ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 7 Απριλίου 2023

Άσκηση 1. *Να εξετασθεί αν οι ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ Ευκλείδειων χώρων είναι ισομετρίες.*

(1) $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x,y,0)$.
(2) $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x,y)$.
(3) $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$.
(4) $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (ay, bz, cx)$, *όπου* $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Λύση. (1) Για κάθε διάνυσμα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε:

$$\|f(x,y)\|^2 = \langle f(x,y), f(x,y)\rangle = \langle (x,y,0),(x,y,0)\rangle = x^2+y^2 = \langle (x,y),(x,y)\rangle = \|(x,y)\|^2$$

Επομένως $\|f(x,y)\| = \|(x,y)\|$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομετρία.

(2) Όπως γνωρίζουμε, κάθε ισομετρία είναι μονομορφισμός. Επειδή η γραμμική απεικόνιση f δεν είναι μονομορφισμός διότι $\operatorname{Ker}(f) = \big\{z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \neq \big\{(0,0,0)\big\}$, έπεται ότι η γραμμική απεικόνιση f δεν είναι ισομετρία.

(3) Όπως γνωρίζουμε, κάθε ισομετρία είναι μονομορφισμός. Επειδή η γραμμική απεικόνιση f δεν είναι μονομορφισμός διότι $\operatorname{Ker}(f) = \big\{z(1,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \neq \big\{(0,0,0)\big\}$, έπεται ότι η γραμμική απεικόνιση f δεν είναι ισομετρία.

(4) Γνωρίζουμε ότι ένας ενδομορφισμός f ενός Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης είναι ισομετρία αν και μόνον αν ο πίνακας του f σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ είναι ορθογώνιος. Επιλέγοντας την κανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ του $\mathbb{R}^3$ η οποία είναι ορθοκανονική, βλέπουμε ότι ο πίνακας $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) := A$ είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προφανώς οι στήλες του A είναι ένα ορθογώνιο σύνολο τστον χώρο των στηλών $\mathbb{R}_3$. Επομένως για να είναι ο πίνακας A ορθογώνιος πρέπει και αρκεί οι στήλες

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

του A να είναι μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}_3$. Επειδή:

$$\|\Sigma_1\|^2 = c^2, \qquad \|\Sigma_2\|^2 = a^2, \qquad \|\Sigma_3\|^2 = b^2$$

ο πίνακας A είναι ορθογώνιος αν και μόνον αν $a^2 = b^2 = c^2 = 1$, δηλαδή αν και μόνον αν $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, και $c = \pm 1$. Έτσι προκύπτουν οι πίνακες:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

οι οποίοι με τη σειρά τους ορίζουν τις ακόλουθες ισομετρίες:

$$f_1 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (y,z,x)$$
$$f_2 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (y,-z,x)$$
$$f_3 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (y,z,-x)$$
$$f_4 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (y,-z,-x)$$
$$f_5 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-y,z,x)$$
$$f_6 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-y,-z,x)$$
$$f_7 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-y,z,-x)$$
$$f_8 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-y,-z,-x)$$

Επομένως ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία αν και μόνον αν $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, και $c = \pm 1$, και τότε οι ισομετρίες οι οποίες προκύπτουν είναι οι f_i, $1 \leq i \leq 8$. $\square$

Άσκηση 2. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και θεωρούμε τον ενδομορφισμό*

$$f \,:\, \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός, αλλά γενικά όχι ισομετρία. Να βρεθεί αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε η f να είναι ισομετρία.

Λύση. Έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} = \vec{0}$ και επειδή $\lambda \neq 0$ έπεται ότι $\vec{x} = \vec{0}$. Άρα $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ και επομένως η f είναι μονομορφισμός. Έστω $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Επειδή $\lambda \neq 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε το διάνυσμα $\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{y}$ και τότε: $f(\vec{x}) = f(\frac{1}{\lambda}\vec{y}) = \frac{1}{\lambda}f(\vec{y}) = \lambda\frac{1}{\lambda}\vec{y} = \vec{y}$. Συνεπώς η f είναι επιμορφισμός και άρα ισομορφισμός. Έχουμε:

$$\|f(\vec{x})\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \neq \|\vec{x}\|$$

Επομένως η f γενικά δεν είναι ισομετρία, αν $|\lambda| \neq 1$. Προφανώς ο f είναι ισομετρία αν $\lambda = \pm 1$. Αντίστροφα, αν ο f είναι ισομετρία, τότε για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, δηλαδή $\|\vec{x}\| = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \neq 0$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|f(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \quad &\Longrightarrow \quad \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \big\rangle = \big\langle \vec{x}, \vec{x} \big\rangle \\
&\Longrightarrow \quad \big\langle \lambda\vec{x}, \lambda\vec{x} \big\rangle = \big\langle \vec{x}, \vec{x} \big\rangle \\
&\Longrightarrow \quad \lambda^2 \big\langle \vec{x}, \vec{x} \big\rangle = \big\langle \vec{x}, \vec{x} \big\rangle \qquad (\|\vec{x}\| \neq 0) \\
&\Longrightarrow \quad \lambda^2 = 1 \\
&\Longrightarrow \quad \lambda = \pm 1
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι ισομετρία αν και μόνο αν $\lambda = \pm 1$. $\square$

Άσκηση 3. (1) *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\big\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$.*

Έστω $f \,:\, \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ο μοναδικός ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2, \qquad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_3, \qquad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_4, \qquad f(\vec{e}_4) = \vec{e}_1$$

Να εξετασθεί αν ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία.

(2) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα $f + g$ δύο ισομετριών $f,\ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία.*

(3) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα $A + B$ ή $A + B^2$, όπου A και B είναι δύο $n \times n$ ορθογώνιοι πίνακες, είναι ορθογώνιος πίνακας.*

Λύση. (1) Πρώτος Τρόπος: Έστω τυχόν διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε το $\vec{x}$ γράφεται μοναδικά

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \lambda_4\vec{e}_4, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$$

ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$. Τότε, χρησιμοποιώντας ότι η βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθοκανονική, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|f(\vec{x})\| &= \|f(\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \lambda_4\vec{e}_4)\| \\
&= \|\lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(\vec{e}_2) + \lambda_3 f(\vec{e}_3) + \lambda_4 f(\vec{e}_4)\| \\
&= \|-\lambda_1\vec{e}_2 - \lambda_2\vec{e}_3 - \lambda_3\vec{e}_4 + \lambda_4\vec{e}_1\| \qquad (\mathcal{B} : \text{OKB}) \\
&= \sqrt{(-\lambda_1)^2 + (-\lambda_2)^2 + (-\lambda_3)^2 + \lambda_4^2} \\
&= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2} \\
&= \|\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \lambda_4\vec{e}_4\| \\
&= \|\vec{x}\|
\end{aligned}$$

Επομένως η f είναι ισομετρία.

Δεύτερος Τρόπος: Γνωρίζουμε ότι ένας ενδομορφισμός $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία αν και μόνο αν ο πίνακας της f σε μια ορθοκανονική βαση είναι ορθογώνιος. Ο πίνακας της f ως προς την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Εξετάζουμε αν ο πίνακας A είναι ορθογώνιος, δηλαδή αν ${}^tA \cdot A = I_4$. Έχουμε:

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Συνεπώς η f είναι ισομετρία.

(2) Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία. Τότε η γραμμική απεικόνιση $-f$ είναι ισομετρία διότι:

$$\|(-f)(\vec{x})\| = \|-f(\vec{x})\| = |-1| \cdot \|f(\vec{x})\| = \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|, \qquad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

Όμως το άθροισμα $f + (-f) = \mathsf{O}$ είναι ο μηδενικός ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ και ο οποίοω προφανώς δεν είναι ισομετρία.

Διαφορετικά: Θεωρούμε τον ταυτοτικό ενδομορφισμό $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(x) = x$, $\forall x \in \mathcal{E}$, ο οποίος προφανώς είναι ισομετρία, και έστω $f = g = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. Τότε οι ενδομορφισμοί f και g είναι ισομετρίες, αλλά το άθροισμα $f + g$ δεν είναι ισομετρία διότι

$$\|(f+g)(\vec{x})\| = \|f(\vec{x}) + g(\vec{x})\| = \|\vec{x} + \vec{x}\| = \|2\vec{x}\| = 2\|\vec{x}\|$$

και για $\vec{x} \neq \vec{0}$: $2\|\vec{x}\| \neq \|\vec{x}\|$.
Άρα γενικά το άθροισμα $f + g$ δύο ισομετριών $f,\ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ΔΕΝ είναι ισομετρία.

(3) Έστω A ένας $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας. Τότε και ο πίνακας $-A$ είναι ορθογώνιος αλλά το άθροισμα $A + (-A) = \mathsf{O}$ είναι ο μηδενικός πίνακας ο οποίος φυσικά δεν είναι ορθογώνιος.
Θεωρούμε τους ορθογώνιους πίνακες

$$B = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε ο πίνακας

$$A + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν είναι προφανώς ορθογώνιος.

Διαφορετικά: Έστω A, αντίστοιχα B, οι ορθογώνιοι πίνακες μιας ισομετρίας f, αντίστοιχα g, σε ορθοκανονική βάση. Τότε ο πίνακας $A + B$ είναι ο πίνακας της $f + g$. Όμως δείξαμε παραπάνω ότι γενικά το άθροισμα δυο ισομετριών δεν είναι ισομετρία. Άρα ο πίνακας $A + B$ δεν είναι ορθογώνιος.

Άρα γενικά το άθροισμα $A + B$, όπου A και B είναι δύο $n \times n$ ορθογώνιοι πίνακες, ΔΕΝ είναι ορθογώνιος πίνακας. □

Άσκηση 4. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος. Αν $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\vec{v} \in \mathcal{E}$, να εξεταστεί αν ο ενδομορφισμός*

$$f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{x}, & \text{αν } \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{x} + \kappa \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\, \vec{v}, & \text{αν } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

είναι ισομετρία.

Λύση. (1) Αν $\vec{v} = \vec{0}$, τότε $f(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, και επομένως $f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός ο οποίος είναι ισομετρία.

(2) Υποθέτουμε ότι $\vec{v} \neq \vec{0}$, και έστω ότι ο ενδομορφσιμός f είναι ισομετρία. Τότε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = \Big\langle \vec{x} + \kappa \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\, \vec{v},\ \vec{x} + \kappa \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\, \vec{v} \Big\rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \kappa \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \kappa \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle + \kappa^2 \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^2} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle =$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\kappa \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} + \kappa^2 \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + (2\kappa + \kappa^2) \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Επομένως επειδή ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία, θα έχουμε $\langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, δηλαδή:

$$(2\kappa + \kappa^2) \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\kappa + \kappa^2 = 0 \\ \qquad \text{ή} \\ \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \kappa = 0 \\ \quad \text{ή} \\ \kappa = -2 \\ \quad \text{ή} \\ \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \end{cases}$$

Επειδή $\vec{v} \neq \vec{0}$, έπεται ότι $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \neq 0$, και επομένως οι παραπάνω σχέσεις δίνουν:

$$\kappa = 0 \quad \text{ή} \quad \kappa = -2$$

Αν $\kappa = 0$, τότε προφανώς $f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, και αν $\kappa = -2$, τότε:

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\, \vec{v}$$

Άρα αν ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία, τότε:

$$\text{είτε } \ \vec{v} = \vec{0} \qquad \text{είτε } \ \kappa = 0 \qquad \text{είτε } \ \kappa = -2$$

Αντίστροφα, αν $\vec{v} = \vec{0}$ ή $\kappa = 0$, τότε $f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ και ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία. Αν $\vec{v} \neq \vec{0}$ και $\kappa = -2$, τότε θα έχουμε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\| f(\vec{x}) \|^2 = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = \Big\langle \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\, \vec{v},\ \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\, \vec{v} \Big\rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 4 \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} + 4 \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^2} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle =$$

$$= \| \vec{x} \|^2 - 4 \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} + 4 \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \| \vec{x} \|^2$$

Επομένως, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $\| f(\vec{x}) \| = \| \vec{x} \|$, και άρα ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία. □

Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος διάστασης $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = n$. Ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ καλείται **υπερεπίπεδο** του $\mathcal{E}$, αν έχει διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n - 1$. Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Ένας ενδομορφισμός $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **ανάκλαση**, αν υπάρχει ένα υπερεπίπεδο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{x}, & \text{αν } \vec{x} \in \mathcal{V} \\ -\vec{x}, & \text{αν } \vec{x} \notin \mathcal{V} \end{cases}$$

και τότε ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ καλείται **υπερεπίπεδο ανάκλασης** για τον f.

Άσκηση 5. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, όπου $f \neq \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. Να δειχθεί ότι ο f είναι μια ανάκλαση αν και μόνον αν υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:*

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\, \vec{v} \qquad (*)$$

Λύση. (1) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $(*)$. Θέτουμε $\mathcal{U} = \big\{\kappa\vec{v} \in \mathcal{E} \mid \kappa \in \mathbb{R}\big\}$ και $\mathcal{V} = \mathcal{U}^{\perp}$. Τότε $\mathcal{V} = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle = 0\big\}$, θα έχουμε

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

και επειδή $\vec{v} \neq \vec{0}$, έπεται ότι το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι μια βάση του $\mathcal{U}$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = 1$. Τότε $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = n - 1$, δηλαδή ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ είναι ένα υπερεπίπεδο του $\mathcal{E}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Αν $\vec{x} \in \mathcal{V}$, τότε $\langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle = 0$, και άρα:

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\, \vec{v} = \vec{x}$$

Αν $\vec{x} \in \mathcal{U}$, τότε $\vec{x} = \kappa\vec{v}$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$, και θα έχουμε:

$$f(\vec{x}) = \kappa\vec{v} - 2\frac{\langle \kappa\vec{v}, \vec{v}\,\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\,\rangle}\, \vec{v} = \kappa\vec{v} - 2\kappa\frac{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\, \vec{v} = \kappa\vec{v} - 2\kappa\vec{v} = -\kappa\vec{v} = -\vec{x}$$

Επομένως

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{x}, & \text{αν } \vec{x} \in \mathcal{V} \\ \\ -\vec{x}, & \text{αν } \vec{x} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

και άρα ο ενδομορφισμός f είναι μια ανάκλαση.

(2) Υποθέτουμε ότι ο ενδομορφσιμός f είναι μια ανάκλαση με υπερεπίπεδο ανάκλασης $\mathcal{V}$. Τότε $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n - 1$ και θέτοντας $\mathcal{U} = \mathcal{V}^{\perp}$ αποκτούμε έναν υπόχωρο του $\mathcal{E}$ με διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = 1$. Έστω $\big\{\vec{v}\big\}$ μια βάση του $\mathcal{U}$. Τότε προφανώς θα έχουμε $\mathcal{V} = \mathcal{U}^{\perp} = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle = 0\big\}$, και

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{x} = \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\,\rangle}\, \vec{v} \;+\; \frac{\langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\,\rangle}\, \vec{v} \qquad (**)$$

όπου

$$\Big\langle \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\,\rangle}\, \vec{v},\, \vec{v}\,\Big\rangle = \langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle - \langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}\,\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\,\rangle} = \langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle - \langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle = 0$$

Τότε:

$$\vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\,\rangle}\, \vec{v} \in \mathcal{V}$$

και προφανώς

$$\frac{\langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\,\rangle}\, \vec{v} \in \mathcal{U}$$

δηλαδή η σχέση $(**)$ είναι η μοναδική γραφή του διανύσματος $\vec{x}$ σαν άθροισμα ενός διανύσματος $\vec{y} = \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$ του $\mathcal{V}$ και ενός διανύσματος $\vec{z} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$ του $\mathcal{U}$.

Εφαρμόζοντας τον ενδομορφισμό f στη σχέση $(**)$ θα έχουμε:

$$f(\vec{x}) = f\left(\vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} + \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}\right) = f\left(\vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}\right) + f\left(\frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}\right)$$

Επειδή ο ενδομορφισμός f είναι ανάκλαση, θα έχουμε $f(\vec{y}) = \vec{y}$, αν $\vec{y} \in \mathcal{V}$, και $f(\vec{z}) = -\vec{z}$, αν $\vec{z} \in \mathcal{U}$. Επομένως από την παραπάνω σχέση θα έχουμε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} = \vec{x} - 2\frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} \qquad \square$$

Άσκηση 6. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

(1) *Αν $\vec{x}, \vec{y}$ είναι δύο διανύσματα του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, να δείξετε ότι υπάρχει μια ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε: $f(\vec{x}) = \vec{y}$.*

(2) *Αν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}$ είναι τέσσερα διανύσματα του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \qquad \textit{και} \qquad \|\vec{z}\| = \|\vec{w}\|$$

να εξετασθεί αν υπάρχει ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε:

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \qquad \textit{και} \qquad f(\vec{z}) = \vec{w}$$

Λύση. (1) Αν $\vec{x} = \vec{0}$, τότε επειδή $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, έπεται ότι $\vec{y} = \vec{0}$. Τότε προφανώς κάθε ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έχει την επιθυμιτή ιδιότητα $f(\vec{x}) = f(\vec{0}) = \vec{0} = f(\vec{0}) = f(\vec{y})$.

Έστω $\vec{x} \neq \vec{0}$, και επομένως $\vec{y} \neq \vec{0}$. Θέτουμε:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \qquad \text{και} \qquad \vec{\epsilon}_1 = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$$

Συμληρώνουμε τα μοναδιαία διανύτσματα $\vec{e}_1$ και $\vec{\epsilon}_1$ σε ορθοκανονικές βάσεις του $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_n\}$$

Τότε όπως γνωρίζουμε υπάρχει μοναδική ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_i) = \vec{\epsilon}_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Άρα υπάρχει ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε:

$$\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \vec{\epsilon}_1 = f(\vec{e}_1) = f\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} f(\vec{x})$$

και επειδή $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, η παραπάνω σχέση δείχνει ότι: $f(\vec{x}) = \vec{y}$.

(2) Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, και έστω:

$$\vec{x} = (1, 0, 0), \qquad \vec{y} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad \vec{z} = (0, 1, 1), \qquad \vec{w} = (1, 0, 1)$$

Τότε υπολογίζουμε εύκολα:

$$\|\vec{x}\| = 1 = \|\vec{y}\| \qquad \text{και} \qquad \|\vec{z}\| = \sqrt{2} = \|\vec{w}\|$$

Αν υπήρχε ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε:

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \qquad \text{και} \qquad f(\vec{z}) = \vec{w} \tag{$*$}$$

τότε θα είχαμε:

$$0 = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{z}) \rangle = \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle = 1$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει ισομετρία με την επιθυμιτή ιδιότητα. $\square$

Άσκηση 7. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}$ είναι τέσσερα διανύσματα του $\mathcal{E}$, να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Υπάρχει μια ισομετρία* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \quad \text{και} \quad f(\vec{z}) = \vec{w}$$

(2) *Ισχύουν τα εξής:*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|, \quad \|\vec{z}\| = \|\vec{w}\|, \quad \langle \vec{x}, \vec{z}\,\rangle = \langle \vec{y}, \vec{w}\,\rangle \tag{$*$}$$

Λύση. (1) Έστω ότι υπάρχει ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f(\vec{x}) = \vec{y}$ και $f(\vec{z}) = \vec{w}$. Επειδή, όπως γνωρίζουμε, κάθε ισομετρία διατηρεί μήκη και εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων, θα έχουμε:

$$\|\vec{y}\| = \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|, \quad \|\vec{w}\| = \|f(\vec{z})\| = \|\vec{z}\|, \quad \langle \vec{x}, \vec{z}\,\rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{z})\,\rangle = \langle \vec{y}, \vec{z}\,\rangle$$

(2) Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις $(*)$. Αν $\vec{x} = \vec{0}$ ή $\vec{z} = 0$, τότε το ζητούμενο προκύπτει από το πρώτο μέρος της Άσκησης 6. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{z}$.

Αποδεικνύομε πρώτα ότι, με τις προϋποθέσεις του μέρους (2), ισχύει ότι, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$:

$$\|\vec{z} - \kappa\vec{x}\| = \|\vec{w} - \kappa\vec{y}\| \tag{$\star$}$$

Πράγματι θα έχουμε:

$$\|\vec{w} - \kappa\vec{y}\|^2 = \langle \vec{w} - \kappa\vec{y}, \vec{w} - \kappa\vec{y}\,\rangle = \langle \vec{w}, \vec{w}\rangle - 2\kappa\langle \vec{w}, \vec{y}\rangle + \kappa^2\langle \vec{y}, \vec{y}\,\rangle = \|\vec{w}\|^2 - 2\kappa\langle \vec{w}, \vec{y}\rangle + \kappa^2\|\vec{y}\|^2 =$$
$$= \|\vec{z}\|^2 - 2\kappa\langle \vec{z}, \vec{x}\rangle + \kappa^2\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{z}, \vec{z}\rangle - 2\kappa\langle \vec{z}, \vec{x}\rangle + \kappa^2\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle = \langle \vec{z} - \kappa\vec{z}, \vec{z} - \kappa\vec{z}\,\rangle^2 = \|\vec{z} - \kappa\vec{x}\|^2$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α΄) Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{z}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε έστω $\vec{z} = \kappa\vec{x}$ για έναν πραγματικό αριθμό κ. Επειδή $\|\vec{z}\| = \|\vec{w}\|$, $\|\vec{w}\| = \|\vec{z}\| = \|\kappa\vec{x}\| = |\kappa| \cdot \|\vec{x}\| = |\kappa| \cdot \|\vec{y}\|$. Επειδή $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, από την Άσκηση 6 έπεται ότι υπάρχει μια ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Τότε θα έχουμε:

$$f(\vec{z}) = f(\kappa\vec{x}) = \kappa f(\vec{x}) = \kappa\vec{y} \tag{$\dagger$}$$

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{w} - \kappa\vec{y}$ και τότε, επειδή $\vec{z} - \kappa\vec{x} = 0$, από τη σχέση $(\star)$ θα έχουμε:

$$\|\vec{w} - \kappa\vec{y}\|^2 = \|\vec{z} - \kappa\vec{x}\|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{w} - \kappa\vec{y}\| \quad \Longrightarrow \quad \vec{w} = \kappa\vec{y}$$

Τότε από τη σχέση $(\dagger)$ προκύπτει ότι $f(\vec{z}) = \vec{w}$.

(β΄) Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία Gram-Schmidt στο ζεύγος διανυσμάτων $\{\vec{x}, \vec{z}\}$, αποκτούμε ένα ορθοκανονικό σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad \text{και} \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{z}\,'}{\|\vec{z}\,'\|}, \quad \text{όπου} \quad \vec{z}\,' = \vec{z} - \frac{\langle \vec{z}, \vec{x}\,\rangle}{\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle}\,\vec{x}$$

Συμπληρώνουμε το ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$. Επειδή $0 \neq \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, έπεται ότι $\vec{y} \neq \vec{0}$ και μπορούμε να θεωρήσουμε τα διανύσματα

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \quad \text{και} \quad \vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{w}\,'}{\|\vec{w}\,'\|}, \quad \text{όπου} \quad \vec{w}\,' = \vec{w} - \frac{\langle \vec{w}, \vec{y}\,\rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y}\,\rangle}\,\vec{y}$$

Τότε εκ΄ κατασκευής τα διανύσματα $\vec{y}$ και $\vec{w}\,'$ είναι ορθογώνια και $\vec{y} \neq \vec{0}$, διότι $\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ και $\vec{x} \neq \vec{0}$. Αν $\vec{w}' = \vec{0}$, τότε από την παραπάνω σχέση έπεται ότι: $\vec{w} = \kappa\vec{y}$, όπου $\kappa = \frac{\langle \vec{w}, \vec{y}\rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle}$. Από τη σχέση $(\star)$ προκύπτει τότε ότι $\vec{z} = \kappa\vec{x}$, δηλαδή τα διανύσματα $\vec{z}$ και $\vec{x}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και αυτό είναι άτοπο. Άρα $\vec{w}\,' \neq \vec{0}$ και επομένως το σύνολο $\{\vec{y}, \vec{w}\,'\}$ είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα. Τότε το σύνολο $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ είναι ορθοκανονικό και επομένως μπορεί να συμπληρωθεί σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ του $\mathcal{E}$. Γνωρίσουμε τότε ότι υπάρχει μια ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{\varepsilon}_1 \quad \text{και} \quad f(\vec{e}_2) = \vec{\varepsilon}_2$$

Δηλαδή

$$f\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\|\vec{x}\|} f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{y}\|}\vec{y} \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}) = \vec{y}$$

και

$$f\left(\frac{\vec{z}\,'}{\|\vec{z}\,'\|}\right) = \frac{\vec{w}\,'}{\|\vec{w}\,'\|} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\|\vec{z}\,'\|} f(\vec{z}\,') = \frac{1}{\|\vec{w}\,'\|}\vec{w}\,'$$

Όμως, χρησιμοποιώντας τη σχέση $(\star)$, θα έχουμε:

$$\|\vec{z}\,'\|^2 = \|\vec{z} - \frac{\langle\vec{z},\vec{x}\,\rangle}{\langle\vec{x},\vec{x}\,\rangle}\,\vec{x}\,\|^2 = \|\vec{w} - \frac{\langle\vec{w},\vec{y}\,\rangle}{\langle\vec{y},\vec{y}\,\rangle}\,\vec{y}\,\|^2 = \|\vec{w}\,'\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\vec{z}\,'\| = \|\vec{w}\,'\|$$

και άρα θα έχουμε:

$$\frac{1}{\|\vec{z}\,'\|} f(\vec{z}\,') = \frac{1}{\|\vec{w}\,'\|}\vec{w}\,' \qquad \Longrightarrow \qquad f(\vec{z}\,') = \vec{w}\,' \qquad \Longrightarrow \qquad f\left(\vec{z} - \frac{\langle\vec{z},\vec{x}\,\rangle}{\langle\vec{x},\vec{x}\,\rangle}\,\vec{x}\right) = \vec{w} - \frac{\langle\vec{w},\vec{y}\,\rangle}{\langle\vec{y},\vec{y}\,\rangle}\,\vec{y} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad f(\vec{z}) - \frac{\langle\vec{z},\vec{x}\,\rangle}{\langle\vec{x},\vec{x}\,\rangle}\,f(\vec{x}) = \vec{w} - \frac{\langle\vec{w},\vec{y}\,\rangle}{\langle\vec{y},\vec{y}\,\rangle}\,\vec{y}$$

Επειδή $f(\vec{x}) = \vec{y}$ και

$$\frac{\langle\vec{z},\vec{x}\,\rangle}{\langle\vec{x},\vec{x}\,\rangle} = \frac{\langle\vec{z},\vec{x}\,\rangle}{\|\vec{x}\,\|^2} = \frac{\langle\vec{w},\vec{y}\,\rangle}{\|\vec{y}\,\|^2} = \frac{\langle\vec{w},\vec{y}\,\rangle}{\langle\vec{y},\vec{y}\,\rangle}$$

προκύπτει ότι

$$f(\vec{z}\,) = \vec{w}$$

Επομένως δείξαμε ότι υπάρχει ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \quad \text{και} \quad f(\vec{z}\,) = \vec{w}$$

□

Άσκηση 8. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

μια ισομετρία. Να δειχθεί ότι αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε:

$$f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \qquad \Longrightarrow \qquad f(\mathcal{V}^{\perp}) \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

Λύση. Υπενθυμίζουμε πρώτα το εξής:

«*Κάθε ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μεταξύ δυο Ευκλειδείων χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι μονομορφισμός*[1].»

Υποθέτουμε ότι $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ και έστω ένα διάνυσμα $\vec{w} \in f(\mathcal{V}^{\perp})$. Θα δείξουμε ότι $\vec{w} \in \mathcal{V}^{\perp}$. Από τη παραπάνω υπενθύμιση έχουμε ότι η f είναι μονομορφισμός και επειδή $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ έπεται ότι η f περιορίζεται σε μια γραμμική απεικόνιση

$$f_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad f_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι Ευκλείδειος χώρος, ώς υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$, και επειδή η f παραμένει ισομετρία περιορισμένη στον $\mathcal{V}$, έπεται ότι η $f_{\mathcal{V}}$ είναι ισομετρία και άρα είναι μονομορφισμός. Επειδή ο $\mathcal{V}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, ώς υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι η $f_{\mathcal{V}}$ είναι ισομορφισμός και ιδιαίτερα είναι επί. Άρα:

$$f(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \tag{$*$}$$

Επειδή $\vec{w} \in f(\mathcal{V}^{\perp})$, έχουμε ότι $\vec{w} = f(\vec{z})$ για κάποιο $\vec{z} \in \mathcal{V}^{\perp}$. Έστω $\vec{v} \in \mathcal{V}$. Επειδή η f περιορισμένη στον $\mathcal{V}$ είναι επί, από τη σχέση $(*)$, έχουμε $\vec{v} = f(\vec{v}\,')$ για κάποιο $\vec{v}\,' \in \mathcal{V}$ και άρα

$$\begin{aligned} \big\langle\vec{v},\vec{w}\big\rangle &= \big\langle f(\vec{v}\,'), f(\vec{z})\big\rangle \\ &= \big\langle\vec{v}\,',\vec{z}\big\rangle && (f:\ \text{ισομετρία}) \\ &= 0 && (\vec{z} \in \mathcal{V}^{\perp}) \end{aligned}$$

Επομένως $\vec{w} \in \mathcal{V}^{\perp}$ και άρα πράγματι δείξαμε: $f(\mathcal{V}^{\perp}) \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$.

[1] Πράγματι, έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Τότε $\|f(\vec{x})\| = 0$ και επειδή η f είναι ισομετρία έπεται ότι $\|\vec{x}\| = 0$. Συνεπώς $\vec{x} = \vec{0}$ και άρα $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, δηλαδή η f είναι 1-1.

Αντίστροφα έστω ότι ισχύει $f(\mathcal{V}^{\perp}) \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$. Τότε αν αντικαταστήσουμε όπου $\mathcal{V}$ με $\mathcal{V}^{\perp}$ έχουμε ότι $f((\mathcal{V}^{\perp})^{\perp}) \subseteq (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp}$ και άρα $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$, διότι όπως γνωρίζουμε ισχύει ότι $(\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{V}$ επειδή ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση. □

Άσκηση 9. (1) *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^4$ *εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τους υποχώρους του*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\} \\ \mathcal{W} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + w = 0\} \end{aligned}$$

Να βρεθεί μια ισομετρία $f\colon (\mathcal{V}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}_2[t], \langle,\rangle)$ *και μια ισομετρία* $g\colon (\mathcal{W}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$.

(2) *Να εξετασθεί αν υπάρχει ισομετρία* $h\colon (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$, *για κατάλληλο* $n \geq 1$.

Λύση. Από την περιγραφή των συνόλων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$, εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B}_1 = \big\{(1,0,-2,0),\ (0,1,-3,0),\ (0,0,0,1)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, και το σύνολο

$$\mathcal{C}_1 = \big\{(0,0,1,0),\ (0,1,0,1),\ (1,1,0,0)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{W}$. Άρα:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 3 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[t] \qquad \text{και} \qquad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{W} = 3 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$$

Επειδή οι Ευκλείδειοι χώροι $(\mathcal{V}, \langle,\rangle)$ και $(\mathbb{R}_2[t]$ έχουν την ίδια διάσταση, από γνωστό θεώρημα έπεται ότι είναι ισομετρικά ισόμορφοι, και παρόμοια επειδή οι Ευκλείδειοι χώροι $(\mathcal{W}, \langle,\rangle)$ και $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ έχουν την ίδια διάσταση, έπεται ότι είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

1. Για να κατασκευάσουμε μια ισομετρία $f\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$, βρίσκουμε πρώτα ορθοκανονικές βάσεις των $\mathcal{V}$ και $\mathbb{R}_2[t]$.

Με την διαδικασία Gram-Schmidt στη βάση $\mathcal{B}_1$ βλέπουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\Big(0,1,-3,0\Big), \quad \vec{\epsilon}_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\Big(1,-\frac{3}{5},-\frac{1}{5},0\Big), \quad \vec{\epsilon}_3 = \big(0,0,0,1\big)\right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βαση του $\mathcal{V}$.

Η διαδικασία Gram-Schmidt στην κανονική βάση $\{1,t,t^2\}$ του $\mathbb{R}_2[t]$ δίνει, ως γνωστόν την ορθοκανονική βάση

$$\mathcal{F} = \left\{\vec{\varepsilon}_1 = 1, \quad \vec{\varepsilon}_2 = \sqrt{12}(t - \frac{1}{2}), \quad \vec{\varepsilon}_3 = \sqrt{180}(t^2 - t + \frac{1}{6})\right\}$$

Τότε υπάρχει μοναδική ισομετρία

$$f\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_2[t], \quad \text{έτσι ώστε :} \quad f(\vec{\epsilon}_i) = \vec{\varepsilon}_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο ορισμού της f σε ένα διάνυσμα $\vec{\zeta} = (x,y,z,w) \in \mathcal{V}$, εκφράζουμε το $\vec{\zeta}$ ως γραμμικό συνδυασμό $\vec{\zeta} = \kappa\vec{\epsilon}_1 + \lambda\vec{\epsilon}_2 + \mu\vec{\epsilon}_3$ των διανυσμάτων της ορθοκανονικής βάσης $\mathcal{B}$, και κατόπιν εφαρμόζουμε την f: $f(\vec{\zeta}) = \kappa f(\vec{\epsilon}_1) + \lambda f(\vec{\epsilon}_2) + \mu f(\vec{\epsilon}_3) = \kappa\vec{\varepsilon}_1 + \lambda\vec{\varepsilon}_2 + \mu\vec{\varepsilon}_3$ απ' όπου προκύπτει μετά από πράξεις ο ακριβής τύπος της f.

Παρόμοια με την διαδικασία Gram-Schmidt στη βάση $\mathcal{C}_1$ βλέπουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \left\{\vec{\alpha}_1 = \big(0,0,1,0\big), \quad \vec{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(0,1,0,1\Big), \quad \vec{\alpha}_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(1,\frac{1}{2},0,-1\right)\right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βαση του $\mathcal{W}$. Θεωρώντας την κανονική βάση $\big\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$, έπεται τότε ότι υπάρχει μοναδική ισομετρία

$$g\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{έτσι ώστε :} \quad f(\vec{\alpha}_i) = \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο ορισμού της g σε ένα διάνυσμα $\vec{\zeta} = (x, y, z, w) \in \mathcal{W}$, εκφράζουμε το $\vec{\zeta}$ ως γραμμικό συνδυασμό $\vec{\zeta} = \kappa\vec{\alpha}_1 + \lambda\vec{\alpha}_2 + \mu\vec{\alpha}_3$ των διανυσμάτων της ορθοκανονικής βάσης $\mathcal{C}$, και κατόπιν εφαρμόζουμε την g: $g(\vec{\zeta}) = \kappa f(\vec{\alpha}_1) + \lambda f(\vec{\alpha}_2) + \mu f(\vec{\alpha}_3) = \kappa\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \mu\vec{e}_3$ απ' όπου προκύπτει μετά από πράξεις ο ακριβής τύπος της g.

2. Για να υπάρχει ισομετρία $h\colon (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$, για κατάλληλο $n \geq 1$, θα πρέπει

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = n^2 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$$

Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 3 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{W}$, έπεται ότι:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{W} - \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = 6 - \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{W})$$

Η ένωση των βάσεων

$$\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{C}_1 = \Big\{(1,0,-2,0),\ (0,1,-3,0),\ (0,0,0,1)\Big\} \ \bigcup\ \Big\{(1,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,0)\Big\}$$

των $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι προφανώς ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ και εύκολα βλέπουμε ότι το υποσύνολο

$$\mathcal{D} = \Big\{(1,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\Big\}$$

είναι βάση του $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ και επομένως $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = 4$. Με άλλα λόγια $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathbb{R}^4$. Τότε όμως

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$$

Επειδή δεν υπάρχει θετικός ακέραιος $n \geq 1$ έτσι ώστε $n^2 = 2$, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ισομετρία $h\colon (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$, $\forall n \geq 1$. □

Άσκηση 10. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ένας $m \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Έστω*[2] *$\sigma(A)$ η βαθμίδα γραμμών του A και $\gamma(A)$ η βαθμίδα στηλών του A. Να δειχθεί ότι αν $\Lambda(\Sigma)$ είναι ο χώρος λύσεων του ομογενούς συστήματος*

$$(\Sigma) \qquad A \cdot X = O$$

τότε:

(1)
$$\Lambda(\Sigma) = \mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)^{\perp}$$
όπου $\mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από τις γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ του πίνακα A.

(2) $\sigma(A) = \gamma(A)$.

(3) *Υπάρχει μια ισομετρία:*
$$\Lambda(\Sigma) \ \longrightarrow\ \mathbb{R}^{n-\mathbf{r}(A)}$$

Λύση. (1) Το σύστημα (Σ) γράφεται αναλυτικά:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

[2] Υπενθυμίζουμε ότι $\sigma(A)$ ορίζεται να είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A και $\gamma(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα A. Ισοδύναμα:

$$\sigma(A) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n) \quad \text{και} \quad \gamma(A) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)$$

όπου $\mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n)$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_m$ ο οποίος παράγεται από τις στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ του πίνακα A και $\mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από τις γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ του πίνακα A.

Από τη Γραμμική Άλγεβρα Ι γνωρίζουμε ότι $\sigma(A) = \gamma(A)$ και η κοινή αυτή τιμή καλείται βαθμίδα του πίνακα A και συμβολίζεται με $\mathbf{r}(A)$. Στην παρούσα Άσκηση δείχνουμε την ισότητα $\sigma(A) = \gamma(A)$ με έναν διαφορετικό απλούστερο τρόπο.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \big\langle (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}),\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \big\rangle = 0 \\ \big\langle (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}),\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \big\rangle = 0 \\ \quad\vdots \\ \big\langle (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}),\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \big\rangle = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \quad \big\langle \Gamma_k, {}^tX \big\rangle = 0, \quad 1 \leq k \leq m$$

όπου $\Gamma_k = (a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kn})$ είναι η k-γραμμή του πίνακα A και ${}^tX = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, και εργαζόμαστε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$.

Επομένως ο χώρος λύσεων του (Σ) είναι:

$$\Lambda(\Sigma) = \big\{ X \in \mathbb{R}_n \mid A \cdot X = \mathsf{O} \big\} = \big\{ {}^tX \in \mathbb{R}^n \mid \big\langle \Gamma_k, {}^tX \big\rangle = 0, \quad 1 \leq k \leq m \big\}$$

Επειδή οι γραμμές Γ_k, $1 \leq k \leq m$, παράγουν τον υπόχωρο $\mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)$, έπεται ότι:

$$\Lambda(\Sigma) = \big\{ X \in \mathbb{R}_n \mid A \cdot X = \mathsf{O} \big\} = \Big\{ {}^tX \in \mathbb{R}^n \mid \big\langle \Gamma, {}^tX \big\rangle = 0, \ \ \forall\, \Gamma \in \mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m) \Big\}$$

και άρα

$$\Lambda(\Sigma) = \mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)^{\perp}$$

(2) Γνωρίζουμε[3] ότι

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \Lambda(\Sigma) = n - \sigma(A) \tag{1}$$

και από την παραπάνω σχέση θα έχουμε[4]:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \Lambda(\Sigma) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m)^{\perp} = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n - \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m) = n - \gamma(A) \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\gamma(A) = \sigma(A) := \mathbf{r}(A)$$

(3) Επειδή ο χώρος λύσεων $\Lambda(\Sigma)$ του (Σ) είναι υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}_n, \langle\,\rangle)$, έπεται ότι ο χώρος $\Lambda(\Sigma)$ είναι Ευκλείδειος με διάσταση $n - \mathbf{r}(A)$. Επομένως σύμφωνα με γνωστό Θεώρημα, υπάρχει μια ισομετρία

$$\Lambda(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}^{n - \mathbf{r}(A)}$$

□

Άσκηση 11. *Έστω* $\in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *ένας* 2×2 *ορθογώνιος πίνακας.*

(1) *Αν* $|A| = 1$, *να δειχθεί ότι ο πίνακας* A *έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή αν και μόνον αν*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ή} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[3] Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

Τότε $\Lambda(\Sigma) = \mathrm{Ker}(f_A)$ και $\mathrm{Im}(f_A) = \mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n)$. Επομένως από την εξίσωση διαστάσεων θα έχουμε:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \Lambda(\Sigma) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n - \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n) = n - \sigma(A)$$

[4] Υπενθυμίζουμε ότι σε έναν Ευκλείδειο χώρο πεπερασμένης διάστασης $(\mathcal{E}, \langle\,\rangle)$, για κάθε υποχωρο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ έχουμε ότι:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp} \qquad \text{και} \qquad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^{\perp}$$

(2) *Αν $|A| = -1$, να δειχθεί ότι ο πίνακας A έχει πάντα πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$, και επομένως ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και είναι όμοιος με τον πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι ο ορθογώνιος πίνακας A έχει ορίζουσα ± 1 και αν έχει μια πραγματική ιδιοτιμή λ, τότε $\lambda = \pm 1$.

(1) Αν $|A| = 1$, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ είναι

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - t \end{vmatrix} = t^2 - 2\cos\theta + 1$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $P_A(t)$ είναι $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) \leq 0$ και άρα το τριώνυμο $P_A(t)$ έχει τουλάχοστον μια πραγματική ρίζα αν και μόνον αν $\cos^2\theta = 1$, δηλαδή $\cos\theta = \pm 1$ και επομένως $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και στην δεύτερη περίπτωση έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Αν $|A| = 1$, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ είναι

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

Τότε ο πίνακας A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$, και επομένως είναι διαγωνοποιήσιμος και είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ □

Άσκηση 12. *Έστω A ένας ορθογώνιος 2×2 πίνακας πραγματικών αριθμών με ορίζουσα $|A| = -1$. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα στήλες*

$$F_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα τπου A τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 1 και -1 αντίστοιχα. Επιπλέον, να δειχθεί ότι θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Επειδή ο πίνακας A είναι ορθογώνιος με ορίζουσα $|A| = -1$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$P_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$.

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες,

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \ \pm \ \cos\theta\sin\phi$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \ \mp \ \sin\theta\sin\phi$$

θα έχουμε:

$$A \cdot F_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos(\theta/2) + \sin\theta\sin(\theta/2) \\ \sin\theta\cos(\theta/2) - \cos\theta\sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = F_1$$

$$A \cdot F_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin(\theta/2) + \sin\theta\cos(\theta/2) \\ -\sin\theta\sin(\theta/2) - \cos\theta\cos(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} = -F_2$$

Επομένως τα διανύσματα F_1 και F_2 είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 1 και -1 αντίστοιχα. Ιδιαίτερα ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επειδή το σύνολο $\{F_1, F_2\}$ αποτελεί προφανώς μια ορθοκανονική βάση του χώρου των στηλών $\mathbb{R}_2$, έπεται ότι ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και έχει την ιδιότητα ότι:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ □

• • •

Υπενθυμίσεις από τη Θεωρία: Ισομετρίες στο Επίπεδο. Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, όπου υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = 2$. Έστω επίσης $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ ο πίνακας της f σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ του $\mathcal{E}$.

Γνωρίζουμε τότε οτι ο πίνακας A είναι ορθογώνιος και $|A| = \pm 1$.

(1) Έστω ότι $|A| = 1$. Τότε υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

και επομένως η ισομετρία f είναι της μορφής:

$$f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{e}_1 \ + \ (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{e}_2$$

Η ισομετρία f γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου, το επίπεδο είναι ο υπόχωρος διάστασης 2 ο οπποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{e}_1$ και $\vec{e}_2$ δηλαδή ο ίδιος ο χώρος $\mathcal{E}$, κατά γωνία θ με φορά περιστροφής αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Η γωνία περιστροφής θ προκύπτει από τον τύπο:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A)}{2}$$

(2) Έστω ότι $|A| = -1$. Τότε υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

και επομένως η ισομετρία f είναι της μορφής:

$$f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = (x\cos\theta + y\sin\theta)\vec{e}_1 \; + \; (x\sin\theta - y\cos\theta)\vec{e}_2$$

Η ισομετρία f γεωμετρικά παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα (ϵ), δηλαδή έναν μονοδιάστατο υπόχωρο του $\mathcal{E}$, και ο οποίος σχηματίζει γωνία $\frac{\theta}{2}$ με το διάνυσμα $\vec{e}_1$. Ο άξονας (ϵ) ορίζεται ως ο ιδιοχώρος ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, βλέπε την Άσκηση 11. Αν $\vec{\varepsilon}_1$ είναι ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, τότε η γωνία την οποία σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_1$ και $\vec{e}_1$ είναι $\frac{\theta}{2}$ και η γωνία θ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_1 \rangle = \|\vec{\varepsilon}_1\| \cdot \|\vec{e}_1\| \cos\frac{\theta}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_1 \rangle$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$, άρα είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν $\vec{\varepsilon}\,'_1$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\mathcal{E}$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, και $\vec{\varepsilon}\,'_2$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\mathcal{E}$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$, τότε το διάνυσμα $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{\vec{\varepsilon}\,'_1}{\|\vec{\varepsilon}\,'_1\|}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(1)$, το διάνυσμα του $\vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{\varepsilon}\,'_2}{\|\vec{\varepsilon}\,'_2\|}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(-1)$, και το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \, \vec{\varepsilon}_2\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$. Ο πίνακας της ισομετρίας f στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{C}$ είναι:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Αντί της ισομετρίας $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = 2$, μπορεί να μας δοθεί ένας ορθογώνιος 2×2 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Τότε ο πίνακας A ορίζει τον ενδομορφισμό

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

του οποίου ο πίνακας στην κανονική βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ του $\mathbb{R}^2$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι ο A. Αυτό σημαίνει ότι ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία.

(1) Αν $|A| = 1$, τότε υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

και επομένως η ισομετρία f είναι της μορφής:

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \big(x\cos\theta - y\sin\theta, \, x\sin\theta + y\cos\theta\big)$$

Η ισομετρία f γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου, κατά γωνία θ με φορά περιστροφής αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Η γωνία περιστροφής θ προκύπτει από τον τύπο:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A)}{2}$$

(2) Αν $|A| = -1$, τότε πάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

και επομένως η ισομετρία f είναι της μορφής:

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \big(x\cos\theta + y\sin\theta, \, x\sin\theta - y\cos\theta\big)$$

Η ισομετρία f γεωμετρικά παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα (ϵ) ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή έναν μονοδιάστατο υπόχωρο του $\mathcal{E}$, και ο οποίος σχηματίζει γωνία $\dfrac{\theta}{2}$ με τον άξονα των x, δηλαδή με το διάνυσμα $\vec{e}_1 = (1,0)$. Ο άξονας (ϵ) ορίζεται ως ο ιδιοχώρος $\mathcal{V}(1)$ ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, βλέπε την Άσκηση 11. Αν $\vec{\varepsilon}_1$ είναι ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, τότε η γωνία την οποία σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_1$ και $\vec{e}_1$ είναι $\dfrac{\theta}{2}$ και η γωνία θ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_1 \rangle = \|\vec{\varepsilon}_1\| \cdot \|\vec{e}_1\| \cos\frac{\theta}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_1 \rangle$$

Αν $\vec{\varepsilon}_2$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(-1)$, τότε το σύνολο

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\varepsilon}_1,\, \vec{\varepsilon}_2\big\}$$

είναι και ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ στην οποία ο πίνακας του ενδομορφισμού f είναι ο $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Επειδή ο A είναι ο πίνακας του ενδομορφισμού f στην κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^2$, η οποία είναι ορθοκανονική, έπεται ότι οι πίνακες A και $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι. Έτσι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, ο οποίος είναι ο πίνακας μετάβασης $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$, έτσι ώστε: $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας P είναι ορθογώνιος ως πίνακας μετάβασης μεταξύ ορθοκανονικών βάσεων, και οι στήλες του αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων της ορθοκανονική βάσης $\mathcal{C}$, και θα έχουμε:

$$^{t}P \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ισοδύναμα μπορούμε να εργασθούμε, έχοντας τα ίδια συμπεράσματα, και με τον ενδομορφισμό

$$f_A \colon \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_2, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

• • •

Άσκηση 13. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα (ϵ), ο οποίος και να βρεθεί. Ποιά είναι η γωνία την οποία σχηματίζει ο άξονας με τον άξονα των x;

Λύση. Επειδή οι στήλες

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

αποτελούν προφανώς μια ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathbb{R}_2$, έπεται ότι ο A είναι ορθογώνιος και, όπως μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα, έχουμε $|A| = -1$. Τότε υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi)$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

και πίνακας A γεωμετρικά παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα (ϵ) ο οποίος σχηματίζει γωνία $\dfrac{\theta}{2}$ με τον άξονα των x.

Θεωρούμε την επαγόμενη από τον ορθογώνιο πίνακα A ισομετρία του $\mathbb{R}^2$.

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(x + 2y, 2x - y\Big)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το διάνυσμα $\vec{\varepsilon}_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Τότε ο άξονας συμμετρίας (ϵ) είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος

$$\mathcal{V}(1) = \left\{ t\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Από τη σχέση $(*)$ προκύπτει ότι

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.448 \qquad \Longrightarrow \qquad \theta \approx 63.38^\circ$$

Άρα η γωνία την οποία σχηματίζει ο άξονας συμμετρίας (ϵ) με τον άξονα των x είναι:

$$\frac{\theta}{2} \approx \frac{63.48^\circ}{2} = 31.74^\circ$$

□

Άσκηση 14. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι ορθογώνιος, και ακολούθως:

(1) *Να εξετασθεί αν ο πίνακας A παριστάνει γεωμετρικά περιστροφή (σε αυτή την περίπτωση να βρεθεί η γωνία περιστροφής) ή συμμετρία ως προς άξονα (σε αυτή την περίπτωση να βρεθεί ο άξονας συμμετρίας).*

(2) *Αν ο πίνακας A παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα, να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε:*

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Ο πίνακας A είναι ορθογώνιος αν και μόνον αν οι στήλες του

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2$. Θα έχουμε:

$$\langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{12}{25} - \frac{12}{25} = 0$$

$$\|\Sigma_1\| = \sqrt{\langle \Sigma_1, \Sigma_1 \rangle} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\Sigma_2\| = \sqrt{\langle \Sigma_2, \Sigma_2 \rangle} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

Άρα πράγματι ο πίνακας A είναι ορθογώνιος.

(1) Επειδή προφανώς $|A| = -1$, έπεται ότι ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές τους πραγματικούς αριθμούς $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$, και γεωμετρικά παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα (ϵ) ο οποίος σχηματίζει γωνία $\theta/2$ με τον άξονα των x. Για να προσδιορίζουμε τον άξονα συμμετρίας (ϵ), βρίσκουμε τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(1)$:

$$(A - I_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3/5 - 1 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -8/5 & -4/5 \\ -4/5 & -2/5 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{8}{5}x - \frac{4}{5}y = 0 \\ -\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = -2x \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\mathcal{V}(1) = \big\{X \in \mathbb{R}_2 \mid A \cdot X = X\big\} = \left\{\kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid \kappa \in \mathbb{R}\right\}$$

και το διάνυσμα στήλη $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ είναι μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(1)$. Επειδή

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{5}$$

έπεται οτι το διάνυσμα

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(1)$. Τότε ο άξονας συμμετρίας (ϵ) είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος

$$(\epsilon): \quad \mathcal{V}(1) = \left\{\kappa \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid \kappa \in \mathbb{R}\right\}$$

Η γωνία την οποία σχηματίζει ο άξονας συμμετρίας (ϵ) με τον άξονα των x ορίζεται από τη σχέση

$$\cos\frac{\theta}{2} = \langle E_1, F_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.448 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\theta}{2} = 63.38^\circ \quad \Longrightarrow \quad \theta = 126.86^\circ$$

(2) Για να προσδιορίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P, προσδιορίζουμε μια ορθοκανονική βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(-1)$:

$$(A + I_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3/5 + 1 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2/5 & -4/5 \\ -4/5 & 8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}y = 0 \\ -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5}y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 2y \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\mathcal{V}(-1) = \big\{X \in \mathbb{R}_2 \mid A \cdot X = -X\big\} = \left\{\kappa \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid \kappa \in \mathbb{R}\right\}$$

και το διάνυσμα στήλη $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(-1)$. Επειδή

$$\|Y\| = \sqrt{\langle Y, Y\rangle} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{5}$$

έπεται οτι το διάνυσμα

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(-1)$.

Το σύνολο διανυσμάτων

$$\mathcal{C} = \left\{F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2$ και ο πίνακας

$$P = \big(F_1 \, F_2\big) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 15. *«Στροφές Επιπέδου μετατίθενται»*

(1) *Αν A και B είναι δύο ορθογώνιοι 2×2 πίνακες με ορίζουσα $|A| = 1 = |B|$, να δειχθεί ότι:*

$$A \cdot B = B \cdot A$$

(2) *Αν $f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι δύο ισομετρίες επί ενός Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, έτσι ώστε $\mathsf{Det}(f) = 1 = \mathsf{Det}(g)$, να δειχθεί ότι:*

$$f \circ g = g \circ f$$

Λύση. (1) Επειδή οι πίνακες A και B είναι ορθογώνιοι με ορίζουσα ίση με 1, έπεται ότι

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, και

$$B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

για μια μοναδική γωνία $\phi \in [0, 2\pi)$. Τότε θα έχουμε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\theta + \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες,

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \ \pm \ \cos\theta\sin\phi$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \ \mp \ \sin\theta\sin\phi$$

θα έχουμε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} = B \cdot A$$

(2) Έστω $\mathcal{B}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ και A και B οι πίνακες των ισομετριών f και g ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ αντίστοιχα. Τότε οι πίνακες A και B είναι ορθογώνιοι, και, επειδή $\mathsf{Det}(f) = 1 = \mathsf{Det}(g)$, θα έχουμε $|A| = 1 = |B|$. Από το μέρος (1) θα έχουμε $A \cdot B = B \cdot A$ και τότε προφανώς $f \circ g = g \circ f$. $\square$

Άσκηση 16. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Να συμπληρωθεί ο πίνακας A έτσι ώστε να είναι ορθογώνιος.

Λύση. Εργαζόμενοι στην Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}_4, \langle , \rangle)$, για να είναι ο πίνακας A ορθογώνιος πρέπει και αρκεί οι στήλες του A να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_4$, δηλαδή πρέπει να τον συμπληρώσουμε με κατάλληλα διανύσματα στήλες έτσι ώστε να έχουν μέτρο ένα και να είναι κάθετα μεταξύ τους. Θέτουμε

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τότε $\|\Sigma_3\| = 1$ και $\langle \Sigma_1, \Sigma_3 \rangle = \langle \Sigma_2, \Sigma_3 \rangle = 0$. Έστω

$$\Sigma_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Θέλουμε το διάνυσμα στήλη Σ_4 να έχει μέτρο ένα και να είναι κάθετο με τα τρία προηγούμενα διανύσματα στήλες του πίνακα A, δηλαδή: $\|\Sigma_4\| = 1$ και $\langle\Sigma_1, \Sigma_4\rangle = \langle\Sigma_2, \Sigma_4\rangle = \langle\Sigma_3, \Sigma_4\rangle = 0$. Έχουμε:

$$\big\langle\Sigma_3, \Sigma_4\big\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta = 0$$

$$\big\langle\Sigma_1, \Sigma_4\big\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\beta - \gamma \tag{1}$$

$$\big\langle\Sigma_2, \Sigma_4\big\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha + 2\beta - 3\gamma = 0 \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \beta = 4\gamma \\ \\ \alpha = -5\gamma \end{cases}$$

Επομένως $\delta = 0$, $\beta = 4\gamma$ και $\alpha = -5\gamma$, και τότε:

$$\begin{aligned} \|\Sigma_4\| = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1 \\ &\Longrightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ &\Longrightarrow \quad (-5\gamma)^2 + (4\gamma)^2 + \gamma^2 = 1 \\ &\Longrightarrow \quad 25\gamma^2 + 16\gamma^2 + \gamma^2 = 1 \\ &\Longrightarrow \quad 42\gamma^2 = 1 \\ &\Longrightarrow \quad \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{42}} \end{aligned}$$

Άρα η στήλη Σ_4 που ψάχνουμε είναι

$$\Sigma_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{42}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{42}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \Sigma_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{-4}{\sqrt{42}} \\ \frac{-1}{\sqrt{42}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο ορθογώνιος πίνακας που ζητάμε είναι ένας εκ των

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{42}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ □

Άσκηση 17. *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\langle\ ,\ \rangle' \ :\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \big\langle(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big\rangle' = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\langle\ ,\ \rangle'$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.*
(2) *Να δείξετε ότι ο ενδομορφισμός*

$$f \ :\ (\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle'), \qquad f(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right)$$

είναι μια ισομετρία, όπου $\langle\ ,\ \rangle$ είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

Λύση. Έστω $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle' &= 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3\\ &= 4y_1x_1 + 2y_2x_2 + 8y_3x_3\\ &= \langle (y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)\rangle' &= \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), (z_1, z_2, z_3)\rangle'\\ &= 4(x_1 + y_1)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 + 8(x_3 + y_3)z_3\\ &= 4x_1z_1 + 4y_1z_1 + 2x_2z_2 + 2y_2z_2 + 8x_3z_3 + 8y_3z_3\\ &= 4x_1z_1 + 2x_2z_2 + 8x_3z_3 + 4y_1z_1 + 2y_2z_2 + 8y_3z_3\\ &= \langle (x_1, x_2, x_3), (z_1, z_2, z_3)\rangle + \langle (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)\rangle'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \lambda(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle' &= \langle (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle'\\ &= 4\lambda x_1y_1 + 2\lambda x_2y_2 + 8\lambda x_3y_3\\ &= \lambda(4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3)\\ &= \lambda\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle'\end{aligned}$$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle' = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 \geq 0$$

και $\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle' = 0$ αν και μόνο αν $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Άρα η απεικόνιση $\langle\ ,\ \rangle'$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. Έστω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε:

$$\begin{aligned}\|f(x, y, z)\| &= \sqrt{\big\langle f(x, y, z), f(x, y, z)\big\rangle'}\\ &= \sqrt{\left\langle \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right)\right\rangle'}\\ &= \sqrt{4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{2}} + 8\cdot\frac{z}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{z}{2\sqrt{2}}}\\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\\ &= \|(x, y, z)\|\end{aligned}$$

Άρα ο ενδομορφισμός $f: \big(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle'\big),\ f(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{\sqrt{2}}, \dfrac{z}{2\sqrt{2}}\right)$ είναι ισομετρία. □

Υπενθυμίσεις από τη Θεωρία: Πως εφαρμόζουμε του Θεώρημα του Euler. Υπενθυμίζουμε ότι από το Θεώρημα του Euler, κάθε ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ σε ένα Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{E}$ διάστασης 3 με ορίζουσα[5] $\mathsf{Det}(f) = 1$, γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο (Π).

(1) Γνωρίζουμε ότι ο f έχει ως ιδιοτιμή το 1. Αν $\vec{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, τότε θέτουμε $\vec{\epsilon}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ και τότε ο άξονας περιστροφής (ε) είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος

$$\underline{\text{ο άξονας}}\ (\epsilon): \qquad \mathcal{V} = \left\{\kappa\vec{\epsilon}_1 \in \mathcal{E} \mid \kappa \in \mathbb{R}\right\}$$

[5] Υπενθυμίζουμε ότι η ορίζουσα ενός ενδομορφισμού $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ορίζεται να είναι η ορίζουσα του πίνακα του f σε μια τυχούσα βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$:

$$\mathsf{Det}(f) = |M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)|$$

(2) Συμπληρώνουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\epsilon}_1$ σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3\}$ του $\mathcal{E}$. Τότε το επίπεδο (Π) είναι ο υπόχωρος $\mathcal{V}^{\perp}$ ο οποίος έχει διάστασης 2 και ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\underline{\text{το επίπεδο}}\ (\Pi): \qquad \mathcal{V}^{\perp} = \{\kappa\vec{\epsilon}_2 + \lambda\vec{\epsilon}_3 \in \mathcal{E} \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(3) Η γωνία στροφής θ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\underline{\text{η γωνία περιστροφής}}\ (\theta): \qquad \cos\theta = \frac{\mathsf{Tr}(A) - 1}{2}$$

όπου $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ είναι ο πίνακας του f σε μια τυχούσα βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$.

• Αντί της ισομετρίας $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, όπου $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{E} = 3$ και $\mathsf{Det}(f) = 1$, μπορεί να μας δοθεί ένας ορθογώνιος 3×3 πίνακας A με $|A| = 1$. Παρόμοια ο πίνακας A γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο (Π). Σε αυτή την περίπτωση, το Θεώρημα του Euler εφαρμόζεται ως εξής. Εργαζόμαστε στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}_3, \langle,\rangle)$ και τότε ο ενδομορφισμός

$$f_A \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

είναι ισομετρία διότι ο πίνακας του ενδομορφισμού f_A στην κανονική βάση $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$ του $\mathbb{R}_3$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι ο ορθογώνιος πίνακας A. Τότε ο πίνακας A, ισοδύναμα η ισομετρία f_A, γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο (Π):

(1) Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A, ή ισοδύναμα η ισομετρία f_A, έχει ως ιδιοτιμή το 1. Αν $F_1' \in \mathbb{R}_3$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα-στήλη του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, τότε θέτουμε $F_1 = \frac{F_1'}{\|F_1'\|}$ και τότε ο άξονας περιστροφής (ε) είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος

$$\underline{\text{ο άξονας}}\ (\epsilon): \qquad \mathcal{V} = \{\kappa F_1 \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$$

(2) Συμπληρώνουμε το μοναδιαίο διάνυσμα-στήλη F_1 σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$ του $\mathbb{R}_3$. Τότε το επίπεδο (Π) είναι ο υπόχωρος $\mathcal{V}^{\perp}$ του $\mathbb{R}_3$ ο οποίος έχει διάσταση 2 και ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα-στήλες F_2, F_3:

$$\underline{\text{το επίπεδο}}\ (\Pi): \qquad \mathcal{V}^{\perp} = \{\kappa F_2 + \lambda F_3 \in \mathcal{E} \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(3) Η γωνία στροφής θ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\underline{\text{η γωνία περιστροφής}}\ (\theta): \qquad \cos\theta = \frac{\mathsf{Tr}(A) - 1}{2}$$

Επιπλέον θα έχουμε ότι $f_A(\mathcal{V}^{\perp}) \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$, και άρα η ισομετρία $f_A \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ επάγει μια ισομετρία $f_A' \colon \mathcal{V}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{V}^{\perp}$, της οποίας ο πίνακας στην ορθοκανονική βάση $\{F_2, F_3\}$ είναι ορθογώνιος με ορίζουσα ίση με 1 και επομένως είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

όπου όπως και παραπάνω, θ είναι η γωνία περιστροφής του άξονα θ. Τότε ο πίνακας της ισομετρίας f_A στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{C}$ είναι ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι διότι είναι πίνακες του ενδομορφισμού f_A στις ορθοκανονικές βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ αντίστοιχα. Επομένως αν $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{C}$, θα έχουμε $P^{-1}AP = B$. Όμως επειδή ο P είναι πίνακας μετάβασης μεταξύ ορθοκανονικών βάσεων, έοπεται ότι ο P είναι ορθογώνιος, και άρα $P^{-1} = {}^tP$, και σχηματίζεται από τις στήλες της ορθοκανονική βάσης $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$ του $\mathbb{R}_3$. Συνοψίζουμε: για τον ορθογώνιο πίνακα A υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \cos\theta = \frac{\mathsf{Tr}(A) - 1}{2} \qquad \text{και} \quad P = \begin{pmatrix} F_1\, F_2\, F_3 \end{pmatrix} \tag{†}$$

Ένας πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ καλείται **ορθογώνια όμοιος** με έναν πίνακα B αν και μόνον αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P, επομένως $P^{-1} = {}^tP$, έτσι ώστε:

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = B $$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Euler, κάθε ορθογώνιος πίνακας A με ορίζουσα $|A| = 1$, είναι ορθογώνια όμοιος με έναν πίνακα όπως στην παραπάνω σχέση (†).

- Ισοδύναμα μπορούμε να εργαστούμε στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^3, \langle\,\rangle)$ χρησιμοποιώντας τον ενδομορφισμό

$$ f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x',y',z'), \quad \text{όπου} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} $$

ο οποίος είναι ισομετρία διότι ο πίνακας του ενδομορφισμού f στην κανονική βάση $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ του $\mathbb{R}^3$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι ο ορθογώνιος πίνακας A. Τότε μετατρέποντας τις στήλες F_1, F_2, F_3 σε γραμμές ${}^tF_1, {}^tF_2, {}^tF_3$, αποκτούμε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{D} = \big\{{}^tF_1, {}^tF_2, {}^tF_3\big\}$ του $\mathbb{R}^3$, και όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, ο πίνακας A, ισοδύναμα η ισομετρία f, γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο (Π), όπου:

(1) Ο άξονας περιστροφής (ε) είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος

$$ \underline{\text{ο άξονας}}\ \ (\epsilon): \qquad \mathcal{V} = \big\{\kappa {}^tF_1 \in \mathbb{R}^3 \mid \kappa \in \mathbb{R}\big\} $$

(2) Το επίπεδο (Π) είναι ο υπόχωρος $\mathcal{V}^\perp$ του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος έχει διάσταση 2 και ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα ${}^tF_2, {}^tF_3$:

$$ \underline{\text{το επίπεδο}}\ \ (\Pi): \qquad \mathcal{V}^\perp = \big\{\kappa {}^tF_2 + \lambda {}^tF_3 \in \mathbb{R}^3 \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\big\} $$

(3) Η γωνία στροφής θ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$ \underline{\text{η γωνία περιστροφής}}\ \ (\theta): \qquad \cos\theta = \frac{\mathsf{Tr}(A) - 1}{2} $$

(4) Ο πίνακας της ισομετρίας f στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{D}$ είναι ο πίνακας

$$ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} $$

(5) Ο ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ${}^tP \cdot A \cdot P = B$ είναι ο πίνακας $P = \big(F_1\, F_2\, F_3\big)$.

Άσκηση 18. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} $$

παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα κάθετο σ' αυτό και να προσδιορισθεί ο άξονας και η γωνία στροφής. Με ποιόν πίνακα είναι ορθογώνια όμοιος ο πίνακας A;

Λύση. Ο πίνακας A είναι ορθογώνιος διότι όπως μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα: ${}^tA \cdot A = I_3$. Διαφορετικά: βλέπουμε άμεσα ότι οι στήλες του πίνακα A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$. Επιπλέον, αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της τρίτης στήλης, εύκολα υπολογίζουμε ότι $|A| = 1$.

Άρα από το Θεώρημα του Euler ο πίνακας A παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) γύρω από άξονα (ε) κάθετο σ' αυτό κατά γωνία θ. Επίσης, από τη εκτεθείσα θεωρία γνωρίζουμε ότι ο A έχει ιδιοτιμή το $\lambda = 1$ και ο άξονας στροφής είναι ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}$ ο οποίος παράγεται από ένα ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Έχουμε:

$$A \cdot X = 1 \cdot X \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

Θέτοντας

$$F_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και $\mathcal{V} = \left\{\kappa F_1' \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R}\right\}$, έπεται ότι το διάνυσμα στήλη F_1' αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}$ και το διάνυσμα

$$F_1 = \frac{F_1'}{\|F_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$.

Συμπληρώνουμε το μοναδιαίο διάνυσμα F_1 σε μια ορθοκανονιοκή βάση του $\mathbb{R}_3$: Εύκολα βρίσκουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$. Ισοδύναμα το σύνολο διανυσμάτων

$$\left\{ F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου υπόχωρου $\mathcal{V}^{\perp}$. Τότε σύμφωνα με την εκτεθείσα θεωρία, το επίπεδο περιστροφής (Π) ορίζεται από τον υπόχωρο

$$\mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{L}(F_2, F_3) = \left\{ \kappa \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\kappa}{\sqrt{2}} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα στήλες F_2 και F_3.

Η γωνία στροφής θ προσδιορίζεται ως εξής:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathsf{Tr} A - 1}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \theta = \pi$$

Από το Θεώρημα του Euler, γνωρίζουμε τότε ο ορθογώνιος πίνακας A είναι ορθογώνια όμοιος με τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

όπου θ είναι η γωνία στροφής. Επειδή $\theta = \pi$, έπεται ότι ο πίνακας A είναι ορθογώνια όμοιος με τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και τότε θεωρώντας τον πίνακα P ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες της ορθοκανονικής βάσης $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα P έτσι ώστε:

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \square $$

Άσκηση 19. *Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, θεωρούμε τον ενδομορφισμό*

$$ f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + az,\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + bz,\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + cz\right) $$

(1) *Να υπολογίσουν οι τιμές των πραγματικών αριθμών a, b και c έτσι ώστε ο f να είναι ισομετρία η οποία παριστά στροφή επιπέδου γύρω από άξονα κάθετο σ' αυτό.*

(2) *Αν ο f είναι ισομετρία,*

  (α') *να υπολογισθεί η γωνία των διανυσμάτων $f(1,0,0)$ και $f(0,1,0)$.*

  (β') *να βρεθεί το επίπεδο και ο άξονας περιστροφής του ερωτήματος (1).*

Λύση. (1) Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε:

$$ \begin{cases} f(1,0,0) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \\[2ex] f(0,1,0) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\[2ex] f(0,0,1) = (a,b,c) \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) := A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & a \\ 2/3 & -1/3 & b \\ -1/3 & 2/3 & c \end{pmatrix} $$

και τότε γνωρίζουμε ότι

$$ f: \text{ισομετρία} \iff A: \text{ορθογώνιος} $$

Άρα πρέπει να βρούμε τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας A να είναι ορθογώνιος, δηλαδή θέλουμε το διάνυσμα (a,b,c) να είναι κάθετο με τα διανύσματα $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ και να έχει μέτρο ένα. Έχουμε:

$$ \begin{cases} \left\langle (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), (a,b,c) \right\rangle = 0 \\[2ex] \left\langle (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (a,b,c) \right\rangle = 0 \\[2ex] \|(a,b,c)\| = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a + 2b - c = 0 \\[2ex] 2a - b + 2c = 0 \\[2ex] a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} $$

Αφαιρώντας από τη πρώτη εξίσωση τη δεύτερη βρίσκουμε ότι $b = c$ και άρα $a = -\frac{b}{2}$. Συνεπώς έχουμε $(a,b,c) = (-\frac{k}{2}, k, k), k \in \mathbb{R}$ και από τη τρίτη εξίσωση έπεται ότι

$$ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \implies \frac{k^2}{4} + k^2 + k^2 = 1 \implies 9k^2 = 4 \implies k = \pm\frac{2}{3} $$

Συνεπώς $(a,b,c) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ή $(a,b,c) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ και άρα

$$ A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} $$

Όμως θέλουμε η f να είναι ισομετρία η οποία παριστά στροφή επιπέδου γύρω από άξονα κάθετο σ' αυτό, δηλαδή ισοδύναμα σύμφωνα με το Θεώρημα του Euler: $|A| = 1$. Υπολογίζουμε

$$ \begin{vmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{vmatrix} = -1 $$

και άρα

$$ A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} $$

Συνεπώς για τις τιμές

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{2}{3}, \quad c = -\frac{2}{3}$$

η f είναι ισομετρία η οποία παριστά στροφή επιπέδου γύρω από άξονα κάθετο σ' αυτό.

(2) Επειδή η f είναι ισομετρία έπεται ότι η f διατηρεί τη γωνία δυο διανυσμάτων. Άρα επειδή τα διανύσματα $(0,1,0)$ και $(1,0,0)$ είναι κάθετα μεταξύ τους έπεται ότι η γωνία των διανυσμάτων $f(1,0,0)$ και $f(0,1,0)$ είναι $\frac{\pi}{2}$.

Στη συνέχεια θα βρούμε το επίπεδο και τον άξονα περιστροφής του ερωτήματος (1). Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι ο A έχει ιδιοτιμή το $\lambda = 1$ και ο άξονας περιστροφής είναι ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}(1)$. Έχουμε:

$$A \cdot X = 1 \cdot X \implies \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -5/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ \\ -6z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2y, \ y \in \mathbb{R} \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

και άρα ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}(1)$, δηλαδή ο άξονας περιστροφής (ε), είναι

$$\mathcal{V}(1) = \big\{ (2y, y, 0) \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \big\} = \big\langle (2,1,0) \big\rangle$$

Το σύνολο $\{\vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(1)$, την οποία την συμπληρώνουμε σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε

$$\left\langle (x,y,z), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0) \right\rangle = 0 \implies 2x + y = 0 \implies y = -2x$$

Άρα για $x = 1$ έχουμε το διάνυσμα $(1,-2,0)$ με μέτρο $\|(1,-2,0)\| = \sqrt{5}$ και θέτουμε $\vec{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$. Ακόμα έχουμε:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0), (x,y,z) \right\rangle = 0 \\ \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), (x,y,z) \right\rangle = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y = 0 \\ \\ x - 2y = 0 \end{cases} \implies x = y = 0 \quad \text{και} \quad z \in \mathbb{R}$$

Για $z = 1$ έχουμε $\vec{\epsilon}_3 = (0,0,1)$ και άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$\left\{ \vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0), \ \vec{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \ \vec{\epsilon}_3 = (0,0,1) \right\}$$

Τότε το επίπεδο (π) ορίζεται από τον υπόχωρο $\mathcal{L}(\vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$. Τέλος η γωνία περιστροφής είναι

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}A - 1}{2} = \cdots = -\frac{2}{3} = 0.666 \implies \theta \approx 131.76^\circ \qquad \square$$

Άσκηση 20. *Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο (Π) κατά γωνία θ. Να βρεθεί το επίπεδο (Π), άξονας περιστροφής (ϵ) και η γωνία περιστροφής θ.*

(2) *Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε*

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} $$

Λύση. (1) Θεωρούμε τις στήλες του πίνακα A:

$$ \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 8/9 \\ -4/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 4/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} -4/9 \\ -7/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} $$

Εύκολα υπολογίζουμε:

$$ \langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle = \langle \Sigma_1, \Sigma_3 \rangle = \langle \Sigma_2, \Sigma_3 \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \|\Sigma_1\| = \|\Sigma_2\| = \|\Sigma_3\| = 1 $$

Επομένως οι στήλες του πίνακα A αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$ και άρα ο πίνακας A είναι ορθογώνιος.

$$ A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} $$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A:

$$ |A| = \begin{vmatrix} 8/9 & 1/9 & -4/9 \\ -4/9 & 4/9 & -7/9 \\ 1/9 & 8/9 & 4/9 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \frac{1}{8}\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{vmatrix} 8/9 & 1/9 & -4/9 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 7/8 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{8}{9}\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{8}\right) = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{8} = 1 $$

Άρα $|A| = 1$ και επομένως από το Θεώρημα του Euler ο ορθογώνιος πίνακας A έχει ως ιδιοτιμή το $\lambda = 1$ και γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο (Π) κατά γωνία θ.

Θα προσδιορίζουμε ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$ (A - I_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -1/9 & 1/9 & -4/9 \\ -4/9 & -5/9 & -7/9 \\ 1/9 & 8/9 & -5/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + y - 4z = 0 \\ -4x - 5y - 7z = 0 \\ x + 8y - 5z = 0 \end{cases} $$

$$ \implies \begin{cases} y = z \\ -4x - 5y - 7z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = z \\ x = -3y \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} $$

Άρα το διάνυσμα στήλη $F_1' = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

Θέτουμε

$$ \mathcal{V} = \left\{ \kappa F_1' \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\} $$

Το διάνυσμα

$$ F_1 = \frac{F_1'}{\|F_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} $$

είναι τότε ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα στήλη του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, και αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$.

Θα προσδιορίσουμε ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου υπόχωρου $\mathcal{V}^\perp$.

$$ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{V}^\perp \iff \left\langle X, F_1' \right\rangle = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff -3x + y + z = 0 \iff $$

$$\iff \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\mathcal{V}^{\perp} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

και τα διανύσματα στήλες $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ αποτελούν μια βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$ η οποία δεν είναι ορθοκανονική. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία Gram-Schmidt στην παραπάνω βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$, εύκολα βλέπουμε ότι αποκτούμε την ακόλουθη ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$:

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad F_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Τότε όμως γνωρίζουμε ότι το σύνολο διανυσμάτων

$$\mathcal{C} = \left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ F_2 = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \ F_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$.

Ο άξονας περιστροφής (ϵ) είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος

$$\mathcal{V} = \{\kappa F_1\} = \left\{ \kappa \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\}$$

και το επίπεδο περιστροφής (Π) είναι ο υπόχωρος

$$\mathcal{V}^{\perp} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

του $\mathbb{R}_3$ ο οποίος έχει διάσταση 2. Η γωνία περιστροφής είναι τότε:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2} = \frac{\frac{16}{9} - 1}{2} = \frac{7}{18} \approx 0.38 \qquad \Longrightarrow \qquad \theta \approx 64.53^{\circ}$$

(2) Σύμφωνα με την εκτεθείσα θεωρία, ο πίνακας A είναι ορθογώνια όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

όπου θ είναι η γωνία στροφής. Όπως μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα, χρησιμοποιώντας ότι $\cos\theta = \frac{7}{18}$, βλέπουμε:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/18 & 5\sqrt{11}/18 \\ 0 & -5\sqrt{11}/18 & 7/18 \end{pmatrix}$$

και τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε: ${}^tP \cdot A \cdot P = B$. Ο πίνακας P είναι ο ορθογώνιος πίνακας ο οποίος αποτελείται από τις στήλες των στοιχείων της ορθοκανονικής βάσης $\mathcal{C}$ του $\mathbb{R}_3$ που κατασκευάστηκε πατραπάνω: Επομένως

$$P = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{11} & -2/\sqrt{22} & 0 \\ 1/\sqrt{11} & -3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{11} & -3/\sqrt{22} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

είναι ο ζητούμενος ορθογώνιος πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/18 & 5\sqrt{11}/18 \\ 0 & -5\sqrt{11}/18 & 7/18 \end{pmatrix} $$

όπου $\cos\theta = \frac{7}{18}$ ή ισοδύναμα $\theta \approx 64.53°$. □

Άσκηση 21. *Να προσδιορισθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών a, b, c έτσι ώστε ο πίνακας*

$$ A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ a & b & c \end{pmatrix} $$

να είναι ορθογώνιος. Για ποιές τιμές των a, b, c, ο πίνακας A γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο (Π) κατά γωνία θ; Στην περίπτωση αυτή, να βρεθεί η γωνία περιστροφής θ.

Λύση. Για να είναι ο πίνακας A ορθογώνιος, θα πρέπει οι γραμμές του

$$ \Gamma_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \Gamma_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \Gamma_3 = (a, b, c) $$

να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$, δηλαδή θα πρέπει

$$ \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle = \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} = 0 $$

$$ \langle \Gamma_1, \Gamma_3 \rangle = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0 \implies b = -a $$

$$ \langle \Gamma_2, \Gamma_3 \rangle = \frac{2a}{3} - \frac{2b}{3} + \frac{c}{3} = 0 \implies 2a - 2b + c = 0 \implies c = -4a $$

$$ \|\Gamma_1\| = \sqrt{\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 $$

$$ \|\Gamma_2\| = \sqrt{\langle \Gamma_2, \Gamma_2 \rangle} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = \sqrt{1} = 1 $$

$$ \|\Gamma_3\| = \sqrt{\langle \Gamma_3, \Gamma_3 \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + (-a)^2 + (-4a)^2} = \sqrt{18a^2} = 1 \implies a^2 = \frac{1}{18} \implies $$

$$ \implies a = \pm\frac{1}{\sqrt{18}} = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}} $$

Επομένως προκύπτουν οι ορθογώνιοι πίνακες

$$ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & -4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} $$

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Euler, για να παριστάνει γεωμετρικά ο ορθογώνιος πίνακας A στροφή επιπέδου (Π) γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο (Π) κατά γωνία θ, θα πρέπει να ισχύει ότι: $|A| = 1$. Υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$ \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & -4/3\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{vmatrix} = -1 $$

Επομένως ο ορθογώνιος πίνακας A παριστάνει γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο (Π) κατά γωνία θ αν και μόνον αν

$$ a = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad b = -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}, \quad c = -\frac{4}{3\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} $$

και τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & -4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ \sqrt{2}/6 & -\sqrt{2}/6 & -2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

Η γωνία περιστροφής θ ορίζεται από τη σχέση:

$$\cos\theta = \frac{\mathsf{Tr}(A) - 1}{2} = -\frac{10+\sqrt{2}}{12} \approx -0.95 \implies \theta \approx 161.80^\circ$$

□

Οι επόμενες ασκήσεις **23** - **27** είναι αφιερωμένες στην περιγραφή των ιδιοτιμών και των κλάσεων ομοιότητας ορθογώνιων 2×2 και 3×3 πινάκων.

Άσκηση 22. *Έστω A ένας 2×2 ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών. Τότε $|A| = \pm 1$, και οι πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι εξής:*

(1) *Αν $|A| = 1$, τότε οι πραγματικές ιδιοτιμές του A είναι:*
   (α΄) *$\lambda_1 = 1$ (διπλή). Αυτό συμβαίνει αν και μονον αν $A = I_2$.*
   (β΄) *$\lambda_1 = -1$ (διπλή). Αυτό συμβαίνει αν και μονον αν $A = -I_2$.*

(2) *Αν $|A| = -1$, τότε οι πραγματικές ιδιοτιμές του A είναι: $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Αυτό συμβαίνει αν και μονον αν*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$.

Σε κάθε άλλη περίπτωση ο πίνακας A είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \textit{όπου} \quad \theta \neq 0, \pi$$

και ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Λύση. Επειδή ο πίνακας A είναι ορθογώνιος, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{αν} \quad |A| = 1$$

ή

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{αν} \quad |A| = -1$$

(1) Έστω ότι: $|A| = 1$. Τότε $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$P_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - t \end{vmatrix} = t^2 - 2\cos\theta\, t + 1$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $P_A(t) = t^2 - 2\cos\theta\, t + 1$ είναι $\Delta = 4\cos^2\theta - 4$ και τότε $\Delta \geq 0$ αν και μόνον αν $\cos^2\theta \geq 1$ αν και μόνον αν $\cos^2\theta = 1$ αν και μόνον αν $\cos\theta \pm 1$ αν και μόνον αν $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$. Άρα ο πίνακας A έχει πραγματικές ιδιοτιμές αν και μόνον αν $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$.

– Αν $\theta = 0$, τότε προφανώς

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ (διπλή).

– Αν $\theta = \pi$, τότε προφανώς

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -1$ (διπλή).

(2) Έστω ότι: $|A| = -1$. Τότε $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$P_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - t \end{vmatrix} = t^2 - 1$$

Επομένως ο πίνακας A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 23. *Κάθε 2×2 ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών είναι ορθογώνια όμοιος με έναν και μόνον έναν από τους ακόλουθους πίνακες:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\textit{στροφή επιπέδου κατά γωνία ίση με } 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\textit{στροφή επιπέδου κατά γωνία ίση με } \pi)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\textit{συμμετρία ως προς τον άξονα των } x)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \textit{όπου} \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad (\textit{στροφή επιπέδου κατά γωνία } \theta \neq 0, \pi)$$

Λύση. Σύμφωνα με την Άσκηση 22 εμφανίζονται οι ακόλουθες περιπτώσεις και μόνον αυτές:

(1) $|A| = 1$ και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ (διπλή). Τότε $A = I_2$, και ο A είναι ορθογώνια όμοιος με τον εαυτό του, επιλέγοντας $P = I_2$.

(2) Αν $|A| = 1$ και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -1$ (διπλή). Τότε $A = -I_2$, και ο A είναι ορθογώνια όμοιος με τον εαυτό του, επιλέγοντας $P = I_2$.

(3) Αν $|A| = 1$ και ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Τότε $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, όπου $\theta \neq 0, \pi$, και ο A είναι ορθογώνια όμοιος με τον εαυτό του, επιλέγοντας $P = I_2$.

(4) Αν $|A| = -1$, τότε οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$, επομένως ο A είναι διαγωνοπιήσιμος. Έστω $\{\vec{\varepsilon}_1\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(1)$ και $\{\vec{\varepsilon}_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(-1)$. Τότε το σύνολο $\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2$. Ο πίνακας του ενδομορφισμού

$$f_A \colon \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_2, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

στην κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}_2$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι ο A, και ο πίνακας του ενδομορφισμού f_A στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{R}_2$, είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Επομένως ο A είναι όμοιος με τον $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας P είναι ο πίνακας μετάβασης από την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{C}$ και επομένως είναι ορθογώνιος. Επομένως ο πίνακας A είναι ορθογώνια όμοιος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Οι παραπάνω πίνακες δεν είναι ανά δύο όμοιοι μεταξύ τους διότι έχουν διαφορετικό ίχνος και ορίζουσα αντίστοιχα:

$$2, \quad -2, \quad 0, \quad 2\cos\theta \;\; (\theta \neq 0, \pi)$$

και $2\cos\theta = 2$ αν και μόνον αν $\cos\theta = 1$ αν και μόνον αν $\theta = 0$, $2\cos\theta = -2$ αν και μόνον αν $\cos\theta = -1$ αν και μόνον αν $\theta = \pi$, και $2\cos\theta = 0$ αν και μόνον αν $\cos\theta = 0$ αν και μόνον αν $\theta = \pi/2$ ή $\theta = 3\pi/2$ αν και μόνον αν ο πίνακας $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, με $\theta \neq 0, \pi$, είναι ο

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Αυτοί οι πίνακες όμως έχουν ορίζουσα ίση με 1 και άρα ο παραπάνω πίνακας με ίχνος ίσο με 0 δεν μπορεί να είναι όμοιος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ο οποίος έχει ίχνος ίσο με 0 αλλά έχει ορίζουσα ίση με -1. $\square$

Άσκηση 24. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, όπου $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{E} = 3$, και υποθέτουμε ότι η ορίζουσα της f είναι ίση με 1, δηλαδή η ορίζουσα του πίνακα της f σε μια τυχούσα βάση του $\mathcal{E}$ είναι ίση με 1. Γνωρίζουμε τότε, από το Θεώρημα του Euler, ότι ο αριθμός $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή του f. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \neq \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

Αν $f \neq \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, να δειχθεί ότι η f έχει όλες τις ιδιοτιμές της πραγματικές αν και μόνον αν υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ του $\mathcal{E}$, έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \qquad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2, \qquad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3$$

Λύση. Έστω $\vec{e}_1$ ένα ιδιοδιάνυσμα της f το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\vec{e}_1$ είναι μοναδιαίο, διαφορετικά διαιρούμε με το μήκος του. Θέτοντας $\mathcal{V} = \big\{\kappa\vec{e}_1 \in \mathcal{E} \mid \kappa \in \mathbb{R}\big\}$, έστω $\big\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$, και όπως γνωρίζουμε, από το Θεώρημα του Euler, ο πίνακας της f στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

για μια μοναδικξή γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$. Προφανώς $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}(1)$. Αν η ιδιοτιμή 1 της f, ή ισοδύναμα του πίνακα A, δεν είναι απλή, τότε οι αριθμός 1 θα πρέπει να είναι και ιδιοτιμή του 2×2 πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Όμως:

$$P_B(t) = |B - tI_2| = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - t \end{vmatrix} = t^2 - 2\cos\theta t + 1$$

και το παραπάνω τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνον αν η διακρίνουσά του $\Delta = 4\cos^2\theta - 4$ είναι ≥ 0, δηλαδή αν και μόνον αν:

$$\Delta \geq 0 \iff 4\cos^2\theta - 4 \geq 0 \iff \cos^2\theta \geq 1 \iff \cos^2\theta = 1 \iff$$

$$\iff |\cos\theta| = 1 \iff \cos\theta = \pm 1 \iff \theta = 0 \text{ ή } \theta = \pi \iff B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ή } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επομένως η ισομετρία f, ισοδύναμα ο πίνακας A, έχει όλες τις ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$ αν και μόνον αν:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επομένες, αν $f \neq \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, ισοδύναμα αν $A \neq I_3$, η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 1$ είναι ίση με 1 και επομένως $\mathcal{V} = \mathcal{V}(1)$, ισοδύναμα $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{V}(1) = 1$. $\square$

Άσκηση 25. *Να δειχθεί ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας $A \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ με ορίζουσα $|A| = 1$ είναι όμοιος με ακριβώς έναν από τους παρακάτω ορθογώνιους πίνακες*

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $A = I_3$ ή ισοδύναμα η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 1$ με πολλαπλότητα ίση με 3.

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή διαφορετική της $\lambda = 1$.

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, με: $\theta \neq 0, \pi$.

Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 1$.

Λύση. Από το Θεώρημα του Euler, ο πίνακας A δέχεται τον αριθμό 1 ως ιδιοτιμή, και ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$. Προφανώς $\theta = 0$ αν και μόνον αν $A = I_3$ και $\theta = \pi$ αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Αν $\theta \neq 0, \pi$, τότε οι πίνακες (1), (2), (3) ανά δύο δεν είναι όμοιοι. Πράγματι, τα ίχνη των πινάκων αυτών είναι 3, -1, και $1 + 2\cos\theta$ αντίστοιχα. Έτσι οι δύο πρώτοι πίνακες δεν είναι όμοιοι. Αν ο τρίτος πίνακας είναι όμοιος με τον πρώτο, τότε θα πρέπει να έχουμε $1 + 2\cos\theta = 3$, δηλαδή $\cos\theta = 1$ και άρα $\theta = 0$, και αυτό είναι άτοπο διότι $\theta \neq 0$. Αν ο τρίτος πίνακας είναι όμοιος με τον δεύτερο, θα πρέπει να έχουμε $1 + 2\cos\theta = -1$, δηλαδή $\cos\theta = -1$ και άρα $\theta = \pi$, και αυτό είναι άτοπο διότι $\theta \neq \pi$.

Υποθέτουμε ότι $A \neq I_3$, ή ισοδύναμα η ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι πολλαπλότητας < 3. Θεωρούμε την ισομετρία

$$f_A \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 24, η πολλαπλότητα της $\lambda = 1$ είναι ίση με 1, και ο πίνακας έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή διαφορετική της $\lambda = 1$ αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Τέλος αν ο πίνακας A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές εκτός της $\lambda = 1$, τότε ο A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi), \quad \theta \neq 0, \pi$$

□

Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία του Ευκλειδειου χώρου $\mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = 3$, και υποθέτουμε ότι $\mathrm{Det}(f) = 1$, δηλαδή ο f παριστάνει γεωμετρικά στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ ως προς άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο. Η ισομετρία A καλείται **γνήσια ισομετρία** αν $\theta \neq 0, \pi$. Ισοδύναμα ισομετρία f με $\mathrm{Det}(f) = 1$, είναι γνήσια, αν $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ και η f δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, εκτός της $\lambda = 1$.

Παρόμοια αν A είναι ένας ορθογώνιος 3×3 πίνακας με ορίζουσα $|A| = 1$, δηλαδή ο A παριστάνει γεωμετρικά στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ ως προς άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο. Ο A καλείται **γνήσια ορθογώνιος** αν $\theta \neq 0, \pi$. Ισοδύναμα ο ορθογώνιος πίνακας A με $|A| = 1$, είναι γνήσια ορθογώνιος, αν $A \neq I_3$ και ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, εκτός της $\lambda = 1$.

Άσκηση 26. *«Γνήσιες Στροφές Επιπέδου στον χώρο μετατίθενται αν και μόνον αν έχουν κοινό άξονα στροφής»*

(1) *Έστω A και B δύο γνήσια ορθογώνιοι 3×3 πίνακες.*

Να δειχθεί ότι $A \cdot B = B \cdot A$ αν και μόνον αν οι A και B έχουν κοινό ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, δηλαδή αν και μόνον αν οι A και B έχουν κοινό άξονας στροφής.

(2) *Έστω $f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο γνήσιες ισομετρίες του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = 3$.*
Να δειχθεί ότι $f \circ g = g \circ f$ αν και μόνον αν οι f και g έχουν κοινό ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, δηλαδή αν και μόνον αν οι A και B έχουν κοινό άξονας στροφής.

Λύση. (1) «$\Longleftarrow$» Έστω ότι πίνακες A και B έχουν ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 το διάνυσμα στήλη F_1 και το οποίο χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μοναδιαίο (διαφορετικά διαιρούμε με το μήκος του και το νέο διάνυσμα είναι μοναδιαίο και παραμένει προφανώς ιδιοδιάνυσμα του A και του B). Θέτουμε $\mathcal{V} = \{\kappa F_1 \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$ και έστω $\{F_2, F_3\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$.

Θεωρούμε τις ισομετρίες

$$f_A \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

$$f_A \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_B(X) = B \cdot X$$

Επειδή το διάνυσμα F_1 της ορθοκανονικής βάσης $\mathcal{C}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A και του πίνακα B, έπεται ότι ο πίνακας των ισομετριών f_A και f_B στη βάση $\mathcal{C}$ θα είναι της μορφής:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

για κάποιες μοναδικά ορισμένες γωνίες $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$. Θέτουμε:

$$C' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad D' = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Από την Άσκηση 15, οι ορθογώνιοι πίνακες C' και D' μετατίθενται διότι έχουν ορίζουσα ίση με 1. Τότε προκύπτει άμεσα ότι και οι πίνακες C και D μετατίθενται. Θέτουμε $P = (F_1 \, F_2 \, F_3)$ και τότε ο πίνακας P είναι ένας ορθογώνιος πίνακας έτσι ώστε:

$$^tP \cdot A \cdot P = C \qquad \text{και} \qquad ^tP \cdot B \cdot P = D$$

Επειδή $C \cdot D = D \cdot C$, και $^tP \cdot P = I_3 = P \cdot {}^tP$, θα έχουμε

$$C \cdot D = D \cdot C \quad \Longrightarrow \quad {}^tP \cdot A \cdot P \cdot {}^tP \cdot B \cdot P = {}^tP \cdot B \cdot P \cdot {}^tP \cdot A \cdot P \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad {}^tP \cdot A \cdot B \cdot P = {}^tP \cdot B \cdot A \cdot P \quad \Longrightarrow \quad A \cdot B = B \cdot A$$

«$\Longrightarrow$» Έστω ότι $A \cdot B = B \cdot A$. Επειδή οι πίνακες A και B είναι γνήσια ορθογώνιοι, από την Άσκηση 25, έπεται ότι ο πίνακας A είναι όμοιος με ένα πίνακα ης μορφής

$$C_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

όπου $\theta \in [0, 2\pi)$, και $\theta \neq 0, \pi$, και ο πίνακας B είναι όμοιος με ένα πίνακα ης μορφής

$$C_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

όπου $\phi \in [0, 2\pi)$, και $\phi \neq 0, \pi$. Γνωρίζουμε τότε ότι οι πίνακες A και B έχουν μόνο μια πραγματική ιδιοτιμή, το $\lambda = 1$ με πολλαπλότητα 1.

Από την Άσκηση 15, έπεται ότι ο ιδοχώρος $\mathcal{V}_A(1)$ του A ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 έχει διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_A(1) = 1$, και επομένως ο ιδιοχώρος $\mathcal{V}_A(1)$ έχει μια ορθοκανονική βάση της μορφής $\{F_1\}$, δηλαδή $A \cdot F_1 = F_1$ και $\|F_1\| = 1$. Χρησιμοποιώντας ότι $A \cdot B = B \cdot A$, θα έχουμε:

$$A \cdot F_1 = F_1 \implies B \cdot A \cdot F_1 = B \cdot F_1 \implies A \cdot B \cdot F_1 = B \cdot F_1 \implies A \cdot (B \cdot F_1) = B \cdot F_1$$

Αν $B \cdot F_1 = 0$, τότε $B^{-1} \cdot B \cdot F_1 = F_1 = 0$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα $B \cdot F_1 \neq 0$ και αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα στήλη $B \cdot F_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, δηλαδή $B \cdot F_1 \in \mathcal{V}_A(1)$. Τότε θα έχουμε $B \cdot F_1 = \kappa F_1$ και τότε χρησιμοποιώντας ότι ο πίνακας B είναι ορθογώνιος, θα έχουμε ότι ο ενδομορφισμός $f_B \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$, $f_B(X) = B \cdot X$ είναι ισομετρία. Επομένως:

$$\langle B \cdot F_1, B \cdot F_1 \rangle = \langle f_B(F_1), f_B(F_1) \rangle = \langle F_1, F_1 \rangle = 1 \quad \text{και} \quad 1 = \langle \kappa F_1, \kappa F_1 \rangle = \kappa^2 \langle F_1, F_1 \rangle = \kappa^2$$

δηλαδή $\kappa = \pm 1$. Αν $\kappa = -1$, τότε $B \cdot F_1 = -F_1$, δηλαδή το -1 είναι ιδιοτιμή του B. Αυτό είναι άτοπο διότι ο πίνακας B είναι όμοιος με τον πίνακα C_ϕ ο οποίος έχει μόνο το 1 ως ιδιοτιμή. Αν $\kappa = 1$, τότε $B \cdot F_1 = F_1$ και επομένως το μοναδιαίο διάνυσμα F_1 είναι κοινό ιδιοδιάνυσμα των A και B το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

(2) Έστω $\mathcal{B}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ και A και B οι πίνακες των ισομετριών f και g ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ αντίστοιχα. Τότε οι πίνακες A και B είναι ορθογώνιοι, και, επειδή $\mathsf{Det}(f) = 1 = \mathsf{Det}(g)$, θα έχουμε $|A| = 1 = |B|$. Γνωρίζουμε τότε ότι θα έχουμε $A \cdot B = B \cdot A$ αν και μόνον αν $f \circ g = g \circ f$, και οι ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, και ιδιοχώροι των A και B συμπίπτουν με τις ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, και ιδιοχώρους των f και g αντίστοιχα. Επομένως ο ισχυρισμός προκύπτει από το μέρος (1). □

Άσκηση 27. *Να δειχθεί ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας $A \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ με ορίζουσα $|A| = -1$ είναι όμοιος με ακριβώς έναν από τους παρακάτω ορθογώνιους πίνακες*

(1)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $A = -I_3$ ή ισοδύναμα η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = -1$ με πολλαπλότητα ίση με 3.

(2)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή διαφορετική της $\lambda = -1$.

(3)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{†}$$

για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, με: $\theta \neq 0, \pi$.

Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν η μόνη πραγματική ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = -1$.

Λύση. Δείχνουμε πρώτα ότι ο πίνακας A δέχεται ως ιδιοτιμή τον αριθμό $\lambda = -1$. Θεωρούμε τον πίνακα $A' = -A$ ο οποίος προφανώς είναι ορθογώνιος και έχει ορίζουσα $|A'| = |-A| = (-1)^3|A| = -(-1) = 1$. Από το Θεώρημα του Euler, έπεται ότι ο A' δέχεται ως ιδιοτιμή τον αριθμό $\lambda = 1$, δηλαδή υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα στήλη X έτσι ώστε

$$A' \cdot X = X \implies (-A) \cdot X = X \implies -A \cdot X = X \implies A \cdot X = -X$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $\mu = -1$ είναι ιδιοτιμή του A. Έστω F_1 ένα ιδιοδιάνυσμα στήλη του πίνακα A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\mu = -1$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το F_1 είναι μοναδιαίο. Θέτουμε $\mathcal{V} = \{\kappa F_1 \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$ και έστω $\{F_2, F_3\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^\perp$. Ισχυριζόμαστε ότι, $\forall X \in \mathcal{V}^\perp$: $A \cdot X \in \mathcal{V}^\perp$. Πράγματι, θεωρούμε την ισομετρία

$$f_A \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

της οποίας ο πίνακας στην συνήθη βάση του $\mathbb{R}_3$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι ο A. Τότε $f_A(F_1) = -F_1$ και θα έχουμε:

$$\langle F_1, A \cdot X\rangle = -\langle -F_1, A \cdot X\rangle = -\langle f_A(F_1), f_A(X)\rangle = -\langle F_1, X\rangle = 0$$

Επειδή το διάνυσμα F_1 είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, έπεται ότι, $\forall X \in \mathcal{V}^\perp$: $A \cdot X = f_A(X) \in \mathcal{V}^\perp$. Επομένως η ισομετρία f_A του $\mathbb{R}_3$ περιορίζεται σε έναν ενδομορφισμό

$$f'_A \colon \mathcal{V}^\perp \longrightarrow \mathcal{V}^\perp, \quad f'_A(X) = f_A(X) = A \cdot X$$

ο οποίος είναι προφανώς μια ισομετρία του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{V}^\perp$. Έστω $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ο πίνακας της ισομετρίας f'_A στην ορθοκανονική βάση $\{F_2, F_3\}$ του $\mathcal{V}^\perp$. Προφανώς τότε ο πίνακας B είναι ορθογώνιος και άρα υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ή} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

ανάλογα αν $|B| = 1$ ή $|B| = -1$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$ το οποίο είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$ και τότε ο πίνακας της ισομετρίας f_A στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{C}$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ή} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Τότε όμως ο πίνακας A είναι όμοιος με έναν από τους παραπάνω πίνακες, και επειδή $|A| = -1$, έπεται ότι ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Αν $\theta = 0$, τότε

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο πίνακας A έχει μια ιδιοτιμή διαφορετική από το -1.

Αν $\theta = \pi$, τότε

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $A = -I_3$ ή ισοδύναμα αν ο πίνακας A έχει ως μόνη ιδιοτιμή το -1 με πολλαπλότητα ίση με 3.

Σε κάθε άλλη περίπτωση ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα C για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, με: $\theta \neq 0, \pi$.

Αν $\theta \neq 0, \pi$, τότε οι πίνακες (1), (2), (3) ανά δύο δεν είναι όμοιοι. Πράγματι, τα ίχνη των πινάκων αυτών είναι -3, 1, και $-1 + 2\cos\theta$ αντίστοιχα. Έτσι οι δύο πρώτοι πίνακες δεν είναι όμοιοι. Αν ο τρίτος πίνακας είναι όμοιος με τον πρώτο, τότε θα πρέπει να έχουμε $-1 + 2\cos\theta = -3$, δηλαδή $\cos\theta = -1$ και άρα $\theta = \pi$, και αυτό είναι άτοπο διότι $\theta \neq \pi$. Αν ο τρίτος πίνακας είναι όμοιος με τον δεύτερο, θα πρέπει να έχουμε $-1 + 2\cos\theta = 1$, δηλαδή $\cos\theta = 1$ και άρα $\theta = 0$, και αυτό είναι άτοπο διότι $\theta \neq 0$. □

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των Ασκήσεων 24, 25, και 27, προκύπτει άμεσα το ακόλουθο Θεώρημα το οποίο περιγράφει τις ιδιοτιμές ορθογωνίων 3×3 πινάκων καθώς και τις κλάσεις ομοιότητας τους.

Θεώρημα. *Έστω A ένας 3×3 ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών, επομένως $|A| = \pm 1$.*

(1) *Αν $|A| = 1$, τότε οι πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι εξής:*

(αʹ) $\lambda_1 = 1$ *(τριπλή).*
Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(βʹ) $\lambda_1 = 1$ *(απλή)*
Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, όπου $\theta \neq 0$.

(γʹ) $\lambda_1 = 1$ *(απλή) και* $\lambda_2 = -1$ *(διπλή).*
Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) *Αν $|A| = -1$, τότε οι πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι εξής:*

(αʹ) $\lambda_1 = -1$ *(τριπλή)*
Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(βʹ) $\lambda_1 = -1$ *(απλή)*
Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, όπου $\theta \neq 0$.

(γʹ) $\lambda_1 = -1$ *(απλή) και* $\lambda_2 = 1$ *(διπλή).*
Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) *Κάθε 3×3 ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών A είναι όμοιος με έναν από τους παρακάτω ορθογώνιους πίνακες:*

(αʹ) *(Ανακλάσεις)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(βʹ) *(Στροφή επιπέδου)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

όπου $\theta \neq 0, \pi$.

(γʹ) *(Σύνθεση στροφής επιπέδου με ανάκλαση)*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $\theta \neq 0, \pi$.