2, -2) \\ &= (0, 1, -1, 2) - \frac{-6}{9} \cdot (1, 0, 2, -2) \\ &= (0, 1, -1, 2) + (\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) \\ &= (\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$:

$$\|\vec{y}_1\| = \|(1, 0, 2, -2)\| = \sqrt{\langle (1, 0, 2, -2), (1, 0, 2, -2) \rangle} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{y}_2\| = \|(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\| = \sqrt{\langle (\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \rangle} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ είναι

$$\text{OKB}: \quad \{\vec{z}_1, \vec{z}_2\} = \{\vec{z}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|}, \vec{z}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}\} = \{\frac{1}{3}(1,0,2,-2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$$

Επειδή $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$ έπεται ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^\perp$ και άρα $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^\perp = 2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^\perp &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid \langle (1,0,2,-2), (x,y,z,w) \rangle = 0 \ \text{ και } \ \langle (0,1,-1,2), (x,y,z,w) \rangle = 0\} \\
&= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2z - 2w = 0 \ \text{ και } \ y - z + 2w = 0\} \\
&= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2z + 2w \ \text{ και } \ y = z - 2w\} \\
&= \{(-2z+2w, z-2w, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z(-2,1,1,0) + w(2,-2,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= \big\langle (-2,1,1,0), (2,-2,0,1) \big\rangle
\end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\{(-2,1,1,0),(2,-2,0,1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}^\perp$. $\square$

Άσκηση 11. *Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$:*

$$\mathcal{V} = \{\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}^\perp$, όταν:

(1) *Ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.*
(2) *Ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + \cdots + n x_n y_n$$

όπου: $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$.

Λύση. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = -2x_2 - \cdots - nx_n\} \\
&= \{(-2x_2 - \cdots - nx_n, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x_2(-2,1,0,\cdots,0) + \cdots + x_n(-n,0,\cdots,0,1) \in \mathbb{R}^n \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\} \\
&= \big\langle (-2,1,0,\cdots,0), (-3,0,1,\cdots,0), \cdots, (-n,0,\cdots,0,1) \big\rangle
\end{aligned}$$

Τα διανύσματα $\{(-2,1,0,\cdots,0),(-3,0,1,\cdots,0),\cdots,(-n,0,\cdots,0,1)\}$ αποτελούν βάση του $\mathcal{V}$, αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και άρα $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n-1$. Τότε:

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp \implies \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^\perp \implies \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^\perp = 1$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $(1,2,\cdots,n) \in \mathcal{V}^\perp$ διότι από τη περιγραφή του υπόχωρου $\mathcal{V}$ έχουμε

$$\langle (x_1, x_2, \cdots, x_n), (1,2,\cdots,n) \rangle = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$$

με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Αφού λοιπόν το μη-μηδενικό διάνυσμα $(1,2,\cdots,n) \in \mathcal{V}^\perp$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^\perp = 1$ έπεται ότι το σύνολο $\{(1,2,\cdots,n)\}$ αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}^\perp$. Συνεπώς, μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^\perp$, με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, είναι το μονοσύνολο:

$$\text{OKB}: \quad \Big\{ \frac{(1,2,\cdots,n)}{\sqrt{1 + 2^2 + \cdots + n^2}} \Big\}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το δεύτερο εσωτερικό γινόμενο και την περιγραφή του $\mathcal{V}$ παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $(1,1,\cdots,1) \in \mathcal{V}^\perp$, διότι

$$\langle (x_1, x_2, \cdots, x_n), (1,1,\cdots,1) \rangle = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$$

Επειδή το μη-μηδενικό διάνυσμα $(1,1,\cdots,1) \in \mathcal{V}^\perp$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}^\perp = 1$ έπεται ότι το μονοσύνολο $\{(1,1,\cdots,1)\}$ αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}^\perp$. Επομένως μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^\perp$, με το δεύτερο εσωτερικό γινόμενο, είναι το σύνολο:

$$\mathsf{OKB}: \quad \left\{ \frac{(1,1,\cdots,1)}{\sqrt{1+2+\cdots+n}} \right\}$$

□

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τους υποχώρους του*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+3y+z=0\} \\ \mathcal{W} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+w=0\} \end{aligned}$$

(1) *Να εξετάσετε αν οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι ορθοσυμπληρωματικοί*[3].
(2) *Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^\perp$ του υπόχωρου $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$.*

Λύση. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+3y+z=0\big\} \\ &= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid z=-2x-3y\big\} \\ &= \big\{(x,y,-2x-3y,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,w\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{x(1,0,-2,0)+y(0,1,-3,0)+w(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,w\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \langle (1,0,-2,0),(0,1,-3,0),(0,0,0,1)\rangle \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+w=0\big\} \\ &= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y=x+w\big\} \\ &= \big\{(x,x+w,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x,z,w\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{x(1,1,0,0)+w(0,1,0,1)+z(0,0,1,0) \in \mathbb{R}^4 \mid x,z,w\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \langle (1,1,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\rangle \end{aligned}$$

Τα σύνολα διανυσμάτων

$$\big\{(1,0,-2,0),(0,1,-3,0),(0,0,0,1)\big\} \subseteq \mathcal{V} \qquad \text{και} \qquad \big\{(1,1,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\big\} \subseteq \mathcal{W}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ αντίστοιχα. Άρα

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 3 \quad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{W} = 3$$

Αν οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι ορθοσυμπληρωματικοί τότε $4 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{W} = 3+3$, το οποίο προφανώς δεν ισχύει.

Διαφορετικά: αν οι υπόχωροι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ ήταν ορθοσυμπληρωματικοί, τότε θα έπρεπε να ισχύει: $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και $\vec{y} \in \mathcal{W}$. Όμως $\langle (0,1,-3,0),(0,1,0,1) = 1 \neq 0$ και άρα οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δεν είναι ορθοσυμπληρωματικοί.

Στην συνέχεια θα βρούμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^\perp$ του υπόχωρου $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. Άρα πρώτα πρέπει να βρούμε μια βάση του $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. Από την εξίσωση $x-y+w=0$ έχουμε $x=y-w$ και αντικαθιστώντας στην

[3]Υπενθυμίζουμε ότι δύο υπόχωροι $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ ενός Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle\,,\,\rangle)$ καλούνται **ορθοσυμπληρωματικοί**, αν

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{U} \perp \mathcal{V}$$

και τότε ο $\mathcal{V}$ είναι ορθοσυμπληρωματικός του $\mathcal{U}$ και ο $\mathcal{U}$ ορθοσυμπληρωματικός του $\mathcal{V}$.

$2x+3y+z=0$ έπεται ότι $2y-2w+3y+z=0$, δηλαδή $y=\frac{2}{5}w-\frac{1}{5}z$. Άρα βρίσκουμε ότι $x=-\frac{3}{5}w-\frac{1}{5}z$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}\cap\mathcal{W} &= \big\{(x,y,z,w)\ \in\ \mathbb{R}^4\ \mid\ (x,y,z,w)\in\mathcal{V}\ \text{ και }\ (x,y,z,w)\in\mathcal{W}\big\}\\
&= \big\{(x,y,z,w)\ \in\ \mathbb{R}^4\ \mid\ 2x+3y+z=0\ \text{ και }\ x-y+w\big\}\\
&= \big\{(x,y,z,w)\ \in\ \mathbb{R}^4\ \mid\ x=-\frac{3}{5}w-\frac{1}{5}z\ \text{ και }\ y=\frac{2}{5}w-\frac{1}{5}z\big\}\\
&= \big\{(-\frac{3}{5}w-\frac{1}{5}z,\frac{2}{5}w-\frac{1}{5}z,z,w)\ \in\ \mathbb{R}^4\ \mid\ x,y,w\in\mathbb{R}\big\}\\
&= \big\{z(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0)+w(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1)\ \in\ \mathbb{R}^4\ \mid\ z,w\in\mathbb{R}\big\}\\
&= \big\langle(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0),(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1)\big\rangle
\end{aligned}$$

Το σύνολο $\{(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0),(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. Για να βρούμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^\perp$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}\big\langle(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0),(x,y,z,w)\big\rangle=0\\[2ex] \big\langle(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1),(x,y,z,w)\big\rangle=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}-x-y+5z=0\\[2ex] -3x+2y+5w=0\end{cases}$$

Από τη πρώτη εξίσωση έχουμε $x=-y+5z$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε $y=3z-w$ και άρα $x=2z+w$. Τότε:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^\perp &= \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\mid\left\langle\left(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0\right),(x,y,z,w)\right\rangle=0\ \text{ και }\ \left\langle\left(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1\right),(x,y,z,w)\right\rangle=0\right\}\\
&= \big\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\mid-x-y+5z=0\ \text{ και }\ -3x+2y+5w=0\big\}\\
&= \big\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\mid x=2z+w\ \text{ και }\ y=3z-w\big\}\\
&= \big\{(2z+w,3z-w,z,w)\in\mathbb{R}^4\mid z,w\in\mathbb{R}\big\}\\
&= \big\{z(2,3,1,0)+w(1,-1,0,1)\in\mathbb{R}^4\mid z,w\in\mathbb{R}\big\}\\
&= \mathcal{L}\big((2,3,1,0),(1,-1,0,1)\big)
\end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο

$$\big\{(2,3,1,0),\ (1,-1,0,1)\big\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^\perp$.

Δουλεύοντας διαφορετικά θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει την βάση $\{(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0),(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1)\}$ του $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$ και με την διαδικασία Gram-Schmidt να βρει μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2\}$ του $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. Συμπληρώνοντας την ορθοκανονική αυτή βάση σε μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_4\}$ του $\mathbb{R}^4$, έπεται ότι το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_4\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^\perp$. $\square$

Άσκηση 13. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω*

$$\mathcal{V}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \mid\ x-y-z=0\big\}$$

(1) *Να βρεθούν ορθοκανονικές βάσεις των υποχώρων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{V}^\perp$.*
(2) *Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{x}=(2,-1,0)$ ως $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, όπου $\vec{y}\in\mathcal{V}$ και $\vec{z}\in\mathcal{V}^\perp$.*

Λύση. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y+z\} \\
&= \{(y+z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\} \\
&= \{y(1,1,0)+z(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,1,0),(1,0,1)\rangle
\end{aligned}$$

Το σύνολο $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}$. Αφού $\langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle = 1\neq 0$ έπεται ότι τα διανύσματα δεν είναι κάθετα μεταξύ τους. Άρα για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt:

- <u>Διαδικασία Gram-Schmidt</u>:

Θέτουμε $\vec{x}_1=(1,1,0)$ και $\vec{x}_2=(1,0,1)$. Τότε $\vec{y}_1=\vec{x}_1=(1,1,0)$ και

$$\begin{aligned}
\vec{y}_2=\vec{x}_2-\frac{\langle\vec{x}_2,\vec{y}_1\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\cdot\vec{y}_1 &= (1,0,1)-\frac{\langle(1,0,1),(1,1,0)\rangle}{\langle(1,1,0),(1,1,0)\rangle}\cdot(1,1,0) \\
&= (1,0,1)-\frac{1}{2}\cdot(1,1,0) \\
&= (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$:

$$\|\vec{y}_1\|=\|(1,1,0)\|=\sqrt{\langle(1,1,0),(1,1,0)\rangle}=\sqrt{2}$$

$$\|\vec{y}_2\|=\left\|\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\|=\sqrt{\left\langle\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\rangle}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ είναι

$$\text{OKB}:\quad \{\vec{z}_1,\vec{z}_2\}=\left\{\vec{z}_1=\frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|},\ \vec{z}_2=\frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}\right\}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

Για τον $\mathcal{V}^\perp$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^\perp &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \langle(1,1,0),(x,y,z)\rangle=0 \ \text{ και } \ \langle(1,0,1),(x,y,z)\rangle=0\} \\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0 \ \text{ και } \ x+z=0\} \\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=-x \ \text{ και } \ z=-x\} \\
&= \{(x,-x,-x)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in\mathbb{R}\} \\
&= \langle(-1,1,1)\rangle
\end{aligned}$$

Συνεπώς το σύνολο $\{(-1,1,1)\}$ αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}^\perp$ και άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^\perp$ είναι $\{(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\}$.

Επειδή $\mathbb{R}^3=\mathcal{V}\oplus\mathcal{V}^\perp$ έπεται ότι

$$(2,-1,0)=\kappa(1,1,0)+\lambda(1,0,1)+\mu(-1,1,1)=(\kappa+\lambda-\mu,\kappa+\mu,\lambda+\mu)\implies\begin{cases}\kappa+\lambda-\mu=2\\ \kappa+\mu=-1\\ \lambda+\mu=0\end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι $\kappa=0$, $\lambda=1$ και $\mu=-1$ και άρα

$$(2,-1,0)=0\cdot(1,1,0)+1\cdot(1,0,1)+(-1)\cdot(-1,1,1)$$

Επομένως δείξαμε πράγματι ότι το διάνυσμα $\vec{x}=(2,-1,0)$ γράφεται ως $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, όπου $\vec{y}=(1,0,1)\in\mathcal{V}$ και $\vec{z}=(1,-1,-1)\in\mathcal{V}^\perp$. □

Άσκηση 14. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y,\, y-z,\, z-x)$$

(1) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f.
(2) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του ορθοσυμπληρωματικού υποχώρου* $\mathsf{Im}(f)^{\perp}$.

Λύση. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$, και τότε γνωρίζουμε ότι $\mathsf{Im}(f) = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\rangle$. Έτσι θα έχουμε:

$$\mathsf{Im}(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle (1,0,-1), (-1,1,0), (0,-1,1)\rangle = \langle (1,0,-1), (-1,1,0)\rangle$$

αφού $(-1)\cdot(1,0,-1) + (-1)\cdot(-1,1,0) = (0,-1,1)$. Το σύνολο

$$\big\{(1,0,-1),\ (-1,1,0)\big\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ της f. Αφού $\langle (1,0,-1), (-1,1,0)\rangle = -1 \neq 0$ έπεται ότι τα διανύσματα δεν είναι κάθετα μεταξύ τους και άρα για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt.

• <u>Διαδικασία Gram-Schmidt</u>:
Θέτουμε $\vec{x}_1 = (1,0,-1)$ και $\vec{x}_2 = (-1,1,0)$. Τότε $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1,0,-1)$ και

$$\begin{aligned}
\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1\rangle}\cdot \vec{y}_1 &= (-1,1,0) - \frac{\langle (-1,1,0), (1,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,-1), (1,0,-1)\rangle}\cdot (1,0,-1) \\
&= (-1,1,0) + \frac{1}{2}\cdot (1,0,-1) \\
&= \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$:

$$\|\vec{y}_1\| = \|(1,0,-1)\| = \sqrt{\langle (1,0,-1), (1,0,-1)\rangle} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{y}_2\| = \|(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})\| = \sqrt{\big\langle (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})\big\rangle} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ είναι

$$\text{OKB}:\ \big\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\big\} = \Big\{\vec{z}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|},\ \vec{z}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}\Big\} = \Big\{\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)\ \Big\}$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τον ορθοσυμπληρωματικό υπόχωρο της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(f)^{\perp} &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \langle (1,0,-1), (x,y,z)\rangle = 0 \ \text{ και }\ \langle (-1,1,0), (x,y,z)\rangle = 0\big\} \\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \ \text{ και }\ -x + y = 0\big\} \\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = y = z\big\} \\
&= \big\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in\mathbb{R}\big\} \\
&= \big\langle (1,1,1)\big\rangle
\end{aligned}$$

Άρα το σύνολο $\{(1,1,1)\}$ αποτελεί μια βάση του υπόχωρου $\mathsf{Im}(f)^{\perp}$ και άρα το σύνολο

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του ορθοσυμπληρωματικού υποχώρου $\mathsf{Im}(f)^{\perp}$. $\square$

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (2,-3,1,0), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (7,3,0,1), \quad \vec{\varepsilon}_3 = (-1,0,1,0), \quad \vec{\varepsilon}_4 = (0,1,1,1)$$

Να βρεθεί ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$ *στον* $\mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο διανυσμάτων* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \vec{\varepsilon}_3,\ \vec{\varepsilon}_4\}$ *να αποτελεί ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Λύση. Καταρχήν το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \vec{\varepsilon}_3,\ \vec{\varepsilon}_4\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο διότι η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

των συνιστωσών των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$ είναι ίση με $24 \neq 0$. Επομένως το σύνολο $\mathcal{B}$ αποτελεί μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση έχουμε μοναδική γραφή αυτών των διανυσμάτων ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + x_3\vec{\varepsilon}_3 + x_4\vec{\varepsilon}_4 \quad \text{και} \quad \vec{y} = y_1\vec{\varepsilon}_1 + y_2\vec{\varepsilon}_2 + y_3\vec{\varepsilon}_3 + y_4\vec{\varepsilon}_4$$

όπου: $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\!\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\!\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Τότε όπως μπορούμε να δούμε εύκολα η απεικόνιση $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^4$.

Ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$ η βάση $\mathcal{B}$ είναι προφανώς ορθοκανονική.

Για παράδειγμα υπολογίζουμε ότι $\langle\!\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1 \rangle\!\rangle = 1 \cdot 1 = 1$, $\langle\!\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2 \rangle\!\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 = 0$ και γενικότερα ισχύει: $\langle\!\langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j \rangle\!\rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq 4$.

Για την εύρεση του εσωτερικού γινομένου στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$, δηλαδή για την εύρεση της τιμής

$$\langle\!\langle (a_1, a_2, a_3, a_4),\ (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle\!\rangle$$

της απεικόνισης $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$, συναρτήσει των a_i και b_i, εκφράζουμε τα διανύσματα $\vec{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ και $\vec{y} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης $\{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \vec{\varepsilon}_3,\ \vec{\varepsilon}_4\}$ και χρησιμοποιούμε τη σχέση $\langle\!\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\!\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. □

Άσκηση 16. *Έστω* $\vec{e}$ *ένα μοναδιαίο διάνυσμα σε έναν Ευκλείδειο χώρο* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$. *Να δειχθεί ότι κάθε διάνυσμα* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *γράφεται μοναδικά ως εξής:*

$$\vec{x} = \alpha\vec{e} + \vec{y}, \quad \textit{όπου:}\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \langle \vec{y}, \vec{e} \rangle = 0$$

Ο μοναδικά προσδιορισμένος από το διάνυσμα $\vec{x}$ *αριθμός* α *καλείται η αριθμητική προβολή του* $\vec{x}$ *στην διεύθυνση του* $\vec{e}$ *και συμβολίζεται με* [4]*:*

$$\alpha := \pi_{\vec{e}}(\vec{x})$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\pi_{\vec{e}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \pi_{\vec{e}}(\vec{x})$$

είναι γραμμική, δηλαδή, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ *και* $r \in \mathbb{R}$*:*
   (α΄) $\pi_{\vec{e}}(\vec{x} + \vec{y}) = \pi_{\vec{e}}(\vec{x}) + \pi_{\vec{e}}(\vec{y})$.
   (β΄) $\pi_{\vec{e}}(r\vec{x}) = r\pi_{\vec{e}}(\vec{x})$

(2) *Να δειχθεί ότι,* $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$*:*

$$\pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e} \rangle$$

(3) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathrm{Ker}(\pi_{\vec{e}}) = \vec{e}^{\perp} = \big\{ \vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{e}, \vec{x} \rangle = 0 \big\} \quad \textit{και} \quad \mathrm{Im}(\pi_{\vec{e}}) = \mathbb{R}$$

[4]Έτσι, επειδή το $\vec{e}$ είναι μοναδιαίο, η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στο διάνυσμα $\vec{e}$ είναι το διάνυσμα $\Pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \pi_{\vec{e}}(\vec{x})\vec{e}$.

(4) *Αν $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \pi_{\vec{\varepsilon}_i}(\vec{x})\vec{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i = \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_1\rangle \vec{\varepsilon}_1 + \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_2\rangle \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_n\rangle \vec{\varepsilon}_n$$

Λύση.

- (1), (2) Συμπληρώνουμε το διάνυσμα $\vec{e}$ σε μια ορθοκανονική βάση

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

του $\mathcal{E}$. Έστω $\mathcal{V} = \{\kappa\vec{e} \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$ ο υπόχωρος του $\mathcal{E}$ που παράγεται από το $\vec{e}$, και $\mathcal{W}$ ο υπόχωρος του που παράγεται από τα διανύσματα $\{\vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$. Τότε θα έχουμε

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

και άρα κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται μοναδικά ως εξής:

$$\vec{x} = \alpha\vec{e} + \vec{y}, \qquad \text{όπου:}\quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και} \qquad \langle \vec{y}, \vec{e}\rangle = 0$$

Προφανώς το διάνυσμα $\alpha\vec{e}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ και επομένως $\alpha = \langle \vec{x}, \vec{e}\rangle$, διότι το $\vec{e}$ είναι μοναδιαίο. Άρα

$$\pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}\rangle$$

και τότε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου θα έχουμε, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, $\forall r \in \mathbb{R}$:

$$\pi_{\vec{e}}(\vec{x} + \vec{y}) = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{e}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{e}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{e}\rangle = \pi_{\vec{e}}(\vec{x}) + \pi_{\vec{e}}(\vec{y})$$

$$\pi_{\vec{e}}(r\vec{x}) = \langle r\vec{x}, \vec{e}\rangle = r\langle \vec{x}, \vec{e}\rangle = r\pi_{\vec{e}}(\vec{x})$$

- (3) Έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(\pi_{\vec{e}})$, δηλαδή $\pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = 0$. Τότε $\langle \vec{x}, \vec{e}\rangle = 0$ και επομένως $\vec{x} \in \vec{e}^{\perp}$. Παρόμοια αν $\vec{x} \in \vec{e}^{\perp}$, τότε $\pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}\rangle = 0$ και άρα $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(\pi_{\vec{e}})$. Έτσι $\mathrm{Ker}(\pi_{\vec{e}}) = \vec{e}^{\perp}$.

  Ο υπόχωρος

$$\mathrm{Im}(\pi_{\vec{e}}) = \{\pi_{\vec{e}}(\vec{x}) \in \mathbb{R} \mid \vec{x} \in \mathcal{E}\}$$

έχει διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(\pi_{\vec{e}}) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$. Επειδή $\pi_{\vec{e}}(\vec{e}) = \langle \vec{e}, \vec{e}\rangle = \|\vec{e}\|^2 = 1 \neq 0$, έπεται ότι $\mathrm{Im}(\pi_{\vec{e}}) \neq \{\vec{0}\}$ και επομένως $\mathrm{Im}(\pi_{\vec{e}}) = \mathbb{R}$.

- (4) Τέλος αν $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$, τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ έχει μοναδική γραφή

$$\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_1\rangle \vec{\varepsilon}_1 + \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_2\rangle \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon}_n\rangle \vec{\varepsilon}_n$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Άσκηση 17. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\mathcal{V}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι οι απεικόνισεις*

$$\Pi_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \textit{ορθογώνια προβολή του } \vec{x} \textit{ στον υπόχωρο } \mathcal{V}$$

$$\mathsf{K}_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \textit{κάθετη προβολή του } \vec{x} \textit{ στον υπόχωρο } \mathcal{V}$$

είναι προβολές.

Επιπλέον, αν $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ και $\mathcal{D} = \{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$, τότε:

(1)
$$\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2 + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_k\rangle \vec{e}_k$$

(2)
$$\mathrm{Ker}(\Pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}^{\perp} \quad \textit{και} \quad \mathrm{Im}(\Pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$$

(3)
$$\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+1}\rangle \vec{e}_{k+1} + \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+2}\rangle \vec{e}_{k+2} + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_n\rangle \vec{e}_n$$

(4)
$$\mathrm{Ker}(\mathsf{K}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V} \quad \textit{και} \quad \mathrm{Im}(\mathsf{K}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}^{\perp}$$

(5) *Αν* $\iota_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}$ *και* $\iota_{\mathcal{V}^\perp}\colon \mathcal{V}^\perp \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι οι κανονικές εγκλείσεις, τότε:*

$$\Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \mathsf{Id}_{\mathcal{V}} \quad \textit{και} \quad \mathsf{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^\perp} = \mathsf{Id}_{\mathcal{V}^\perp}$$
$$\Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^\perp} = \mathsf{O} \quad \textit{και} \quad \mathsf{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \mathsf{O}$$
$$\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_{\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}} \,+\, \iota_{\mathcal{V}^\perp} \circ \mathsf{K}_{\mathcal{V}}$$

Λύση. Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έχουμε μοναδική γραφή

$$\vec{x} = \vec{v} + \vec{u}, \qquad \text{όπου} \quad \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \vec{u} \in \mathcal{V}^\perp$$

και τότε:

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{v} \quad \text{και} \quad \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{u}$$

Επειδή $\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{v} \in \mathcal{V}$, θα έχουμε μοναδική γραφή $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$, όπου $\vec{v} \in \mathcal{V}$ και $\vec{0} \in \mathcal{V}^\perp$. Αυτό σημαίνει ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x})) = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = \vec{v} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \quad \text{και άρα:} \quad \Pi_{\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}} = \Pi_{\mathcal{V}}$$

Παρόμοια, επειδή $\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{u} \in \mathcal{V}^\perp$, θα έχουμε μοναδική γραφή $\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, όπου $\vec{0} \in \mathcal{V}$ και $\vec{u} \in \mathcal{V}^\perp$. Αυτό σημαίνει ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})) = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{u}) = \vec{u} = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \quad \text{και άρα:} \quad \mathsf{K}_{\mathcal{V}} \circ \mathsf{K}_{\mathcal{V}} = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}$$

Επομέμως οι απεικονίσεις $\Pi_{\mathcal{V}}$ και $\mathsf{K}_{\mathcal{V}}$ είναι προβολές.

Έστω $\mathcal{C} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\big\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ και $\mathcal{D} = \big\{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^\perp$. Τότε, επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$, το σύνολο

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\big\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$.

(1) - (3) Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$, όπως γνωρίζουμε, κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, γράφεται μοναδικά ως:

$$\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2 + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_k\rangle \vec{e}_k + \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+1}\rangle \vec{e}_{k+1} + \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+2}\rangle \vec{e}_{k+2} + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_n\rangle \vec{e}_n$$

Επειδή $\mathcal{C} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\big\} \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{D} = \big\{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\big\} \subseteq \mathcal{V}^\perp$, έπεται ότι

$$\langle \vec{x}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2 + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_k\rangle \vec{e}_k \in \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+1}\rangle \vec{e}_{k+1} + \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+2}\rangle \vec{e}_{k+2} + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_n\rangle \vec{e}_n \in \mathcal{V}^\perp$$

Επομένως

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2 + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_k\rangle \vec{e}_k$$

και

$$\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+1}\rangle \vec{e}_{k+1} + \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+2}\rangle \vec{e}_{k+2} + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{e}_n\rangle \vec{e}_n$$

(2) - (4) Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έχουμε μοναδική γραφή:

$$\vec{x} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \,+\, \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \qquad \text{όπου} \quad \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V}^\perp$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει άμεσα ότι:

$$\vec{x} \in \mathrm{Ker}(\Pi_{\mathcal{V}}) \iff \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{0} \iff \vec{x} = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V}^\perp \implies \mathrm{Ker}(\Pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}^\perp$$
$$\vec{x} \in \mathrm{Ker}(\mathsf{K}_{\mathcal{V}}) \iff \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{0} \iff \vec{x} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V} \implies \mathrm{Ker}(\mathsf{K}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$$

Προφανώς, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό, έχουμε: $\mathrm{Im}(\Pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$ και $\mathrm{Im}(\mathsf{K}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}^\perp$

(5) Θεωρούμε τις κανονικές εγκλείσεις $\iota_{\mathcal{V}}$ και $\iota_{\mathcal{V}^\perp}$ των υπόχωρων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{V}^\perp$ αντίστοιχα, στον $\mathcal{E}$, δηλαδή:

$$\iota_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \iota_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = \vec{v} \quad \text{και} \quad \iota_{\mathcal{V}^\perp}\colon \mathcal{V}^\perp \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \iota_{\mathcal{V}^\perp}(\vec{u}) = \vec{u}$$

Τότε, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$, έχουμε $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ και άρα $\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = \vec{0}$. Τότε:

$$(\Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}})(\vec{v}) = \Pi_{\mathcal{V}}(\iota_{\mathcal{V}}(\vec{v})) = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = \vec{v} \implies \Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \mathsf{Id}_{\mathcal{V}}$$
$$(\mathsf{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}})(\vec{v}) = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\iota_{\mathcal{V}}(\vec{v})) = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = \vec{0} \implies \mathsf{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \mathsf{O}$$

Παρόμοια, $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}^\perp$, έχουμε $\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$ και άρα $\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{u}) = \vec{0}$. Τότε:

$$(\mathsf{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^\perp})(\vec{u}) = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\iota_{\mathcal{V}^\perp}(\vec{u})) = \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{u}) = \vec{u} \implies \mathsf{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^\perp} = \mathsf{Id}_{\mathcal{V}^\perp}$$
$$(\Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^\perp})(\vec{u}) = \Pi_{\mathcal{V}}(\iota_{\mathcal{V}^\perp}(\vec{u})) = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{u}) = \vec{0} \implies \Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^\perp} = \mathsf{O}$$

Τέλος, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$(\iota_{\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}} + \iota_{\mathcal{V}^\perp} \circ \mathsf{K}_{\mathcal{V}})(\vec{x}) = (\iota_{\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}})(\vec{x}) + (\iota_{\mathcal{V}^\perp} \circ \mathsf{K}_{\mathcal{V}})(\vec{x}) = \iota_{\mathcal{V}}(\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x})) + \iota_{\mathcal{V}^\perp}(\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})) =$$
$$= \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) + \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{x} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_{\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}} + \iota_{\mathcal{V}^\perp} \circ \mathsf{K}_{\mathcal{V}} \qquad \square$$

Άσκηση 18. *Θεωρούμε τον Ευκλειδειο χώρο* $(\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$, *όπου* $\langle,\rangle$ *είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο:*

$$\langle,\rangle : \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$$

Έστω $\mathsf{D}_n(\mathbb{R})$ *ο υπόχωρος των* $n \times n$ *διαγώνιων πινάκων, και* $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$, *αντίστοιχα* $\mathsf{A}_n(\mathbb{R})$, *ο υπόχωρος των* $n \times n$ *συμμετρικών, αντίστοιχα αντισυμμετρικών, πινάκων.*

(1) *Να δειχθεί ότι:*
$$\mathsf{D}_n(\mathbb{R})^\perp = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid a_{ii} = 0,\ 1 \le i \le n\big\}$$
(2) *Να δειχθεί ότι:*
$$\mathsf{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathsf{A}_n(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad \mathsf{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$$
(3) *Να βρεθούν οι ορθογώνιες προβολές ενός* $n \times n$ *πίνακα* A *στους υπόχωρους* $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$ *και* $\mathsf{A}_n(\mathbb{R})$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος ενός Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$, και αν $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, τότε

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle = 0, \ \ \forall \vec{y} \in \mathcal{V} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle \vec{x}, \vec{e}_k\,\rangle = 0, \ \ \forall k = 1, 2, \cdots, n$$

(1) Ο υπόχωρος των διαγωνίων πινάκων είναι προφανώς ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, και μια βάση του είναι το σύνολο
$$\mathcal{B} = \big\{E_{11},\, E_{22},\, \cdots,\, E_{nn}\big\}$$
όπου ο πίνακας E_{ii} έχει το 1 στη θέση (i,i) και παντού αλλού 0. Επομένως:
$$\mathsf{D}_n(\mathbb{R})^\perp = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \langle A, B\rangle = 0,\ \forall B \in \mathsf{D}_n(\mathbb{R})\big\} =$$
$$= \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \langle A, E_{jj}\rangle = 0,\ \forall j = 1, 2, \cdots, n\big\} =$$
$$= \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tE_{jj}) = 0,\ \forall j = 1, 2, \cdots, n\big\} =$$
$$= \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathsf{Tr}(A \cdot E_{jj}) = 0,\ \forall j = 1, 2, \cdots, n\big\}$$
Εύκολα υπολογίζουμε ότι, αν $A = (a_{ij})$, τότε:
$$A \cdot E_{jj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nj} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και άρα} \quad \mathsf{Tr}(A \cdot E_{jj}) = a_{jj}$$
Επομένως θα έχουμε:
$$\mathsf{D}_n(\mathbb{R})^\perp = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathsf{Tr}(A \cdot E_{jj}) = 0,\ \forall j = 1, 2, \cdots, n\big\} =$$
$$= \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid a_{jj} = 0,\ 1 \le j \le n\big\}$$

(2) **Πρώτος Τρόπος**: Ο υπόχωρος των συμμετρικών πινάκων είναι προφανώς ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, και μια βάση του είναι το σύνολο
$$\mathcal{C} = \big\{S_{ij} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid 1 \le j \le i \le n\big\}$$
όπου ο πίνακας S_{ij} έχει το 1 στη θέση (i,j) και στη θέση (j,i), και παντού αλλού 0. Επομένως:
$$\mathsf{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \langle A, B\rangle = 0,\ \forall B \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R})\big\} =$$
$$= \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \langle A, S_{ij}\rangle = 0, \ \ 1 \le j \le i \le n\big\} =$$
$$= \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tS_{ij}) = 0, \ \ 1 \le j \le i \le n\big\} =$$
$$= \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathsf{Tr}(A \cdot S_{ij}) = 0, \ \ 1 \le j \le i \le n\big\}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι, αν $A = (a_{ij})$, τότε:

$$A \cdot S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & 0 & \cdots & a_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2i} & 0 & \cdots & a_{2j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{1i} & 0 & \cdots & a_{1j} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και άρα} \quad \mathsf{Tr}(A \cdot S_{ij}) = a_{ij} + a_{ji}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_n(\mathbb{R})^\perp &= \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathsf{Tr}(A \cdot S_{ij}) = 0, \quad 1 \le j \le i \le n\big\} = \\ &= \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid a_{ij} + a_{ji} = 0, \ 1 \le j \le i \le n\big\} = \\ &= \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = -a_{ji}, \ 1 \le j \le i \le n\big\} = \mathsf{A}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Επειδή $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathsf{A}_n(\mathbb{R})$, θα έχουμε:

$$\mathsf{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathsf{S}_n(\mathbb{R})^{\perp\perp} = \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$$

Δεύτερος Τρόπος: Γνωρίζουμε ότι

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{R}) = \mathsf{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathsf{A}_n(\mathbb{R})$$

και κάθε $n \times n$ πίνακας A γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2} \quad \text{όπου} \quad \begin{cases} \dfrac{A + {}^tA}{2} \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R}) \\ \quad\text{και} \\ \dfrac{A - {}^tA}{2} \in \mathsf{A}_n(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{$*$}$$

Θα δείξουμε ότι:

$$\left\langle \frac{A + {}^tA}{2}, \frac{A - {}^tA}{2} \right\rangle = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \mathsf{Tr}\left(\frac{A + {}^tA}{2} \cdot {}^t\left(\frac{A - {}^tA}{2}\right)\right) = 0$$

Χρησιμοποιώντας ότι η απεικόνιση $\mathsf{Tr}\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι γραμμική, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathsf{Tr}\left(\frac{A + {}^tA}{2} \cdot {}^t\left(\frac{A - {}^tA}{2}\right)\right) &= \mathsf{Tr}\left(\frac{A + {}^tA}{2} \cdot \frac{{}^tA - A}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathsf{Tr}\big(A \cdot {}^tA - A^2 + ({}^tA)^2 - {}^tA \cdot A\big) = \\ = \frac{1}{4}\mathsf{Tr}\big((A \cdot {}^tA - {}^tA \cdot A) + {}^t(A^2) - A^2\big) &= \frac{1}{4}\mathsf{Tr}\big(A \cdot {}^tA - {}^tA \cdot A\big) + \frac{1}{4}\mathsf{Tr}\big({}^t(A^2) - A^2\big) = \\ &= \frac{1}{4}\Big(\mathsf{Tr}(A \cdot {}^tA) - \mathsf{Tr}({}^tA \cdot A)\Big) + \frac{1}{4}\mathsf{Tr}({}^t(A^2) - A^2) \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως από τη Γραμμική Άλγεβρα Ι, ότι $\mathsf{Tr}(A \cdot B) = \mathsf{Tr}(B \cdot A)$ και $\mathsf{Tr}({}^tA) = \mathsf{Tr}(A)$. Άρα θα έχουμε $\mathsf{Tr}(A \cdot {}^tA) - \mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = 0$ και $\mathsf{Tr}({}^t(A^2) - A^2) = 0$.

Επομένως από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\left\langle \frac{A + {}^tA}{2}, \frac{A - {}^tA}{2} \right\rangle = \mathsf{Tr}\left(\frac{A + {}^tA}{2} \cdot {}^t\left(\frac{A - {}^tA}{2}\right)\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{A + {}^tA}{2} \perp \frac{A - {}^tA}{2} \tag{$**$}$$

Επειδή

$$A \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R}) \iff A = \frac{A + {}^tA}{2} \quad \text{και} \quad A \in \mathsf{A}_n(\mathbb{R}) \iff A = \frac{A - {}^tA}{2}$$

η σχέση $(**)$ δείχνει ότι:

$$\mathsf{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathsf{A}_n(\mathbb{R})$$

Τότε από την Άσκηση **5** έπεται ότι:

$$\mathsf{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathsf{A}_n(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad \mathsf{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$$

(3) Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ έπεται ότι η ορθογώνια προβολή του πίνακα A στους υπόχωρους $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$ και $\mathsf{A}_n(\mathbb{R})$ είναι αντίστοιχα

$$\Pi_{\mathsf{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{A + {}^tA}{2} = \mathsf{K}_{\mathsf{A}_n(\mathbb{R})}(A) \quad \text{και} \quad \Pi_{\mathsf{A}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{A - {}^tA}{2} = \mathsf{K}_{\mathsf{S}_n(\mathbb{R})}(A) \qquad \square$$

Άσκηση 19. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, *και έστω* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι αν* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, *τότε*[5] *υπάρχει* $c \in \mathbb{R}$:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E} : \quad \|f(\vec{x})\| \leq c \, \|\vec{x}\|$$

Λύση. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$. Γνωρίζουμε τότε ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k \qquad \Longrightarrow \qquad f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle f(\vec{e}_k)$$

Θεωρώντας μήκη διανυσμάτων στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και ακολούθως την ανισότητα Cauchy-Schwarz[6], θα έχουμε:

$$\|f(\vec{x})\| = \| \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle f(\vec{e}_k) \| \leq \sum_{k=1}^{n} \| \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle f(\vec{e}_k) \| = \sum_{k=1}^{n} |\langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle| \, \|f(\vec{e}_k)\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}\| \, \|\vec{e}_k\| \, \|f(\vec{e}_k)\|$$

Επειδή $\|\vec{e}_k\| = 1$, $1 \leq k \leq n$, θα έχουμε:

$$\|f(\vec{x})\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}\| \, \|f(\vec{e}_k)\| = \|\vec{x}\| \sum_{k=1}^{n} \|f(\vec{e}_k)\|$$

Θέτοντας[7]

$$c = \sum_{k=1}^{n} \|f(\vec{e}_k)\|$$

θα έχουμε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\|f(\vec{x})\| \leq c \, \|\vec{x}\| \qquad \square$$

Άσκηση 20. *Στον Ευκλείδειο χώρο* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *θεωρούμε τρία σύνολα διανυσμάτων*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$
$$\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_n\}$$
$$\mathcal{D} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \cdots, \vec{g}_n\}$$

και υποθέτουμε ότι:

(1) *Το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
(2) *Το σύνολο* $\mathcal{C}$ *είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα.*
(3) *Το σύνολο* $\mathcal{D}$ *είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα.*
(4) *Για κάθε* $k = 1, 2, \cdots, n$, *κάθε ένα από τα διανύσματα* $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_k$ *και κάθε ένα από τα διανύσματα διάνυσμα* $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \cdots, \vec{g}_k$, *είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k$.

Να δειχθεί ότι υπάρχουν μη-μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha_k \in \mathbb{R}$, *έτσι ώστε,* $\forall k = 1, 2, \cdots, n$:

$$\vec{f}_k = \alpha_k \vec{g}_k$$

---

[5] Ένας ενδομορφισμός $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ καλείται **φραγμένος**, αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\|f(\vec{x})\| \leq c\|\vec{x}\|$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$. Έτσι σύμφωνα με την Άσκηση, κάθε ενδομορφισμός ενός Ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι φραγμένος.

[6] Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, τότε:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$$

[7] Μπορούμε να θέσουμε και:

$$\lambda = \max\{\|f(\vec{k})\| \in \mathbb{R} \mid 1 \leq k \leq n\}$$

και τότε:

$$\|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\| \sum_{k=1}^{n} \|f(\vec{e}_k)\| \leq n\lambda \, \|\vec{x}\| \leq c \, \|\vec{x}\|, \quad \text{όπου} \quad c = n\lambda$$

Λύση. Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό με χρήση Μαθηματικής Επαγωγής.

Για κάθε $k = 1, 2, \cdots, n$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{V}_k$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \cdots, \vec{e}_k$:

$$\mathcal{V}_k = \mathcal{L}(\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \cdots, \vec{e}_k)$$

Τότε γνωρίζουμε ότι

$$\vec{f}_1,\, \vec{f}_2,\, \cdots, \vec{f}_k \,\in\, \mathcal{V}_k \quad \text{και} \quad \vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \cdots, \vec{g}_k \,\in\, \mathcal{V}_k$$

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι, το σύνολο $\mathcal{B}_k = \big\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \cdots, \vec{e}_k\big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως είναι μια βάση του $\mathcal{V}_k$.

Επειδή τα σύνολα διανυσμάτων $\mathcal{C}_k = \big\{\vec{f}_1,\, \vec{f}_2,\, \cdots, \vec{f}_k\big\}$ και $\mathcal{D}_k = \big\{\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \cdots, \vec{g}_k\big\}$ είναι ορθογώνια και αποτελούντα από $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_k$ το πλήθος μη-μηδενικά διανύσματα του $\mathcal{V}_k$ έπεται ότι τα σύνολα $\mathcal{C}_k$ και $\mathcal{D}_k$ είναι ορθογώνιες βάσεις του $\mathcal{V}_k$. Επομένως το διάνυσμα f_k είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\mathcal{D}_k$:

$$f_k = c_1\vec{g}_1 + c_2\vec{g}_2 + \cdots + c_k\vec{g}_k$$

• Αν $k = 1$, τότε προφανώς θα έχουμε $\vec{f}_1 = c_1\vec{g}_1$ και $\alpha_1 := c_1 \neq 0$ διότι $\vec{f}_1 \neq \vec{0}$. Επομένως:

$$\vec{f}_1 = \alpha_1\vec{g}_1, \quad \alpha_1 \neq 0$$

• Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για $k-1$ το πλήθος διανύσματα.

• Γενική Περίπτωση: Για την περίπτωση που έχουμε k το πλήθος διανυσμάτων, χρησιμοποιώντας την Επαγωγική Υπόθεση, έχουμε:

$$\vec{f}_i = \alpha_i\vec{g}_i, \quad \alpha_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k-1 \tag{$*$}$$

και

$$f_k = c_1\vec{g}_1 + c_2\vec{g}_2 + \cdots + c_k\vec{g}_k \tag{$\dagger$}$$

Θα δείξουμε ότι $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} = 0$.

Παρατηρούμε ότι, αν $1 \leq i \neq j \leq k-1$:

$$\langle \vec{f}_i, \vec{g}_j\rangle = \langle \alpha_i\vec{g}_i, \vec{g}_j\rangle = \alpha_i\langle \vec{g}_i, \vec{g}_j\rangle = 0$$

διότι τα διανύσματα του συνόλου $\mathcal{D}_k = \big\{\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \cdots, \vec{g}_k\big\}$ είναι ανά δύο ορθογώνια.

Θεωρώντας το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος f_k με κάθε ένα από τα διανύσματα του συνόλου $\big\{\vec{f}_1,\, \vec{f}_2,\, \cdots, \vec{f}_{k-1}\big\}$ και χρησιμοποιώντας ότι το σύνολο $\mathcal{C}_k$ είναι ορθογώνιο, θα έχουμε:

$$0 = \langle \vec{f}_k, \vec{f}_1\rangle = \langle c_1\vec{g}_1 + c_2\vec{g}_2 + \cdots + c_k\vec{g}_k, \vec{f}_1\rangle = \langle c_1\vec{g}_1, \vec{f}_1\rangle + \langle c_2\vec{g}_2, \vec{f}_1\rangle + \cdots + \langle c_k\vec{g}_k, \vec{f}_1\rangle =$$
$$= c_1\langle \vec{g}_1, \alpha_1\vec{g}_1\rangle + c_2\langle \vec{g}_2, \alpha_1\vec{g}_1\rangle + \cdots + c_k\langle \vec{g}_k, \alpha_1\vec{g}_1\rangle = \alpha_1c_1\langle \vec{g}_1, \vec{g}_1\rangle + \alpha_1c_2\langle \vec{g}_2, \vec{g}_1\rangle + \cdots + \alpha_1c_k\langle \vec{g}_k, \vec{g}_1\rangle$$
$$= \alpha_1c_1\langle \vec{g}_1, \vec{g}_1\rangle = \alpha_1c_1\|\vec{g}_1\|$$

Άρα, επειδή $\alpha_1 \neq 0$ και $\|\vec{g}_1\| \neq 0$ διότι $\vec{g}_1 \neq \vec{0}$, έπεται ότι:

$$\alpha_1c_1\|\vec{g}_1\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0$$

Παρόμοια θα έχουμε:

$$c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_{k-1} = 0$$

Τότε η από τη σχέση ($\dagger$) έπεται ότι $\vec{f}_k = c_k\vec{g}_k$ και επομένως θέτοντας $c_k = \alpha_k$ έχουμε ότι $\alpha_k \neq 0$, διότι διαφορετικά θα είχαμε $\vec{f}_k = \vec{0}$ και αυτό είναι άτοπο, και:

$$\vec{f}_k = \alpha_k\vec{g}_k, \quad \alpha_k \neq 0 \tag{$**$}$$

Από τις σχέσεις ($*$) και ($**$) προκύπτει ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για k το πλήθος διανύσματα. Επομένως από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, ο ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε $n \geq 1$. □