ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Τμημα $\mathbf{B'}$ (Μ-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 7

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 28 Απριλίου 2023

Άσκηση 1. *Αν $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ πεπερασμένης διάστασης, τότε:*

$$\text{ο ενδομορφισμός } f \text{ είναι ισομετρία} \quad \Longleftrightarrow \quad f^* \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

δηλαδή ο f είναι ισομετρία αν και μόνον αν ο f είναι ισομορφισμός και $f^* = f^{-1}$.

Λύση. «$\Longrightarrow$» Έστω ότι ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία. Τότε γνωρίζουμε ότι ο f είναι ισομορφισμός και, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle \vec{x}, \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x}, (f^* \circ f)(\vec{y}) \rangle \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{y}) = (f^* \circ f)(\vec{y}) \quad \Longrightarrow \quad f^* \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

Γνωρίζουμε τότε ότι $f^* = f^{-1}$.

«$\Longleftarrow$» Έστω ότι για τον ενδομορφισμό f ισχύει ότι $f^* \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. Η τελευταία σχέση δείχνει άμεσα ότι ο f είναι μονομορφισμός και άρα ο f είναι ισομορφισμός διότι ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Προφανώς τότε $f^* = f^{-1}$, και θα έχουμε $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x}, (f^* \circ f)(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, (f^{-1} \circ f)(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \mathsf{Id}(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Επομένως ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία. □

Άσκηση 2. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0, \quad \forall \, \vec{x} \in \mathcal{E} \quad \Longleftrightarrow \quad f^* = -f$$

Αν $f^* = -f$, ποιές είναι οι πραγματικές ιδιοτιμές της f;

Λύση. Έστω $f^* = -f$ και $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε:

$$\big\langle f(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle = \big\langle \vec{x}, f^*(\vec{x}) \big\rangle \quad = \quad \big\langle \vec{x}, -f(\vec{x}) \big\rangle = -\big\langle \vec{x}, f(\vec{x}) \big\rangle = -\big\langle f(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad 2 \cdot \big\langle f(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \big\langle f(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle = 0$$

Αντίστροφα έστω $\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0, \ \forall \, \vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\big\langle f(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y}\big\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \big\langle f(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle + \big\langle f(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{y}\big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle f(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle f^*(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle f^*(\vec{y}) + f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle = 0, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \\ &\Longrightarrow \quad f^*(\vec{y}) = -f(\vec{y}), \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \\ &\Longrightarrow \quad f^* = -f\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $f^* = -f$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ιδιοτιμή του f. Συνεπώς υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Τότε:

$$0 = \big\langle f(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle = \big\langle \lambda\vec{x}, \vec{x}\big\rangle \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda \cdot \big\langle \vec{x}, \vec{x}\big\rangle = 0 \\ \\ \vec{x} \neq \vec{0} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0$$

Επομένως αν $f^* = -f$ τότε η μόνη πραγματική ιδιοτιμή του f είναι: $\lambda = 0$. □

Ένας ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ καλείται **αντισυμμετρικός** αν και μόνον αν ισχύει ότι: $f^* = -f$.

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι ένας ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του Ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ είναι αντισυμμετρικός αν και μόνον αν ο πίνακας του f σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ είναι αντισυμμετρικός.*

Λύση. Έστω $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$. Έστω $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = A = (a_{ij})$ ο πίνακας του f στην $\mathcal{B}$. Γνωρίζουμε τότε ότι

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tM^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = {}^tA$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό αποτέλεσμα από τη Γραμμική Άλγεβρα Ι ότι η απεικόνιση

$$\Phi\colon \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \Phi(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

είναι ισομορφισμός, όπου $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ συμβολίζει τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο των ενδομορφισμών του $\mathcal{E}$.

«$\Longrightarrow$» Έστω ότι ο ενδομορφισμός f είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή $f^* = -f$. Τότε θα έχουμε:

$${}^tM^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(-) = -M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \quad \Longrightarrow \quad {}^tA = -A$$

δηλαδή ο πίνακας $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ είναι αντισυμμετρικός.

«$\Longleftarrow$» Έστω ότι ο πίνακας $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ του ενδομορφισμού f στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή ${}^tA = -A$. Τότε θα έχουμε:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tM^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = {}^tA = -A = -M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(-f) \quad \Longrightarrow \quad f^* = -f$$

δηλαδή ο ενδομορφισμός f είναι αντισυμμετρικός. □

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ο μοναδικός ενδομορφισμός του οποίου ο πίνακας στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Να προσδιορισθεί ο προσαρτημένος ενδομορφισμός $f^*\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ του f.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας της f^* σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι ο ανάστροφος του πίνακα της f στην $\mathcal{B}$, δηλαδή

$$\mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

Επειδή η κανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\big\}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι ορθοκανονική έπεται ότι

$$\mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε γνωρίζουμε ότι $f(x,y,z) = (x',y',z')$, όπου:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+4z \\ x+2z \\ 4x+3y+z \end{pmatrix} f^*(x,y,z) = (2x+3y+4z, x+2z, 4x+3y+z)$$

Επομένως

$$f^*(x,y,z) = \big(2x+3y+4z,\ x+2z,\ 4x+3y+z\big)$$

<u>Δεύτερος Τρόπος</u>: Από το πίνακα A έχουμε ότι ο ενδομορφισμός f ορίζεται ως εξής, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = \big(2x+y+4z,\ 3x+3z,\ 4x+2y+z\big)$$

Έστω $(x,y,z), (x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\big\langle (x_1,y_1,z_1), f^*(x,y,z) \big\rangle &= \big\langle f(x_1,y_1,z_1), (x,y,z) \big\rangle \\
&= \big\langle (2x_1+y_1+4z_1, 3x_1+3z_1, 4x_1+2y_1+z_1), (x,y,z) \big\rangle \\
&= 2x_1x + y_1x + 4z_1x + 3x_1y + 3z_1y + 4x_1z + 2y_1z + z_1z \\
&= x_1(2x+3y+4z) + y_1(x+2z) + z_1(4x+3y+z) \\
&= \big\langle (x_1,y_1,z_1), (2x+3y+4z, x+2z, 4x+3y+z) \big\rangle
\end{aligned}$$

για κάθε $(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$. Άρα ο προσαρτημένος ενδομορφισμός $f^*\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ του f ορίζεται ως εξής, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f^*(x,y,z) = \big(2x+3y+4z,\ x+2z,\ 4x+3y+z\big) \qquad \square$$

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ένας ενδομορφισμός για τον οποίο ισχύει ότι:*

$$f(1,0,1) = (1,4,1), \qquad f(1,0,-1) = (-3,0,3), \qquad f(0,1,0) = (2,-1,2)$$

Να προσδιορισθεί ο προσαρτημένος ενδομορφισμός $f^*\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ του f.

Λύση. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα, το σύνολο $\mathcal{C} = \big\{(1,0,1),\,(1,0,-1),\,(0,1,0)\big\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία όμως δεν είναι ορθοκανονική. Άρα επειδή γνωρίζουμε τη τιμή της f στα διανύσματα της βάσης $\mathcal{C}$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα του f στη κανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{(1,0,0),\,(0,1,0),\,(0,0,1)\big\}$ του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε:

$$\begin{cases} (1,0,0) = \frac{1}{2}\cdot(1,0,1) + \frac{1}{2}\cdot(1,0,-1) + 0\cdot(0,1,0) \\ \\ (0,1,0) = 0\cdot(1,0,1) + 0\cdot(1,0,-1) + 1\cdot(0,1,0) \\ \\ (0,0,1) = \frac{1}{2}\cdot(1,0,1) + (-\frac{1}{2})\cdot(1,0,-1) + 0\cdot(0,1,0) \end{cases}$$

και άρα

$$\begin{cases} f(1,0,0) = \frac{1}{2}\cdot f(1,0,1) + \frac{1}{2}\cdot f(1,0,-1) = (\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}) + (-\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}) = (-1,2,2) \\ \\ f(0,1,0) = 1\cdot f(0,1,0) = (2,-1,2) \\ \\ f(0,0,1) = \frac{1}{2}\cdot f(1,0,1) + (-\frac{1}{2})\cdot f(1,0,-1)) = (\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}) + (\frac{3}{2},0,-\frac{3}{2}) = (2,2,-1) \end{cases}$$

Επομένως ο πίνακας του f στην κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$A = \mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

<u>Θεωρία</u>: Ένας ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μεταξύ Ευκλείδειων χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι αυτοπροσαρτημένος αν και μόνο αν ο πίνακας του f σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ είναι συμμετρικός, δηλαδή:

$$f = f^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = {}^t\mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

Επομένως επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός έπεται ότι $f = f^*$ και άρα ο προσαρτημένος ενδομορφισμός f^* του f συμπόιπτει με τον f: $f^* = f$.

<u>Δεύτερος Τρόπος</u>: Παρατηρούμε ότι η βάση $\mathcal{C}$ είναι ορθογώνια αλλά όχι ορθοκανονική. Για να κάνουμε την $\mathcal{C}$ ορθοκανονική διαιρούμε κάθε διάνυσμα της βάσης $\mathcal{C}$ με το μήκος του και έτσι αποκτούμε την ορθοκανονική βάση

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \quad (0,1,0)\right\}$$

Υπολογίζουμε τον ενδομορφισμό f στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}f(1,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,4,1\big) \\ \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}f(1,0,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(3,0,-3\big) \\ \\ f\big(0,0,1\big) = \big(2,-1,2\big) \end{cases}$$

και κατόπιν εκφράζουμε τα διανύσματα αυτά ως γραμμικό συνδυασμό της ορθοκανονικής βάσης $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,4,1\big) = 1\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,0,1\big) + 0\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,0,-1\big) + 2\sqrt{2}\big(0,1,0\big) \\ \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(3,0,-3\big) = 0\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,0,1\big) - 3\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,0,-1\big) + 0\sqrt{2}\big(0,1,0\big) \\ \\ f\big(0,0,1\big) = \big(2,-1,2\big) = 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,0,1\big) + 0\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,0,-1\big) - 1\sqrt{2}\big(0,1,0\big) \end{cases}$$

Επομένως ο πίνακας της f στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{D}$ είναι:

$$\mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -3 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι συμμετρικός. Επομένως θα έχουμε $f^* = f$. $\square$

Άσκηση 6. *Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$$

θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \quad f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε αν ο f είναι: (α) ισομετρία, και (β) αυτοπροσαρτημένος.

Λύση. Έχουμε:

$$\|f\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)\| = \|\left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right)\| = \sqrt{\mathsf{Tr}[\left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)]} = \sqrt{\mathsf{Tr}[\left(\begin{smallmatrix} x^2+z^2 & xy+zw \\ yx+wz & y^2+w^2 \end{smallmatrix}\right)]} = \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$$

και

$$\|\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)\| = \sqrt{\mathsf{Tr}[\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right)]} = \sqrt{\mathsf{Tr}[\left(\begin{smallmatrix} x^2+y^2 & xz+yw \\ zx+wy & z^2+w^2 \end{smallmatrix}\right)]} = \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$$

Επομένως ο f είναι ισομετρία.

Η κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \left\{E_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ E_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ E_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$$

του Ευκλείδειου χώρου $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ είναι προφανώς ορθοκανονική. Τότε ο πίνακας της f στη βάση $\mathcal{B}$ είναι

$$\begin{cases} f\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \\ f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \\ f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot E_1 + 1 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \\ f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 1 \cdot E_4 \end{cases} \Longrightarrow A = \mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι

$$\begin{cases} A: \text{ ορθογώνιος } \Longrightarrow f: \text{ ισομετρία} \\ A: \text{ συμμετρικός } \Longrightarrow f: \text{ αυτοπροσαρτημένος} \end{cases}$$

Άρα ο f είναι ισομετρία και $f^* = f$. $\square$

Η προηγούμενη Άσκηση είναι ειδική περίπτωση της ακόλουθης Άσκησης.

Άσκηση 7. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$$

θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = {}^tA$$

Τότε ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος και ισομετρία.

Λύση. Για κάθε $n \times n$ πίνακα A θα έχουμε:

$$\big\langle f(A), f(A) \big\rangle = \big\langle {}^tA, {}^tA \big\rangle = \mathsf{Tr}({}^tA \cdot {}^t({}^tA)) = \mathsf{Tr}({}^tA \cdot A)$$

Γνωρίζουμε ότι για την απεικόνιση ίχνους

$$\mathsf{Tr}\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \longmapsto \mathsf{Tr}(A), \qquad \text{ισχύει ότι:} \quad \mathsf{Tr}(A \cdot B) = \mathsf{Tr}(B \cdot A)$$

Επομένως η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\big\langle f(A), f(A) \big\rangle = \mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tA) = \big\langle A, A \big\rangle$$

και άρα ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία. Ιδιαίτερα θα έχουμε ότι (βλέπε την Άσκηση 1):

$$f^{-1} = f^* \tag{$*$}$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή, $\forall A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$: $f^2(A) = f(f(A)) = f({}^tA) = {}^t({}^tA) = A$, θα έχουμε:

$$f^2 = \mathsf{Id}_{\mathsf{M}_n(\mathbb{R})}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$f^{-1} = f \tag{$**$}$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ έπεται ότι:

$$f^* = f$$

και άρα ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος. □

Άσκηση 8. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και*

$$f\ ,\ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, να δειχθούν τα εξής:

(1)

$$\mathsf{0}^* = \mathsf{0} \quad \textit{και} \quad \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}^* = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

(2)

$$(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g*$$

(3)

$$(f^*)^* = f$$

Λύση. (1) Θα έχουμε:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}: \quad \langle \vec{x}, \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}^*(\vec{y}) \rangle = \langle \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad \Longrightarrow \quad \forall \vec{y} \in \mathcal{E}: \quad \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}^*(\vec{y}) = \vec{y} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}^* = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}: \quad \langle \vec{x}, \mathsf{0}_{\mathcal{E}}^*(\vec{y}) \rangle = \langle \mathsf{0}_{\mathcal{E}}(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall \vec{y} \in \mathcal{E}: \quad \mathsf{0}_{\mathcal{E}}^*(\vec{y}) \in \mathcal{E}^{\perp} = \big\{\vec{0}\big\} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{0}_{\mathcal{E}}^* = \mathsf{0}_{\mathcal{E}}$$

(2) Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
\big\langle \vec{x}, (\lambda f + \mu g)^*(\vec{y}) \big\rangle &= \big\langle (\lambda f + \mu g)(\vec{x}), \vec{y} \big\rangle \\
&= \big\langle \lambda f(\vec{x}) + \mu g(\vec{x}), \vec{y} \big\rangle \\
&= \big\langle \lambda f(\vec{x}), \vec{y} \big\rangle + \big\langle \mu g(\vec{x}), \vec{y} \big\rangle \\
&= \lambda \big\langle f(\vec{x}), \vec{y} \big\rangle + \mu \big\langle g(\vec{x}), \vec{y} \big\rangle \\
&= \lambda \big\langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \big\rangle + \mu \big\langle \vec{x}, g^*(\vec{y}) \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{x}, \lambda f^*(\vec{y}) \big\rangle + \big\langle \vec{x}, \mu g^*(\vec{y}) \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{x}, \lambda f^*(\vec{y}) + \mu g^*(\vec{y}) \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{x}, (\lambda f^* + \mu g^*)(\vec{y}) \big\rangle
\end{aligned}
$$

Εφόσον η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ τότε προκύπτει ότι

$$(\lambda f + \mu g)^*(\vec{y}) = (\lambda f^* + \mu g^*)(\vec{y}), \quad \forall \vec{y} \in \mathcal{E} \quad \Longrightarrow \quad (\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$$

(3) Για το δεύτερο ερώτημα έχουμε:

$$\big\langle \vec{x}, (f^*)^*(\vec{y}) \big\rangle = \big\langle f^*(\vec{x}), \vec{y} \big\rangle = \big\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \big\rangle, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

και άρα $(f^*)^*(\vec{y}) = f(\vec{y})$ για κάθε $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Επομένως: $(f^*)^* = f$. □

Άσκηση 9. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και*

$$f \, , \, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Να δειχθούν τα εξής:

(1)

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

(2) *Ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός αν και μόνον ο ενδομορφισμός f^* είναι ισομορφισμός, και τότε:*

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Λύση. (1) Για τυχόντα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\langle \vec{x}, (f \circ g)^*(\vec{y}) \rangle = \langle (f \circ g)(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle f(g(\vec{x})), \vec{y} \rangle = \langle g(\vec{x}), f^*(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, g^*(f^*(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x}, (g^* \circ f^*)(\vec{y}) \rangle$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, έπεται ότι: $(f \circ g)^*(\vec{y}) = g^*(f^*(\vec{y})) = (g^* \circ f^*)(\vec{y})$, $\forall \vec{y} \in \mathcal{E}$. Επομένως:

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

(2) Αν ο f είναι ισομορφισμός, τότε επειδή $f \circ f^{-1} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f^{-1} \circ f$, από το μέρος (1) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}^* = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, θα έχουμε:

$$(f \circ f^{-1})^* = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}^* = (f^{-1} \circ f)^* \quad \Longrightarrow \quad (f^{-1})^* \circ f^* = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f^* \circ (f^{-1})^*$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η f^* είναι ισομορφισμός και

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Αντίστροφα αν η f^* είναι ισομορφισμός, τότε υπάρχει ενδομορφισμός $g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f^* \circ g = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = g \circ f^*$$

δηλαδή $g = f^{-1}$. Τότε όπως παραπάνω θα έχουμε:

$$(f^* \circ g)^* = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}^* = (g \circ f^*)^* \quad \Longrightarrow \quad g^* \circ (f^*)^* = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = (f^*)^* \circ g^*$$

Από την Άσκηση 8, έχουμε $(f^*)^* = f$ και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$g^* \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f \circ g^*$$

Τότε προφανώς η f είναι ισομορφισμός, με αντίστροφη την $g^* = (f^{-1})^*$. □

Άσκηση 10. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι δύο από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες συνεπάγουν την τρίτη συνθήκη:*

(1) *Ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία.*
(2) *Ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος.*
(3) $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

Ιδιαίτερα, για έναν πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, δύο από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες συνεπάγουν την τρίτη συνθήκη:

(1) *Ο πίνακας A είναι ορθογώνιος.*
(2) *Ο πίνακας A είναι συμμετρικός.*
(3) $A^2 = I_n$.

Λύση.

- (1) + (2) $\Longrightarrow$ (3) Έστω ότι ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος, δηλαδή $f^* = f$, και ισομετρία. Από την Άσκηση 1 τότε θα έχουμε $f^* \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ και επομένως $f \circ f = f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.
- (2) + (3) $\Longrightarrow$ (1) Έστω ότι ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος, δηλαδή $f^* = f$, και ισχύει ότι $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. Τότε $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f \circ f = f^* \circ f$ και τότε από την Άσκηση 1 έπεται ότι ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία.
- (1) + (3) $\Longrightarrow$ (2) Έστω ότι ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία, δηλαδή σύμφωνα με την Άσκηση 1 έχουμε $f^* \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, και ισχύει ότι $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, δηλαδή $f \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$. Από την τελευταία σχέση τότε έπεται ότι ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός και $f^{-1} = f$, και από τη σχέση $f^* \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ έπεται ότι ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός και $f^{-1} = f^*$. Άρα $f^* = f^{-1} = f$, δηλαδή ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος.

Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

του οποίου ο πίνακας στην κανονική βάση του $\mathbb{R}_n$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι ο A. Εργαζόμενοι με τον ενδομορφισμό f_A, ο ισχυρισμός του δεύτερου μέρους της Άσκησης προκύπτει από το πρώτο μέρος, χρησιμοποιώντας ότι: (α) ένας ενδομορφισμός f ενός Ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{E}$ είναι αυτοπροσαρτημένος αν και μόνον αν ο πίνακας του A σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι συμμετρικός, (β) ο ενδομορφισμός είναι ισομετρία αν και μόνον αν ο πίνακας του A σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθογώνιος, και (γ) $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ αν και μόνον αν $A^2 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^2 = I_n$. □

Άσκηση 11. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος*

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \big\{ f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f : \text{ ενδομορφισμός του } \mathcal{E} \big\}$$

των ενδομορφισμών του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι ορίζοντας[1]

$$\langle\!\langle \, , \, \rangle\!\rangle : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \times \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle = \mathsf{Tr}(f \circ g^*)$$

αποκτούμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ και άρα το ζεύγος $(\mathcal{L}(\mathcal{E}), \langle\!\langle , \rangle\!\rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Επιπλέον να δειχθεί ότι οι Ευκλείδειοι χώροι $(\mathcal{L}(\mathcal{E}), \langle\!\langle , \rangle\!\rangle)$ και $(\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$, όπου $\langle A, B \rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$, είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

Λύση. Έστω $f, g, h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ και $k \in \mathbb{R}$.

[1] Το ίχνος $\mathsf{Tr}(h)$ ενός ενδομορφισμού $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ορίζεται να είναι το ίχνος $\mathsf{Tr}(A)$ του πίνακα A του h σε μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$. Επειδή, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα Ι, όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος, αν $\mathcal{C}$ είναι μια άλλη βάση του $\mathcal{E}$ και αν B είναι ο πίνακας του h στην $\mathcal{C}$, τότε $\mathsf{Tr}(A) = \mathsf{Tr}(B)$.

(1) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\mathsf{Tr}\colon \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \mathsf{Tr}(f) = \mathsf{Tr}(A)$$

όπου $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ είναι ο πίνακας του f σε μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$. Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση Tr είναι γραμμική. Έστω $\mathcal{B}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ και έστω:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f), \qquad B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g), \qquad C = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(h)$$

Τότε γνωρίζουμε ότι:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f+g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)+M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = A+B, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(kf) = kM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = kA, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f\circ g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = A\cdot B$$

και τότε:

$$\mathsf{Tr}(f\circ g) = \mathsf{Tr}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f\circ g)) = \mathsf{Tr}(A\cdot B) = \mathsf{Tr}(B\cdot A) = \mathsf{Tr}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g\circ f)) = \mathsf{Tr}(g\circ f)$$

Τέλος επειδή $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, θα έχουμε:

$$\mathsf{Tr}(f^*) = \mathsf{Tr}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = \mathsf{Tr}({}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = \mathsf{Tr}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = \mathsf{Tr}(f)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι για κάθε πίνακα A: $\mathsf{Tr}({}^tA) = \mathsf{Tr}(A)$.

Με βάση τα παραπάνω, θα έχουμε:

$$\langle\!\langle\, f+g, h \,\rangle\!\rangle = \mathsf{Tr}(f+g)\circ h^*) = \mathsf{Tr}(f\circ h^* + g\circ h^*) = \mathsf{Tr}(f\circ h^*) + \mathsf{Tr}(g\circ h^*) = \langle\!\langle\, f,h \,\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\, g,h \,\rangle\!\rangle$$

$$\langle\!\langle\, kf, g \,\rangle\!\rangle = \mathsf{Tr}((kf)\circ g^*) = \mathsf{Tr}(k(f\circ g^*) = k\mathsf{Tr}(f\circ g^*) = k\,\langle\!\langle\, f,g \,\rangle\!\rangle$$

$$\langle\!\langle\, f, g \,\rangle\!\rangle = \mathsf{Tr}(f\circ g^*) = \mathsf{Tr}((f\circ g^*)^*) = \mathsf{Tr}((g^*)^*\circ f^*) = \mathsf{Tr}(g\circ f^*) = \langle\!\langle\, g,f \,\rangle\!\rangle$$

$$\langle\!\langle\, f, f \,\rangle\!\rangle = \mathsf{Tr}(f\circ f^*) = \mathsf{Tr}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f\circ f^*)) = \mathsf{Tr}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*)) = \mathsf{Tr}(A\cdot {}^tA)$$

Όμως αν $A = (a_{ij})$, τότε βλέπουμε εύκολα ότι:

$$\mathsf{Tr}(A\cdot {}^tA) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0 \quad \text{και}$$

και άρα:

$$\mathsf{Tr}(A\cdot {}^tA) = 0 \iff \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \iff a_{ij} = 0,\ 1\leq i,j\leq n \iff A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = O \iff f = 0$$

Επομένως:

$$\langle\!\langle\, f,f \,\rangle\!\rangle \geq 0, \qquad \text{και} \qquad \langle\!\langle\, f,f \,\rangle\!\rangle = 0 \iff f = 0$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι η απεικόνιση $\langle\!\langle,\rangle\!\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$\Phi:\ \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

είναι ένας ισομορφισμός, όπου $n = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{E}$, και $\mathcal{B}$ είναι τυχούσα βάση του $\mathcal{E}$. Υποθέτοντας ότι η βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθοκανονική, θα έχουμε:

$$\langle\Phi(f),\Phi(f)\rangle = \langle M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\rangle = \mathsf{Tr}\big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot {}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\big) = \mathsf{Tr}\big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*)\big) =$$

$$= \mathsf{Tr}\big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f\circ f^*)\big) = \langle\!\langle\, f,f \,\rangle\!\rangle$$

Επομένως ο ισομορφισμός Φ είναι ισομετρία. □

Άσκηση 12. *Έστω $(\mathcal{E},\langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Έστω*

$$\mathcal{U} = \big\{f\colon \mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E} \mid f^* = f\big\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{V} = \big\{f\colon \mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E} \mid f^* = -f\big\}$$

τα υποσύνολα του $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ τα οποία αποτελούνται από τους αυτοπροσαρτημένους και αντισυμμετρικούς ενδομορφισμούς αντίστοιχα.

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.*
(2) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{U} \perp \mathcal{V}$$

(3) *Να δειχθεί ότι $\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{V}$ και $\mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{U}$.*

Λύση. (1) Έστω $f_1, f_2 \in \mathcal{U}$, και $g_1, g_2 \in \mathcal{V}$, και $\kappa \in \mathbb{R}$. Τότε θα έχουμε:

$$f_1^* = f_1, \quad f_2^* = f_2 \quad \text{και} \quad g_1^* = -g_1, \quad g_2^* = -g_2$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8 θα έχουμε:

$$0_{\mathcal{E}}^* = 0_{\mathcal{E}} = -0_{\mathcal{E}} \implies 0_{\mathcal{E}} \in \mathcal{U} \ \text{ και } \ 0_{\mathcal{E}} \in \mathcal{V}$$

$$(f_1 - f_2)^* = f_1^* - f_2^* = f_1 - f_2 \implies f_1 - f_2 \in \mathcal{U}$$

$$(g_1 - g_2)^* = g_1^* - g_2^* = -g_1 - (-g_2) = -g_1 + g_2 = -(g_1 - g_2) \implies g_1 - g_2 \in \mathcal{V}$$

$$(kf_1)^* = kf_1^* = \kappa f_1 \implies kf_1 \in \mathcal{U} \quad \text{και} \quad (kg_1)^* = kg_1^* = \kappa(-g_1) = -(kg_1) \implies kg_1 \in \mathcal{V}$$

Επομένως τα υποσύνολα $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

(2) Έστω $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. Θεωρούμε τους ενδομορφισμούς

$$g = \frac{f + f^*}{2} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad g(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}) + f^*(\vec{x})}{2}$$

$$h = \frac{f - f^*}{2} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad h(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}) - f^*(\vec{x})}{2}$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8 θα έχουμε:

$$g^* = \left(\frac{f + f^*}{2}\right)^* = \frac{f^* + (f^*)^*}{2} = \frac{f^* + f}{2} = \frac{f + f^*}{2} = g \implies g \in \mathcal{U}$$

$$h^* = \left(\frac{f - f^*}{2}\right)^* = \frac{f^* - (f^*)^*}{2} = \frac{f^* - f}{2} = -\frac{f - f^*}{2} = -h \implies h \in \mathcal{V}$$

Επειδή

$$g + h = \frac{f + f^*}{2} + \frac{f - f^*}{2} = f$$

έπεται ότι: $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Έστω $f \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Τότε $f^* = f$ και $f^* = -f$ και επομένως $f = -f$, δηλαδή $2f = 0$. Τότε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $2f(\vec{x}) = \vec{0}$ και άρα $f(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $f = 0$. Επομένως $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{0\}$. Συνοψίζοντας δείξαμε ότι:

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

(3) Έστω $f \in \mathcal{U}$ και $g \in \mathcal{V}$. Τότε θα έχουμε:

$$f^* = f \quad \text{και} \quad g^* = -g$$

Θα έχουμε:

$$\langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle = \mathsf{Tr}(f \circ g^*) = \mathsf{Tr}(f \circ (-g)) = \mathsf{Tr}\big(-(f \circ g)\big) = -\mathsf{Tr}(f \circ g) = -\mathsf{Tr}(g \circ f) = -\mathsf{Tr}(g \circ f^*) =$$

$$= -\langle\!\langle g, f \rangle\!\rangle = -\langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle \implies 2\langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle = 0 \implies \langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle = 0$$

Επομένως:

$$\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$$

και το ευθύ άθροισμα $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ είναι ορθογώνιο ευθύ άθροισμα.

(4) Γνωρίζουμε ότι αν ένας Ευκλείδειος χώρος είναι το ορθογώνιο ευθύ άθροισμα δύο υπόχωρών του, τότε ο ένας υπόχωρος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του άλλου. Επομένως, επειδή $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, θα έχουμε $\mathcal{U} = \mathcal{V}^{\perp}$ και $\mathcal{V} = \mathcal{U}^{\perp}$. $\square$

Άσκηση 13. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος*

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \big\{ f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f : \text{ ενδομορφισμός του } \mathcal{E} \big\}$$

των ενδομορφισμών του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός

$$\Phi \colon \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}), \quad \Phi(f) = f^*$$

είναι αυτοπροσαρτημένος και ισομετρία, όπου ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο της Άσκησης 11.

Λύση. Έστω $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ και $k \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8, θα έχουμε:

$$\Phi(f + g) = (f + g)^* = f^* + g^* = \Phi(f) + \Phi(g)$$

$$\Phi(kf) = (kf)^* = kf^* = k\Phi(f)$$

και επομένως η απεικόνιση Φ είναι ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Για κάθε $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, θα έχουμε

$$\langle\!\langle\, \Phi(f), \Phi(g) \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, f^*, g^* \,\rangle\!\rangle = \mathsf{Tr}(f^* \circ (g^*)^*) = \mathsf{Tr}(f^* \circ g) = \mathsf{Tr}(g \circ f^*) = \langle\!\langle\, g, f \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, f, g \,\rangle\!\rangle$$

και επομένως ο ενδομορφισμός Φ είναι ισομετρία.

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8, θα έχουμε $\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$:

$$\Phi^2(f) = \Phi(\Phi(f)) = \Phi(f^*) = (f^*)^* = f \quad \Longrightarrow \quad \Phi^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$$

Επομένως η ισομετρία Φ ικανοποιεί τη σχέση $\Phi^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ και τότε από την Άσκηση 10 προκύπτει ότι ο ενδομορφισμός Φ είναι αυτοπροσαρτημένος. □

Άσκηση 14. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο*

$$\mathcal{E}^* = \big\{ \phi \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \phi : \text{ γραμμική} \big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\Phi \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^*, \quad \Phi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, - \rangle, \quad \text{όπου} \quad \langle \vec{x}, - \rangle(\vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

είναι ισομορφισμός.

(2) *Να ορισθεί επί του $\mathcal{E}^*$ κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο έτσι ώστε ο ισομορφισμός Φ να είναι ισομετρία.*

Λύση. (1) Χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, θα έχουμε, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, $\forall k \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(\vec{x} + \vec{y}) = \langle \vec{x} + \vec{y}, - \rangle = \langle \vec{x}, - \rangle + \langle \vec{y}, - \rangle = \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y})$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε διότι, $\forall \vec{z} \in \mathcal{E}$: $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$, και άρα $\langle \vec{x} + \vec{y}, - \rangle = \langle \vec{x}, - \rangle + \langle \vec{y}, - \rangle$. Επίσης, $\forall k \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(k\vec{x}) = \langle k\vec{x}, - \rangle = k\langle \vec{x}, - \rangle = k\Phi(\vec{x})$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε διότι, $\forall \vec{z} \in \mathcal{E}$: $\langle k\vec{x}, \vec{z} \rangle = k\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$, και άρα $\langle k\vec{x}, - \rangle = k\langle \vec{x}, - \rangle$. Επομένως η απεικόνιση Φ είναι γραμμική.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $\Phi(\vec{x}) = \vec{0}$. Τότε $\langle \vec{x}, - \rangle = 0$, δηλαδή $\forall \vec{z} \in \mathcal{E}$: $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0$. Επιλέγοντας $\vec{z} = \vec{x}$, έχουμε $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2 = 0$ και επομένως $\vec{x} = \vec{0}$. Αυτό δείχνει ότι η γραμμική απεικόνιση Φ είναι μονομορφισμός. Από το Λήμμα του Riesz, έπεται ότι για κάθε στοιχείο $\phi \in \mathcal{E}^*$, δηλαδή για κάθε γραμμική απεικόνιση $\phi \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, υπάρχει (μοναδικό) διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $\phi(\vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$, $\forall \vec{z} \in \mathcal{E}$. Δηλαδή $\Phi(\vec{x}) = \phi$ και η γραμμική απεικόνιση Φ είναι επιμορφισμός. Συνοψίζοντας δείξαμε ότι η γραμμική απεικόνιση Φ είναι ισομορφισμός.

(2) Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle : \mathcal{E}^* \times \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\!\langle\, \phi, \psi \,\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} \phi(\vec{e}_i)\psi(\vec{e}_i) = \phi(\vec{e}_1)\psi(\vec{e}_1) + \phi(\vec{e}_2)\psi(\vec{e}_2) + \cdots + \phi(\vec{e}_n)\psi(\vec{e}_n)$$

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}^*$. Για κάθε $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{E}$ και για κάθε $k \in \mathbb{R}$, θα έχουμε:

$$\langle\!\langle\, \phi + \psi, \chi \,\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\phi + \psi)(\vec{e}_i)\chi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\phi(\vec{e}_i) + \psi(\vec{e}_i))\chi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \big(\phi(\vec{e}_i)\chi(\vec{e}_i) + \psi(\vec{e}_i)\chi(\vec{e}_i)\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi(\vec{e}_i)\chi(\vec{e}_i) + \sum_{i=1}^{n} \psi(\vec{e}_i)\chi(\vec{e}_i) = \langle\!\langle\, \phi, \chi \,\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\, \psi, \chi \,\rangle\!\rangle$$

$$\langle\!\langle\, k\phi, \psi \,\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} (k\phi)(\vec{e}_i)\psi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} k\phi(\vec{e}_i)\psi(\vec{e}_i) = k\left(\sum_{i=1}^{n} \phi(\vec{e}_i)\psi(\vec{e}_i)\right) = k\,\langle\!\langle\, \phi, \psi \,\rangle\!\rangle$$

$$\langle\!\langle\, \phi, \psi \,\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} \phi(\vec{e}_i)\psi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \psi(\vec{e}_i)\phi(\vec{e}_i) = \langle\!\langle\, \psi, \phi \,\rangle\!\rangle$$

$$\langle\!\langle\, \phi, \phi \,\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} \phi(\vec{e}_i)\phi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\vec{e}_i)^2 \;\geq\; 0$$

και

$$\langle\!\langle\, \phi, \phi \,\rangle\!\rangle = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n} \phi(\vec{e}_i)^2 \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \phi(\vec{e}_i)^2 \;=\; 0,\;\; 1 \leq i \leq n, \quad\Longrightarrow\quad \phi(\vec{e}_i) \;=\; 0,\;\; 1 \leq i \leq n$$

Τότε όμως $\phi = 0$, διότι για κάθε διάνυσμα $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n \in \mathcal{E}$, θα έχουμε: $\phi(\vec{x}) = x_1\phi(\vec{e}_1) + \cdots + x_n\vec{e}_n) = 0$. Επομένως η απεικόνιση $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}^*$.

Τέλος θα έχουμε, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle\!\langle\, \Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y}) \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \langle \vec{x}, - \rangle,\, \langle \vec{y}, - \rangle \,\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle\, \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle$$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ είναι η μοναδική γραφή του $\vec{x}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της ορθοκανονική βάσης $\mathcal{B}$, τότε $x_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle$, $1 \leq i \leq n$, και τότε:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i, \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle\, \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\langle\!\langle\, \Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y}) \,\rangle\!\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

και επομένως ο ισομορφισμός Φ είναι μια ισομετρία. □

Άσκηση 15. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\,,\,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας αντισυμμετρικός ενδομορφισμός ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, δηλαδή: $f^* = -f$.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός*

$$\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \big(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f\big)(\vec{x}) = \vec{x} + f(\vec{x})$$

είναι ισομορφισμός.

(2) *Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός*

$$\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f\big) \circ \big(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f\big)^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι ισομετρία.

Λύση. Επειδή $f^* = -f$ από την Άσκηση 2 γνωρίζουμε ότι $\langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle = 0,\ \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, και η μοναδική πραγματική ιδιοτιμή του f είναι η $\lambda = 0$.

(1) Υποθέτουμε αντίθετα ότι ο ενδομορφισμός $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δεν είναι ισομορφισμός. Τότε ο πυρήνας της $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f$ δεν είναι ο τετριμένος, δηλαδή $\mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f) \neq \{\vec{0}\}$ και άρα υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{u} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{u}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{u} + f(\vec{u}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad f(\vec{u}) = -\vec{u}$$

Συνεπώς: $\lambda = -1$ αποτελεί ιδιοτιμή της f. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι η μοναδική πραγματική ιδιοτιμή του f είναι η $\lambda = 0$. Επομένως ο ενδομορφισμός $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομορφισμός.

(2) Επειδή από το μέρος (1), ο ενδομορφισμός $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομορφισμός, έπεται ότι ορίζεται ο ενδομορφισμός $(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι

$$\|\vec{x}\|^2 = \big\|\big((\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)\circ(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)^{-1}\big)(\vec{x})\big\|^2$$

Επςειδή ο ενδομορφισμός $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομορφισμός έχουμε: $\vec{x} = (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})$ για κάποιο $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Επομένως από τη παραπάνω σχέση αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})\|^2 = \big\|\big((\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)\circ(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)^{-1}\circ(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)\big)(\vec{y})\big\|^2 = \|(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y})\|^2$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})\|^2 &= \big\langle(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y}), (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})\big\rangle \\
&= \big\langle\vec{y} + f(\vec{y}), \vec{y} + f(\vec{y})\big\rangle \\
&= \big\langle\vec{y}, \vec{y}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), f(\vec{y})\big\rangle + 2\big\langle\vec{y}, f(\vec{y})\big\rangle \\
&= \big\langle\vec{y}, \vec{y}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), f(\vec{y})\big\rangle
\end{aligned}$$

διότι $\big\langle\vec{y}, f(\vec{y})\big\rangle = 0$, για κάθε $\vec{y} \in \mathcal{E}$, από την Άσκηση 2. Παρόμοια υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\|(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y})\|^2 &= \big\langle(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y}), (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y})\big\rangle \\
&= \big\langle\vec{y} - f(\vec{y}), \vec{y} - f(\vec{y})\big\rangle \\
&= \big\langle\vec{y}, \vec{y}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), f(\vec{y})\big\rangle - 2\big\langle\vec{y}, f(\vec{y})\big\rangle \\
&= \big\langle\vec{y}, \vec{y}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), f(\vec{y})\big\rangle
\end{aligned}$$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι:

$$\|(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})\|^2 = \|(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y})\|^2$$

και άρα ο ενδομορφισμός $(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)\circ(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + f)^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία. □

Άσκηση 16. *Έστω A ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος.*
(2) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ είναι ορθογώνιος.*

Λύση. Θεωροούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

του οποίου ο πίνακας στην κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}_n$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι ο A. Επειδή ο πίνακας A είναι αντισυμμετρικός, από την Άσκηση 3, έπεται ότι ο ενδομορφισμός f_A είναι αντισυμμετρικός: $f_A = -f_A$.

Από την Άσκηση 15 έπεται ότι ο ενδομορφισμός $\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} + f_A$ είναι ισομορφισμός και ο ενδομορφισμός $(\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} - f_A) \circ (\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} + f_A)^{-1}$ είναι ισομετρία. Τότε όμως θα έχουμε ότι ο πίνακας $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} + f_A)$ είναι αντιστρέψιμος και ο πίνακας $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big((\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} - f_A) \circ (\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} + f_A)^{-1}\big)$ είναι ορθογώνιος. Επειδή

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} + f_A) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n}) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A) = I_n + A$$

και

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big((\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} - f_A) \circ (\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} + f_A)^{-1}\big) &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big(\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} - f_A\big) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big((\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} + f_A)^{-1}\big) = \\ &= \big(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n}) - M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A)\big) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big((\mathsf{Id}_{\mathbb{R}_n} + f_A)\big)^{-1} = (I_n - A) \cdot (I_n + A)^{-1} \end{aligned}$$

έπεται ότι ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος και ο πίνακας $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ είναι ορθογώνιος. □

Άσκηση 17 (Μηδενοδύναμος + Συμμετρικός = Μηδενικός). (1) *Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός. Να δειχθεί ότι αν $f^m = 0$, τότε $f = 0$.*

(2) *Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας και $A^m = O$, να δειχθεί ότι $A = O$.*

Λύση. (1) Έστω $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ ο πίνακας του f σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$. Τότε ο πίνακας A είναι συμμετρικός και από το Φασματικό Θεώρημα γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, ισοδύναμα του f. Τότε

$$({}^tP \cdot A \cdot P)^m = {}^tP \cdot A^m \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

όπου λ_i^m είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^m. Επειδή $f^m = 0$ έπεται προφανώς ότι $A^m = 0$ και άρα $\lambda_i^m = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Τότε $\lambda_i = 0$ και άρα $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = A = 0$. Επομένως έχουμε: $f = 0$.

Δεύτερος Τρόπος: Από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_n\big\}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f:

$$f(\vec{e}_i) = \lambda_i \cdot \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

Τότε προφανώς, $\forall k \geq 1$: $f^k(\vec{e}_i) = \lambda_i^k \cdot \vec{e}_i$. Επομένως $\vec{0} = f^m(\vec{e}_i) = \lambda_i^m \cdot \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$, και άρα $\lambda_i^m = 0$ ή ισοδύναμα $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, διότι $\vec{e}_i \neq \vec{0}$. Επομένως, $1 \leq i \leq n$: $f(\vec{e}_i) = \vec{0}$. Τότε προφανώς $f = 0$ διότι η f μηδενίζει κάθε διάνυσμα της βάσης $\mathcal{B}$.

(2) Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

ο οποίος είναι αυτοπροσαρτημένος διότι ο πίνακας A του f_A στην κανονική βάση του $\mathbb{R}_n$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι συμμετρικός. Επειδή $A^m = O$, θα έχουμε $f_A^m = f_{A^m} = 0$, και τότε από το μέρος (1) τότε προκύπτει ότι $f_A = 0$ και αυτό σημαίνει ότι $A = O$. □

Άσκηση 18. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθούν τα εξής:

(1)
$$\mathsf{Ker}(f^*) = \mathsf{Im}(f)^{\perp}$$
(2)
$$\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Im}(f^*)^{\perp}$$
(3)
$$\mathsf{Im}(f^*) = \mathsf{Ker}(f)^{\perp}$$
(4)
$$\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Ker}(f^*)^{\perp}$$
(5) *Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε:*
$$f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \iff f^*(\mathcal{V}^{\perp}) \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$$

Λύση. (1) Έχουμε:
$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(f)^{\perp} &= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle \vec{y}, \vec{x} \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{y} \in \mathrm{Im}(f)\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle f(\vec{z}), \vec{x} \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{z} \in \mathcal{E}\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle \vec{z}, f^*(\vec{x}) \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{z} \in \mathcal{E}\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f^*(\vec{x}) = \vec{0}\big\} \\
&= \mathrm{Ker}\,(f^*)
\end{aligned}$$

(2) Έχουμε:
$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(f^*)^{\perp} &= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{y} \in \mathrm{Im}(f^*)\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle \vec{x}, f^*(\vec{z}) \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{z} \in \mathcal{E}\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle f(\vec{x}), \vec{z} \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{z} \in \mathcal{E}\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\big\} \\
&= \mathrm{Ker}\,(f)
\end{aligned}$$

(3) Από το μέρος (2) έπεται ότι:
$$\mathsf{Im}(f^*) = (\mathsf{Im}(f^*)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(f)^{\perp}$$

(4) Χρησιμοποιώντας το μέρος (1) έχουμε:
$$\mathrm{Im}\,(f) = (\mathrm{Im}\,(f)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(f^*)^{\perp}$$

(5) Υποθέτουμε ότι $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ και έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}^{\perp}$. Θα δείξουμε ότι $f^*(\vec{x}) \in \mathcal{V}^{\perp}$. Έστω $\vec{v} \in \mathcal{V}$. Τότε
$$\big\langle \vec{v}, f^*(\vec{x}) \big\rangle = \big\langle f(\vec{v}), \vec{x} \big\rangle = 0$$
διότι $\vec{x} \in \mathcal{V}^{\perp}$ και $f(\vec{v}) \in \mathcal{V}$. Συνεπώς:
$$f^*(\mathcal{V}^{\perp}) \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$$

Υποθέτουμε αντίστροφα ότι $f^*(\mathcal{V}^{\perp}) \subseteq \mathcal{V}^{\perp}$, δηλαδή $\big\langle \vec{v}, f^*(\vec{x}) \big\rangle = 0$ για κάθε $\vec{v} \in \mathcal{V}$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}^{\perp}$. Τότε:
$$\big\langle \vec{v}, f^*(\vec{x}) \big\rangle = 0, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{V}^{\perp} \implies \big\langle f(\vec{v}), \vec{x} \big\rangle = 0, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{V}^{\perp} \implies f(\vec{v}) \in (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{V}$$
και άρα
$$f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$$
□

Άσκηση 19. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*
$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθούν τα εξής:

(1)
$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^*)$$

(2)
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^* \circ f) \quad \textit{και} \quad \mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Ker}(f \circ f^*)$$
(3)
$$\mathbf{r}(f^* \circ f) = \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^*) = \mathbf{r}(f \circ f^*)$$

Λύση. (1) Έχουμε: $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f)$ και $\mathbf{r}(f^*) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f^*)$. Από την Άσκηση 18 έχουμε ότι: $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$, και τότε:
$$\mathbf{r}(f^*) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f^*) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = \mathbf{r}(f)$$

(2) Έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, δηλαδή $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Τότε $f^*(f(\vec{x})) = (f^* \circ f)(\vec{0}) = \vec{0}$ και επομένως $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$. Άρα $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$. Αντίστροφα, έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$, δηλαδή $(f^* \circ f)(\vec{0}) = \vec{0}$. Τότε:
$$0 = \langle \vec{x}, (f^* \circ f)(\vec{0}) \rangle = \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{0})) \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = \| f(\vec{x}) \|^2 \implies f(\vec{x}) = \vec{0}$$
δηλαδή $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ και επομένως $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Απτο τις παραπάνω σχέσεις προκύοτει ότι:
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$$
Απο την τελευταία σχέση, χρησιμοποιώντας ότι $f^{**} = f$, θα έχουμε:
$$\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Ker}(f^{**} \circ f^*) = \mathrm{Ker}(f \circ f^*)$$

(3) Χρησιμοποιώντας το μέρος (2), Θα έχουμε:
$$\mathbf{r}(f^* \circ f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f^* \circ f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - \mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = \mathbf{r}(f)$$
$$\mathbf{r}(f \circ f^*) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f \circ f^*) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f \circ f^*) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - \mathrm{Ker}(f^*) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f^*) = \mathbf{r}(f^*)$$
και ο ισχυρισμός του μέρους (3) προκύπτει από το μέρος (1). □

Άσκηση 20. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Να δειχθεί ότι:*
$$\mathbf{r}(A \cdot {}^tA) = \mathbf{r}({}^tA \cdot A) = \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}({}^tA)$$

Λύση. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό
$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$
Γνωρίζουμε τότε ότι $f_A^* = f_{{}^tA}$, και
$$\mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(A) \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(f_A^*) = \mathbf{r}(f_{{}^tA}) = \mathbf{r}({}^tA)$$
Άρα από την Άσκηση 19, έπεται ότι $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}({}^tA)$. Έστω $\mathcal{B}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}_n$. Τότε:
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^* \circ f_A) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = {}^tA \cdot A \quad \text{και} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A \circ f_A^*) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*) = A \cdot {}^tA$$
Επειδή $\mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$ και $\mathbf{r}(f_A^*) = \mathbf{r}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*)$, από τις παραπάνω σχέσεις, και την Άσκηση 19, θα έχουμε:
$$\mathbf{r}(A \cdot {}^tA) = \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}({}^tA) = \mathbf{r}({}^tA \cdot A)$$
□

Άσκηση 21. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$:*
$$(f^* \circ f)^k = 0 \iff f = 0 \iff (f \circ f^*)^m = 0$$

Λύση. Προφανώς αν $f = 0$, τότε $f^* \circ f = 0 = f \circ f^*$ και επομένως, $\forall k, m \in \mathbb{N}$: $(f^* \circ f)^k = 0 = (f \circ f^*)^m$.

Έστω $(f^* \circ f)^k = 0$, για κάποιο $k \geq 1$. Ο ενδομορφισμός $f^* \circ f$ είναι αυτοπροσαρτημένος, διότι: $(f^* \circ f)^* = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$. Επομένως από την Άσκηση 17, έπεται ότι
$$f^* \circ f = 0$$
Τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$:
$$0 = \langle \vec{x}, (f^* \circ f)(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{x})) \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = \| f(\vec{x}) \|^2 \implies f(\vec{x}) = \vec{0}$$

Επομένως $f = 0$.

Παρόμοια, έστω $(f \circ f^*)^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$. Ο ενδομορφισμός $f \circ f^*$ είναι αυτοπροσαρτημένος, διότι: $(f \circ f^*)^* = (f^*)^* \circ f^* = f \circ f^*$. Επομένως από την Άσκηση 17, έπεται ότι

$$f \circ f^* = 0$$

Τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$0 = \langle (f \circ f^*)(\vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle f(f^*(\vec{x})), \vec{x} \rangle = \langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{x}) \rangle = \|f^*(\vec{x})\|^2 \quad \Longrightarrow \quad f^*(\vec{x}) = \vec{0}$$

Επομένως $f^* = 0$. Τότε όμως $f = (f^*)^* = 0$. $\square$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Ένας ενδομορφισμός $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **κανονικός**, αν:

$$f \circ f^* = f^* \circ f$$

Για παράδειγμα κάθε αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ είναι προφανώς κανονικός.

Άσκηση 22. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας κανονικός ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$.*

(1) *Να δειχθεί ότι: $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:*
$$\|f^*(\vec{x})\| = \|f(\vec{x})\|$$
(2) *Να δειχθεί ότι αν $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ είναι ένα πολυώνυμο, τότε ο πολυωνυμικός ενδομορφσιμός $P(f)$ είναι κανονικός.*
(3) *Να δειχθεί ότι:*
$$\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{\vec{0}\}$$
(4) *Αν ο f είναι μηδενοδύναμος, δηλαδή $f^m = 0$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τότε: $f = 0$.*

Λύση. (1) Χρησιμοποιώντας ότι $(f^*)^* = f$, για κάθε $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\|f^*(\vec{x})\|^2 = \langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, (f^*)^*(f^*(\vec{x})) \rangle = \langle \vec{x}, f(f^*(\vec{x})) \rangle = \langle \vec{x}, (f \circ f^*)(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, (f^* \circ f)(\vec{x}) \rangle =$$
$$= \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{x})) \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = \|f(\vec{x})\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \|f^*(\vec{x})\| = \|f(\vec{x})\|$$

(2) Έστω $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k \in \mathbb{R}[t]$ ένα πολυώνυμο, και θεωρούμε τον πολυωνυμικό ενδομορφσιμό

$$P(f) = a_0 \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_k f^k \ : \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad P(f)(\vec{x}) = a_0 \vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + a_2 f^2(\vec{x}) + \cdots + a_k f^k(\vec{x})$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8, προκύπτει άμεσα ότι:

$$P(f)^* = P(f^*)$$

και τότε θα έχουμε:

$$P(f) \circ P(f)^* = P(f) \circ P(f^*) = P(f \circ f^*) = P(f^* \circ f) = P(f^*) \circ P(f) = P(f)^* \circ P(f)$$

Επομένως ο πολυωνυμικός ενδομορφισμός $P(f)$ είναι κανονικός.

(3) Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f(\vec{y}) = \vec{x}$. Τότε από το μέρος (1), θα έχουμε:

$$0 = \|f(\vec{x})\| = \|f^*(\vec{x})\| \quad \Longrightarrow \quad f^*(\vec{y}) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad 0 = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \|\vec{y}\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{y} = \vec{0}$$

Τότε θα έχουμε $\vec{x} = f(\vec{y}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, και επομένως $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{\vec{0}\}$.

(4) Έστω ότι $f^m = 0$.

Τότε, χρησιμοποιώντας ότι $f \circ f^* = f^* \circ f$, θα έχουμε

$$(f \circ f^*)^2 = f \circ f^* \circ f \circ f^* = f \circ f \circ f^* \circ f^* = f^2 \circ (f^*)^2$$

και επαγωγικά, εύκολα προκύπτει ότι:

$$(f \circ f^*)^k = f^k \circ (f^*)^k$$

Επομένως για $k = m$, έχουμε:

$$(f \circ f^*)^m = f^m \circ (f^*)^m = 0$$

Άρα ο ενδομορφισμός $f \circ f^*$ είναι μηδενοδύναμος. Παρόμοια εργαζόμενοι βλέπουμε ότι ο ενδομορφισμός $f^* \circ f$ είναι μηδενοδύναμος. Τότε από την Άσκηση 21 έπεται ότι $f = 0$. □

Άσκηση 23. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \, , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$.

(1) *Να δειχθεί ότι οι ενδομορφισμοί*

$$f \circ f^*, \ f^* \circ f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι αυτοπροσαρτημένοι.

(2) *Να δειχθεί ότι οι ενδομορφισμοί $f \circ f^*$ και $f^* \circ f$ είναι μη-αρνητικοί.*

(3) *Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός $f \circ f^*$ είναι θετικός αν και μόνον αν ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός.*

(4) *Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός $f^* \circ f$ είναι θετικός αν και μόνον αν ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός.*

Λύση. (1) Χρησιμοποιώντας τις Άσκησεις 8 και 9, Θα έχουμε:

$$(f \circ f^*)^* = (f^*)^* \circ f^* = f \circ f^* \quad \text{και} \quad (f^* \circ f)^* = (f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$$

Άρα οι ενδομορφισμοί $f \circ f^*$ και $f^* \circ f$ είναι αυτοπροσαρτημένοι.

(2) Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\big\langle (f \circ f^*)(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle = \big\langle f(f^*)(\vec{x})), \vec{x} \big\rangle = \big\langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{x}) \big\rangle = \| f^*(\vec{x}) \|^2 \ \geq \ 0$$

και επομένως ο ενδομορφισμός $f \circ f^*$ είναι μη-αρνητικός.

(3) Παρόμοια, για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\big\langle (f^* \circ f)(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle = \big\langle \vec{x}, (f^* \circ f)(\vec{x}) \big\rangle = \big\langle \vec{x}, (f^*(f(\vec{x})) \big\rangle = \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \big\rangle = \| f(\vec{x}) \|^2 \ \geq \ 0$$

και επομένως ο ενδομορφισμός $f^* \circ f$ είναι μη-αρνητικός.

(4) Έστω ότι ο ενδομορφισμός $f \circ f^*$ είναι θετικός, δηλαδή $\langle (f \circ f^*)(\vec{x}), \vec{x} \rangle > 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f^*(\vec{x}) = \vec{0}$. Τότε:

$$0 = \big\langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{x}) \big\rangle = \big\langle f(f^*(\vec{x})), \vec{x} \big\rangle = \big\langle (f \circ f^*)(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle$$

και επομένως θα έχουμε αναγκαστικά $\vec{x} = \vec{0}$. Άρα $\operatorname{Ker}(f^*) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή ο f^* είναι μονομορφισμός και επομένως ισομορφισμός διότι ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Από την Άσκηση 9 τότε και ο f είναι ισομορφισμός.

Αντίστροφα, αν ο f είναι ισομορφισμός, τότε από την Άσκηση 9 και ο f^* είναι ισομορφισμός. Αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε:

$$\big\langle (f \circ f^*)(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle = \| f^*(\vec{x}) \|^2 \ > \ 0$$

διότι αν $\| f^*(\vec{x}) \|^2 = 0$, τότε $\| f^*(\vec{x}) \| = 0$, δηλαδή $f^*(\vec{x}) = \vec{0}$, και αυτό είναι άτοπο διότι ο f^* είναι ισομορφισμός και $\vec{x} \neq \vec{0}$. Άρα ο ενδομορφισμός $f \circ f^*$ είναι θετικός.

(5) Έστω ότι ο ενδομορφισμός $f^* \circ f$ είναι θετικός, δηλαδή $\langle (f^* \circ f)(\vec{x}), \vec{x} \rangle > 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Τότε:

$$0 = \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \big\rangle = \big\langle \vec{x}, f^*(f(\vec{x})) \big\rangle = \big\langle \vec{x}, (f^* \circ f)(\vec{x})) \big\rangle = \big\langle (f^* \circ f)(\vec{x})), \vec{x} \big\rangle$$

και επομένως θα έχουμε αναγκαστικά $\vec{x} = \vec{0}$. Άρα $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή ο f είναι μονομορφισμός και επομένως ισομορφισμός διότι ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.

Αντίστροφα, αν ο f είναι ισομορφισμός, και $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε:

$$\big\langle (f^* \circ f)(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle = \| f(\vec{x}) \|^2 \ > \ 0$$

διότι αν $\|f(\vec{x})\|^2 = 0$, τότε $\|f(\vec{x})\| = 0$, δηλαδή $f(\vec{x}) = \vec{0}$, και αυτό είναι άτοπο διότι ο f είναι ισομορφισμός και $\vec{x} \neq \vec{0}$. $\square$

Άσκηση 24. *Για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες P και Q και διαγώνιοι πίνακες Δ και Γ, έτσι ώστε:*

$$ {}^tP \cdot A \cdot {}^tA \cdot P = \Delta \quad \textit{και} \quad {}^tQ \cdot {}^tA \cdot A \cdot Q = \Gamma $$

Επιπλέον οι πίνακες $A \cdot {}^tA$ και ${}^tA \cdot A$ είναι μη-αρνητικοί, και:

$$ A \cdot {}^tA > 0 \iff |A| \neq 0 \iff {}^tA \cdot A > 0 $$

Λύση. Οι πίνακες $A \cdot {}^tA$ και ${}^tA \cdot A$ είναι συμμετρικοί διότι

$$ {}^t(A \cdot {}^tA) = {}^t({}^tA) \cdot {}^tA = A \cdot {}^tA \quad \text{και} \quad {}^t({}^tA \cdot A) = {}^tA \cdot {}^t({}^tA) = {}^tA \cdot A $$

Από το Φασματικό Θεώρημα, υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες P και Q και διαγώνιοι πίνακες Δ και Γ, έτσι ώστε:

$$ {}^tP \cdot A \cdot {}^tA \cdot P = \Delta \quad \text{και} \quad {}^tQ \cdot {}^tA \cdot A \cdot Q = \Gamma $$

Επιπλέον, $\forall X \in \mathbb{R}_n$:

$$ \langle A \cdot {}^tA \cdot X, X \rangle = \langle {}^tA \cdot X, {}^tA \cdot X \rangle = \|{}^tA \cdot X\|^2 \geq 0 $$
$$ \langle {}^tA \cdot A \cdot X, X \rangle = \langle X, {}^tA \cdot A \cdot X \rangle = \langle A \cdot X, A \cdot X \rangle = \|A \cdot X\|^2 \geq 0 $$

Επειδή, όπως γνωρίζουμε, $f_A^* = f_{{}^tA}$, θεωρούμε τους ενδομορφισμούς

$$ f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X \qquad \text{και} \qquad f_A^* \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A^*(X) = f_{{}^tA}(X) = {}^tA \cdot X $$

Από την προηγούμενη Άσκηση 23, οι ενδομορφισμοί $f_A \circ f_A^*$ και $f_A^* \circ f_A$ είναι αυτοπροσαρτημένοι και μη-αρνητικοί. Επιπλέον:

$$ f_A \circ f_A^* > 0 \iff f_A: \text{ ισομορφισμός} \iff f_A^* \circ f_A > 0 \tag{$\dagger$} $$

Τότε θα έχουμε:

$$ f_A \circ f_A^* > 0 \iff \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}_n: \ \langle f_A \circ f_A^*(X), X \rangle > 0 \iff \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}_n: \ \langle f_A(f_A^*(X)), X \rangle > 0 \iff $$
$$ \iff \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}_n: \ \langle f_A({}^tA \cdot X), X \rangle > 0 \iff \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}_n: \ \langle A \cdot {}^tA \cdot X, X \rangle > 0 \iff A \cdot {}^tA > 0 $$

και παρόμοια

$$ f_A^* \circ f_A > 0 \iff \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}_n: \ \langle f_A^* \circ f_A(X), X \rangle > 0 \iff \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}_n: \ \langle f_A^*(f_A(X)), X \rangle > 0 \iff $$
$$ \iff \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}_n: \ \langle f_A^*(A \cdot X), X \rangle > 0 \iff \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}_n: \ \langle {}^tA \cdot A \cdot X, X \rangle > 0 \iff {}^tA \cdot A > 0 $$

Από τη σχέση $(\dagger)$ προκύπτει ότι:

$$ A \cdot {}^tA > 0 \iff |A| \neq 0 \iff {}^tA \cdot A > 0 $$ $\square$

Άσκηση 25. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$ f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} $$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Αν ο πίνακας του f σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ είναι αντισυμμετρικός, να δειχθεί ότι ο πίνακας του f σε κάθε ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ είναι αντισυμμετρικός.

Λύση. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ στην οποία ο πίνακας A του f είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή ${}^tA = -A$. Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_n\}$ μια άλλη ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ και έστω B ο πίνακας του f στη βάση $\mathcal{C}$. Γνωρίζουμε τότε ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, και επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1} \cdot A \cdot P = B$. Ο πίνακας P είναι τότε ορθογώνιος διότι είναι ο πίνακας μετάβασης από την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{C}$. Επομένως: ${}^tP = P^{-1}$, και θα έχουμε:

$$ B = P^{-1} \cdot A \cdot P \implies B = {}^tP \cdot A \cdot P \implies {}^tB = {}^t({}^tP \cdot A \cdot P) = {}^tP \cdot {}^tA \cdot {}^t({}^tP) = {}^tP \cdot (-A) \cdot P = -{}^tP \cdot A \cdot P = -B $$

Επομένως ${}^tB = -B$, δηλαδή ο πίνακας B είναι αντισυμμετρικός. $\square$

Άσκηση 26. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Να δειχθεί ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P και πίνακας B με την ιδιότητα ο πίνακας B^2 να είναι διαγώνιος, έτσι ώστε:*

$$^tP \cdot B \cdot P = A$$

Λύση. Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας, δηλαδή $^tA = -A$. Τότε ο πίνακας A^2 είναι συμμετρικός διότι

$$^t(A^2) = {}^t(A \cdot A) = {}^tA \cdot {}^tA = (-A) \cdot (-A) = A^2$$

Συνεπώς από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q έτσι ώστε

$$^tQ \cdot A^2 \cdot Q = \Delta \qquad \Longrightarrow \qquad A^2 = Q \cdot \Delta \cdot {}^tQ$$

όπου Δ είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Θέτοντας $P = Q^{-1} = {}^tQ$, θα έχουμε $P^{-1} = {}^tP$ και

$$P \cdot A^2 \cdot {}^tP = \Delta$$

Επομένως θέτοντας

$$B = P \cdot A \cdot {}^tP$$

θα έχουμε:

$$^tP \cdot B \cdot P = {}^tP \cdot (P \cdot A \cdot {}^tP) \cdot P = ({}^tP \cdot P) \cdot A \cdot ({}^tP \cdot P) = A$$

και

$$B^2 = (P \cdot A \cdot {}^tP) \cdot (P \cdot A \cdot {}^tP) = P \cdot A^2 \cdot {}^tP = \Delta$$

□

Άσκηση 27. (1) *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\, ,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:

$$f \circ g : \text{ αυτοπροσαρτημένος} \iff f \circ g = g \circ f$$

(2) *Έστω A και B δύο συμμετρικοί $n \times n$ πίνακες πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι:*

$$A \cdot B : \text{ συμμετρικός} \iff A \cdot B = B \cdot A$$

Λύση. (1) Αν $f \circ g = g \circ f$, τότε θα έχουμε:

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = g \circ f = f \circ g \quad \Longrightarrow \quad f \circ g : \text{ αυτοπροσαρτημένος}$$

Αντίστροφα, έστω ότι ο ενδομορφισμός $f \circ g$ είναι αυτοπροσαρτημένος. Τότε: $(f \circ g)^* = f \circ g$. Επειδή $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = g \circ f$, θα έχουμε: $f \circ g = f \circ f$.

(2) Θεωρούμε τους ενδομορφισμούς

$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X \qquad \text{και} \qquad f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

Προφανώς, $\forall X \in \mathbb{R}_n$:

$$f_A(f_B(X)) = f_A(B \cdot X) = A \cdot (B \cdot X) = (A \cdot B) \cdot X = f_{A \cdot B}(X) \quad \Longrightarrow \quad f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$$

και παρόμοια: $f_B \circ f_A = f_{B \cdot A}$. Άρα $A \cdot B = \mathcal{B} \cdot A$ αν και μόνον αν $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$.

Υποθέτουμε τώρα ότι οι πίνακες A και B είναι συμμετρικοί. Τότε οι ενδομορφισμοί f_A και f_B είναι αυτοπροσαρτημένοι, και άρα από το μέρος (1) έπεται ότι: ο ενδομορφσιμός $f_A \circ f_B$ είναι αυτοπροσαρτημένος αν και μόνον αν $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$, δηλαδή αν και μόνον αν $A \cdot B = \mathcal{B} \cdot A$. Όμως ο ενδομορφισμός $f_A \circ f_B$ είναι αυτοπροσαρτημένος αν και μόνον αν ο πίνακάς του σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_n E$ είναι συμμετρικός. Επειδή $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A \circ f_B) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_B) = A \cdot B$, όπου $\mathcal{B}$ είναι η συνήθης (ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_n$, έπεται ότι ο ενδομορφισμός $f_A \circ f_B$ είναι αυτοπροσαρτημένος αν και μόνον αν ο πίνακας $A \cdot B$ είναι συμμετρικός αν και μόνον αν $A \cdot B = B \cdot A$. □

Άσκηση 28. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(2) *Υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ επί του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε ο f είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$.*

Λύση. «$\Longleftarrow$» Αν ο f είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, τότε από το Φασματικό Θεώρημα έπεται ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.

«$\Longrightarrow$» Έστω ότι ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f:

$$f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

Ορίζουμε απεικόνιση

$$\langle \, , \, \rangle \, : \, \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \, \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \; i = j \\ 0, & \text{αν } \; i \neq j \end{cases}$$

και αν $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ και $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n$, τότε:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \, \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$ και τότε:

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{x}), \vec{y} \, \rangle &= \big\langle f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n), \, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n \big\rangle = \\ &= \big\langle x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n), \, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n \big\rangle = \\ &= \big\langle x_1\lambda_1\vec{e}_1 + x_2\lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\lambda_n\vec{e}_n, \, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n \big\rangle = \\ &= x_1\lambda_1y_1 + x_2\lambda_2y_2 + \cdots + x_n\lambda_ny_n \end{aligned}$$

Παρόμοια θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \, \rangle &= \big\langle x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n, \, f(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n) \big\rangle = \\ &= \big\langle x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n, \, y_1 f(\vec{e}_1) + y_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + y_n f(\vec{e}_n), \big\rangle = \\ &= \big\langle x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n, \, y_1\lambda_1\vec{e}_1 + y_2\lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\lambda_n\vec{e}_n \big\rangle = \\ &= x_1\lambda_1y_1 + x_2\lambda_2y_2 + \cdots + x_n\lambda_ny_n \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \, \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle$$

Λόγω μοναδικότητας του προσαρτημένου ενός ενδομορφισμού, έπεται ότι $f = f^*$ και ο f είναι αυτοπροσαρτημένος. □

Άσκηση 29. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(2) *Υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ επί του $\mathbb{R}_n$ έτσι ώστε, $\forall X \in \mathbb{R}_n$:*

$$\langle\!\langle \, A \cdot X, \, Y \, \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \, X, \, A \cdot Y \, \rangle\!\rangle$$

Λύση. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

Γνωρίζουμε ότι ο ενδομορφισμός f_A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Επομένως σύμφωνα με την Άσκηση 28, ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν υπάρχει ένα εσωτερικό $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ γινόμενο στον $\mathbb{R}_n$ έτσι ώστε, $\forall X \in \mathbb{R}_n$:

$$\langle\!\langle \, f_A(X), Y \, \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \, X, f_A(Y) \, \rangle\!\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\!\langle \, A \cdot X, Y \, \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \, X, A \cdot Y \, \rangle\!\rangle$$ □

Άσκηση 30. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f,\, g:\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Υποθέτουμε ότι ο f είναι αυτοπροσαρτημένος ισομορφισμός, ο g είναι αντισυμμετρικός, και ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f$$

(1) *Να δειχθεί ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{y})\big\rangle = -\big\langle g(\vec{x}), f(\vec{y})\big\rangle$$

και επομένως, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = 0$$

(2) *Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$:*

$$\|(f+g)(\vec{x})\| = \|(f-g)(\vec{x})\|$$

(3) *Οι ενδομορφισμοί $f+g$ και $f-g$ είναι αντιστρέψιμοι.*

(4) *Ο ενδομορφισμός*

$$(f+g)\circ(f-g)^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι ισομετρία.

Λύση. (1) Για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{y})\big\rangle = \big\langle \vec{x}, f^*(g(\vec{y}))\big\rangle = \big\langle \vec{x}, f(g(\vec{y}))\big\rangle = \big\langle \vec{x}, (f\circ g)(\vec{y})\big\rangle = \big\langle \vec{x}, (g\circ f)(\vec{y}))\big\rangle = \big\langle \vec{x}, g(f(\vec{y}))\big\rangle =$$

$$= -\big\langle \vec{x}, -g(f(\vec{y}))\big\rangle = -\big\langle \vec{x}, (-g)(f(\vec{y}))\big\rangle = -\big\langle \vec{x}, -g^*(f(\vec{y}))\big\rangle = -\big\langle g(\vec{x}), f(\vec{y})\big\rangle$$

Ιδιαίτερα, για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = -\big\langle g(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle = -\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle \quad\Longrightarrow\quad 2\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = 0 \quad\Longrightarrow\quad \big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = 0$$

(2) Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\big\|(f+g)(\vec{x})\big\|^2 = \big\langle (f+g)(\vec{x}), (f+g)(\vec{x})\big\rangle = \big\langle f(\vec{x}) + g(\vec{x}), f(\vec{x}) + g(\vec{x})\big\rangle =$$

$$= \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle + \big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle + \big\langle g(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle + \big\langle g(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle + 2\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle + \big\langle g(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle =$$

$$= \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle + \big\langle g(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle - 2\big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle + \big\langle g(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle =$$

$$= \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle - \big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle - \big\langle g(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle + \big\langle g(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = \big\langle f(\vec{x}) - g(\vec{x}), f(\vec{x}) - g(\vec{x})\big\rangle =$$

$$= \big\langle (f-g)(\vec{x}), (f-g)(\vec{x})\big\rangle = \big\|(f-g)(\vec{x})\big\|^2$$

Επομένως, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\big\|(f+g)(\vec{x})\big\| = \big\|(f-g)(\vec{x})\big\|$$

(3) Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f+g)$. Τότε $(f+g)(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \vec{0}$ και άρα $f(\vec{x}) = -g(\vec{x})$. Τότε, από το μέρος (1):

$$0 = \big\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = \big\langle -g(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = -\big\langle g(\vec{x}), g(\vec{x})\big\rangle = -\|g(\vec{x})\|^2 \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad g(\vec{x}) = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad f(\vec{x}) = -g(\vec{x}) = \vec{0}$$

Επειδή ο f είναι ισομορφισμός, έπεται ότι $\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή $\operatorname{Ker}(f+g) = \big\{\vec{0}\big\}$ και ο ενδομορφισμός $f+g$ είναι μονομορφισμός. Επειδή ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{E}$ έχε πεπερασμένη διάσταση, έποεται ότι ο ενδομορφισμός $f+g$ είναι ισομορφισμός.

Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f-g)$. Τότε $(f-g)(\vec{x}) = \vec{0}$, ισοδύναμα $\|(f-g)(\vec{x})\| = 0$ και άρα από το μέρος (2) έχουμε $\|(f+g)(\vec{x})\| = 0$, ισοδύναμα: $(f+g)(\vec{x}) = \vec{0}$. Επειδή ο ενδομορφισμός $f+g$ είναι ισομορφισμός, έπεται ότι $\vec{x} = \vec{0}$ και επομένως $\operatorname{Ker}(f-g) = \big\{\vec{0}\big\}$. Τότε ο ενδομορφισμός $f-g$ είναι μονομορφισμός, και άρα είναι ισομορφισμός διότι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.

(4) Θέτουμε:

$$h = (f+g)\circ(f-g)^{-1} \quad \text{και τότε} \quad h\circ(f-g) = f+g$$

Τότε χρησιμοποιώντας το μέρος (2), θα έχουμε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\big\| h\big((f-g)(\vec{x})\big)\big\| = \big\|\big(h\circ(f-g)\big)(\vec{x})\big\| = \big\|(f+g)(\vec{x})\big\| = \big\|(f-g)(\vec{x})\big\|$$

Επειδή ο ενδομορφισμός $f-g$ είναι ισομορφισμός, έπεται ότι $\mathrm{Im}(f-g) = \mathcal{E}$ και άρα κάθε διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι της μορφής $(f-g)(\vec{x})$. Επομένως, για κάθε διάνυσμα $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έχουμε $\vec{y} = (f-g)(\vec{x})$ για κάποιο διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ και τότε η παραπάνω σχέση δείχνει ότι:

$$\big\|h(\vec{y})\big\| = \big\|h\big((f-g)(\vec{x})\big)\big\| = \big\|(f-g)(\vec{x})\big\| = \big\|\vec{y}\big\|$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι ο ενδομορφισμός h είναι ισομετρία. □

Η επόμενη Άσκηση αποτελεί γενίκευση της Άσκησης 16 (η τελευταία προκύπτει θέτοντας $A = I_n$ στην παρακάτω Άσκηση).

Άσκηση 31. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ και υποθέτουμε ότι:*

$${}^tA = A, \quad |A| \neq 0, \quad {}^tB = -B, \quad A\cdot B = B\cdot A$$

(1) *Να δειχθεί ότι, $\forall X, Y \in \mathbb{R}_n$:*

$$\big\langle A\cdot X, B\cdot Y\big\rangle = -\big\langle B\cdot X, A\cdot Y\big\rangle$$

και επομένως, $\forall X \in \mathbb{R}_n$:

$$\big\langle A\cdot X, B\cdot X\big\rangle = 0$$

(2) *Οι πίνακες $A+B$ και $A-B$ είναι αντιστρέψιμοι.*

(3) *Για κάθε $X \in \mathbb{R}_n$:*

$$\|(A+B)\cdot X\| = \|(A-B)\cdot X\|$$

(4) *Ο πίνακας*

$$(A+B)\cdot(A-B)^{-1}$$

είναι ορθογώνιος.

Λύση. Θεωρούμε τους ενδομορφισμούς

$$f_A\colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A\cdot X \qquad \text{και} \qquad f_B\colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_B(X) = B\cdot X$$

Επειδή οι πίνακες A και B είναι οι πίνακες των ενδομορφισμών f_A και f_B στην κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}_n$, η οποία είναι ορθοκανονική, και επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και συμμετρικός και ο πίνακας B είναι αντιθσυμμετρικός, έπεται ότι ο ενδομορφισμός f_A είναι αυτοπροσαρτημένος και ισομορφισμός και ο ενδομορφισμός f_B είναι αντισυμμετρικός. Από την Άσκηση 30 τότε προκύπτουν τα εξής:

(1) $\forall X, Y \in \mathbb{R}_n$:

$$\big\langle f_A(X), f_B(Y)\big\rangle = -\big\langle f_B(X), f_A(Y)\big\rangle \quad\Longrightarrow\quad \big\langle A\cdot X, B\cdot Y\big\rangle = -\big\langle B\cdot X, A\cdot Y\big\rangle$$

και επομένως, $\forall X \in \mathbb{R}_n$:

$$\big\langle A\cdot X, B\cdot X\big\rangle = 0$$

(2) Οι ενδομορφισμοί $f_A + f_B$ και $f_A - f_B$ είναι ισομορφισμοί. Επειδή:

$$f_A + f_B = f_{A+B} \qquad \text{και} \qquad f_A - f_B = f_{A-B}$$

έπεται ότι οι πίνακες $A+B$ και $A-B$ είναι αντιστρέψιμοι.

(3) Για κάθε $X \in \mathbb{R}_n$:

$$\|(f_A+f_B)(X)\| = |(f_A-f_B)(X)\| \;\Longrightarrow\; \|(f_{A+B})(X)\| = |(f_{A-B})(X)\| \;\Longrightarrow\; \|(A+B)\cdot X\| = |(A-B)\cdot X\|$$

(4) Ο ενδομορφισμός $(f_A + f_B) \circ (f_A - f_B)^{-1}$ είναι ισομετρία. Επομένως ισοδύναμα ο ενδομορφισμός $(f_{A+B}) \circ (f_{A-B})^{-1}$ είναι ισομετρία. Τότε ο πίνακας της ισομετρίας $(f_{A+B}) \circ (f_{A-B})^{-1}$ στην κανονική ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}_n$ είναι ορθογώνιος. Επειδή $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{A+B}) = A+B$ και $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{A-B}) = A-B$, και άρα $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{A-B})^{-1} = (A-B)^{-1}$, προκύπτει ότι ο πίνακας

$$(A+B)\cdot(A-B)^{-1}$$

είναι ορθογώνιος. □

Άσκηση 32. *στω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f,\, g:\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E}: \quad \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle = \langle g(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad f = g$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας ότι ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος, θα έχουμε $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y}\,\rangle = \langle f(\vec{x})+f(\vec{y}), \vec{x}+\vec{y}\,\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{y}\,\rangle + \langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{x}\,\rangle =$$

$$= \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{y}\,\rangle + \langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle + \langle \vec{x}, f(\vec{y})\,\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{y}\,\rangle + \langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle + \langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\,\rangle =$$

$$= \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{y}\,\rangle + \langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle + \langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{y}\,\rangle + 2\langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle$$

Επομένως:

$$\langle f(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y}\,\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{y}\,\rangle + 2\langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle$$

και παρόμοια, χρησιμοποιώντας ότι ο ενδομορφισμός g είναι αυτοπροσαρτημένος, θα έχουμε, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle g(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y}\,\rangle = \langle g(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle + \langle g(\vec{y}), \vec{y}\,\rangle + 2\langle g(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και την υπόθεση προκύπτει τότε ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle = \langle g(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle \tag{$\dagger$}$$

Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ του $\mathcal{E}$. Τότε, $\forall j = 1, 2, \cdots, n$:

$$f(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{e}_k \qquad \text{και} \qquad g(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\vec{e}_k \tag{$\dagger\dagger$}$$

όπου $A = (a_{ij}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ και $B = (b_{ij}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$ είναι οι πίνακες των ενδομορφισμών f και g στη βάση $\mathcal{B}$ αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε:

$$\langle f(\vec{e}_j), \vec{e}_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{e}_k, \vec{e}_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\langle \vec{e}_k, \vec{e}_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\delta_{ki} = a_{ij}$$

$$\langle g(\vec{e}_j), \vec{e}_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\vec{e}_k, \vec{e}_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\langle \vec{e}_k, \vec{e}_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\delta_{ki} = b_{ij}$$

Επομένως από τη σχέση ($\dagger$), θα έχουμε, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$:

$$a_{ij} = \langle f(\vec{e}_j), \vec{e}_i\rangle = \langle g(\vec{e}_j), \vec{e}_i\rangle = b_{ij}$$

Τότε από τις σχέσεις ($\dagger\dagger$) προκύπτει ότι, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$:

$$f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει άμεσα ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$, και επομένως: $f = g$. □

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$, τότε ο f καλείται **ορθογώνια προβολή** αν υπάρχει ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$, έτσι ώστε $f(\vec{v}) = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ και $f(\vec{u}) = \vec{0}$, $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}^{\perp}$. Τότε ο f καλείται ορθογώνια προβολή στον $\mathcal{V}$ παράλληλα με τον $\mathcal{V}^{\perp}$.

Έστω ότι ο ενδομορφισμός f είναι μια ορθογώνια προβολή του υπόχωρου $\mathcal{V}$ παράλληλα με τον $\mathcal{V}^{\perp}$. Τότε $f(\vec{v}) = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ και $f(\vec{u}) = \vec{0}$, $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}^{\perp}$. Προφανώς $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Im}(f)$ και $\mathcal{V}^{\perp} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Έστω $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f)$, και άρα $f(\vec{y}) = \vec{x}$. Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp}$, θα έχουμε $\vec{y} = \vec{z} + \vec{w}$, όπου $\vec{z} \in \mathcal{V}$ και $\vec{w} \in \mathcal{V}^{\perp}$. Τότε $\vec{x} = f(\vec{y}) = f(\vec{z}) + f(\vec{w})$. Επειδή $\vec{z} \in \mathcal{V}$ θα έχουμε $f(\vec{z}) = \vec{z}$ και επειδή $\vec{w} \in \mathcal{V}^{\perp}$, θα έχουμε $f(\vec{w}) = \vec{0}$. Άρα $\vec{x} = \vec{z} \in \mathcal{V}$ και επομένως $\mathcal{V} = \mathrm{Im}(f)$. Παρόμοια, αν $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε έστω $\vec{x} = \vec{z} + \vec{w}$, όπου $\vec{z} \in \mathcal{V} = \mathrm{Im}(f)$ και $\vec{w} \in \mathcal{V}^{\perp}$. Τότε $\vec{z} = f(\vec{y})$ για κάποιο $\vec{y} \in \mathcal{E}$ και $f(\vec{w}) = \vec{0}$ διότι $\mathcal{V}^{\perp} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Τότε $\vec{z} = \vec{x} - \vec{w} \in \mathrm{Ker}(f)$ και άρα $f^2(\vec{y}) = f(\vec{z}) = \vec{0}$. Τότε $\vec{z} = f(\vec{y}) = f^2(\vec{y}) = \vec{0}$ και άρα $\vec{x} = \vec{w} \in \mathcal{V}^{\perp}$. Επομένως $\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{V}^{\perp} = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$. Επομένως δείξαμε ότι: $\mathcal{V} = \mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$, και επιπλέον:

$$\mathcal{E} = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \qquad \text{και} \qquad \mathrm{Im}(f)^{\perp} = \mathrm{Ker}(f)$$

Άσκηση 33. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Αν ο f είναι μια προβολή, δηλαδή $f^2 = f$, να δειχθεί ότι ο f είναι αυτοπροσαρτημένος αν και μόνον αν ο f είναι ορθογώνια προβολή.

Λύση. «$\Longrightarrow$» Έστω ότι ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος. Τότε από το Φασματικό Θεώρημα, έπεται ότι υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f. Σημειώνουμε ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του f, τότε $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Υποθέτουμε ότι η ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται k-φορές και η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n-k$ φορές, όπου $n = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{E}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq k$ και $f(\vec{e}_i) = \vec{0}$, $k+1 \leq i \leq n$. Τότε προφανώς το σύνολο διανυσμάτων $\left\{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\right\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathrm{Ker}(f)$, και το σύνολο διανυσμάτων $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\right\}$ αποτελεί ένα γραμμικά ανεξάρτητο και ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων του $\mathrm{Im}(f)$. Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathrm{Im}(f) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{E} - \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathrm{Ker}(f) = n - (n-k) = k$, έπεται ότι το σύνολο $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\right\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathrm{Im}(f)$. Εκ' κατασκευής τότε έχουμε ένα ορθογώνιο ευθύ άθροισμα $\mathcal{E} = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ και άρα $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$. Αν $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f)$, τότε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_k\vec{e}_k$ και άρα $f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_k f(\vec{e}_k) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_k\vec{e}_k = \vec{x}$. Επειδή $f(\vec{x}) = \vec{0}$, $\forall \vec{x} \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$, έπεται ότι ο εμνδομορφισμός f είναι μια ορθογώνια προβολή του υπόχωρου $\mathcal{V} = \mathrm{Im}(f)$ παράλληλα με τον $\mathcal{V}^{\perp} = \mathrm{Im}(f)^{\perp} = \mathrm{Ker}(f)$.

«$\Longleftarrow$» Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε μπορούμε να γράψουμε μοναδικά:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \qquad \text{όπου} \qquad \vec{x}_1 \in \mathrm{Im}(f) \quad \text{και} \quad \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$$

$$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \qquad \text{όπου} \qquad \vec{y}_1 \in \mathrm{Im}(f) \quad \text{και} \quad \vec{y}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$$

Τότε: $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$ και $f(\vec{y}) = f(\vec{y}_1) + f(\vec{y}_2) = f(\vec{y}_1) = \vec{y}_1$, και επειδή $\mathrm{Im}(f) \perp \mathrm{Ker}(f)$, θα έχουμε:

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1 + \vec{y}_2\rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\rangle + \langle \vec{x}_1, \vec{y}_2\rangle \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\rangle$$

και παρόμοια

$$\langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\rangle$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle$$

και αυτό σημαίνει, λόγω μοναδικότητας του προσαρτημένου ενδομορφισμού, ότι: $f^* = f$. $\square$

Άσκηση 34. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

Έστω

$$\mathsf{AE}^{>0}(\mathcal{E}) = \big\{ f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f: \ \textit{θετικός αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του } \mathcal{E} \big\}$$

$$\mathsf{IP}(\mathcal{E}) = \big\{ \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle: \ \textit{εσωτερικό γινόμενο επί του } \mathcal{E} \big\}$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση:

$$\Phi:\ \mathsf{AE}^{>0}(\mathcal{E}) \ \longrightarrow\ \mathsf{IP}(\mathcal{E}), \quad \Phi(f) = \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_f:\ \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\!\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\!\rangle_f = \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle$$

είναι «1-1» και «επί».

Λύση. Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας θετικός και αυτοπροσαρτημένμος ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Χρησιμοποποιώντας ότι ο f είναι αυτοπροσαρτημένος ($f^* = f$) και θετικός ($\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle > 0$, $\forall \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathcal{E}$), θα έχουμε, $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{E}$, $\forall k \in \mathbb{R}$:

$$\langle\!\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle\!\rangle_f = \langle f(\vec{x} + \vec{y}), \vec{z} \rangle = \langle f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \vec{z} \rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{z} \rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{z} \rangle = \langle\!\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle_f + \langle\!\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle\!\rangle_f$$

$$\langle\!\langle \kappa\vec{x}, \vec{y} \rangle\!\rangle_f = \langle f(\kappa\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \kappa f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \kappa \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \kappa \langle\!\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\!\rangle_f$$

$$\langle\!\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\!\rangle_f = \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle = \langle f(\vec{y}), \vec{x} \rangle = \langle\!\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle\!\rangle_f$$

$$\langle\!\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\!\rangle_f = \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle_f \geq 0 \quad \text{και} \quad \langle\!\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\!\rangle_f = 0 \iff \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle_f = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$$

Επομένως η απεικόνιση $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_f$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$.

Αντίστροφα, έστω

$$\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle:\ \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle\!\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\!\rangle$$

ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$. Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\langle\!\langle \vec{x}, - \rangle\!\rangle:\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{z} \longmapsto \langle\!\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle$$

Από το Λήμμα του Riesz, έπεται τότε ότ υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{y}$ έτσι ώστε:

$$\langle\!\langle \vec{x}, - \rangle\!\rangle = \langle \vec{y}, - \rangle, \quad \text{δηλαδή } \forall \vec{z} \in \mathcal{E}: \quad \langle\!\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

Συμβολίζουμε το μοναδικό αυτό διάνυσμα $\vec{y}$ με $f(\vec{x})$ και επομένως έχουμε ορίσει μια απεικόνιση

$$f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = \textit{ το μοναδικό διάνυσμα του } \mathcal{E} \textit{ έτσι ώστε } \ \langle\!\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{z} \rangle, \ \forall \vec{z} \in \mathcal{E}$$

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση f είναι ενδομορφισμός ο οποίος είναι αυτοπροσαρτημένος και θετικός.

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$. Τότε $f(\vec{x})$, $f(\vec{y})$, $f(\vec{x} + \vec{y})$, και $f(\kappa\vec{x})$, ορίζονται μοναδικά από τις ακόλουθες σχέσεις, $\forall \vec{z} \in \mathcal{E}$:

$$\langle\!\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{z} \rangle$$

$$\langle\!\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \langle f(\vec{y}), \vec{z} \rangle$$

$$\langle\!\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \langle f(\vec{x} + \vec{y}), \vec{z} \rangle$$

$$\langle\!\langle \kappa\vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \langle f(\kappa\vec{x}), \vec{z} \rangle$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες και λαμβάνοντας υπόψη την τρίτη από τις παραπάνω σχέσεις, έπεται ότι, $\forall \vec{z} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x} + \vec{y}), \vec{z} \rangle = \langle\!\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{z} \rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{z} \rangle = \langle f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \vec{z} \rangle$$

Επομένως θα έχουμε $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Παρόμοια, πολλαπλασιάζοντας βαθμωτά την πρώτη σχέση με κ και λαμβάνοντας υπόψη την τέταρτη από τις παραπάνω σχέσεις, έπεται ότι, $\forall \vec{z} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\kappa\vec{x}), \vec{z} \rangle = \langle\!\langle \kappa\vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \kappa \langle\!\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \kappa \langle f(\vec{x}), \vec{z} \rangle = \langle \kappa f(\vec{x}), \vec{z} \rangle$$

Επομένως θα έχουμε $f(\kappa\vec{x}) = \kappa f(\vec{x})$. Συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση f είναι ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Επειδή, $\forall \vec{x}, \vec{z} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x}), \vec{z} \rangle = \langle\!\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \vec{z}, \vec{x} \rangle\!\rangle = \langle f(\vec{z}), \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{z}) \rangle$$

έπεται ότι ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος. Επιπλέον,$\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$:

$$\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle\!\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\!\rangle > 0$$

επομένως ο αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός f είναι θετικός.

Με την παραπάνω διαδικασία έχουμε ορίσει μια απεικόνιση

$$\Psi:\ \mathsf{IP}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{AE}^{>0}(\mathcal{E}), \quad \Psi(\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle) = \textit{ο μοναδικός ενδομορφισμός } f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \ \textit{έτσι ώστε}:$$
$$\langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{z}\,\rangle\!\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{z}\,\rangle, \quad \forall \vec{z} \in \mathcal{E}$$

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση Φ είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη την Ψ, δηλαδή θα δείξουμε ότι:

$$\Psi \circ \Phi = \mathsf{Id}_{\mathsf{AE}^{>0}(\mathcal{E})} \quad \text{και} \quad \Phi \circ \Psi = \mathsf{Id}_{\mathsf{IP}(\mathcal{E})}$$

Έστω $f \in \mathsf{AE}^{>0}(\mathcal{E})$ ένας θετικός αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Τότε $\Phi(f) = \langle\!\langle\, -,-\rangle\!\rangle_f$ είναι το εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται μοναδικά από τη σχέση, $\forall \vec{x}, \vec{z} \in \mathcal{E}$: $\langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{z}\,\rangle\!\rangle_f = \langle f(\vec{x}), \vec{z}\,\rangle$. Τότε ο ενδομορφισμός $\Psi(\Phi(f)) = \Psi(\langle\!\langle\, -,-\rangle\!\rangle_f)$ είναι ο μοναδικός θετικός ενδομορφισμός $\widetilde{f}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $\langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{z}\,\rangle\!\rangle_f = \langle \widetilde{f}(\vec{x}), \vec{z}\,\rangle$. Τότε, επειδή, $\forall \vec{x}, \vec{z} \in \mathcal{E}$: $\langle \widetilde{f}(\vec{x}), \vec{z}\,\rangle = \langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{z}\,\rangle\!\rangle_f = \langle f(\vec{x}), \vec{z}\,\rangle$, προκύπτει ότι $\widetilde{f} = f$ και επομένως

$$\Psi \circ \Phi = \mathsf{Id}_{\mathsf{AE}^{>0}(\mathcal{E})}$$

Έστω $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle \in \mathsf{IP}(\mathcal{E})$ ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$. Τότε $\Psi(\langle\!\langle\, -,-\,\rangle\!\rangle)$ είναι ο μοναδικός θετικός αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $\langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{z}\,\rangle\!\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{z}\,\rangle$. Τότε το εσωτερικό γινόμενο $\Phi(\Psi(\langle\!\langle\, -,-\,\rangle\!\rangle)$ είναι το μοναδικό εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle\, -\,,\,\rangle\!\rangle_f$ έτσι ώστε $\langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{z}\,\rangle\!\rangle_f = \langle f(\vec{x}), \vec{z}\,\rangle$. Τότε, επειδή, $\forall \vec{x}, \vec{z} \in \mathcal{E}$: $\langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{z}\,\rangle\!\rangle_f = \langle f(\vec{x}), \vec{z}\,\rangle = \langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{z}\,\rangle\!\rangle$, έπεται ότι $\langle\!\langle\, -,-\rangle\!\rangle_f = \langle\!\langle\, -,\rangle\!\rangle$ και επομένως

$$\Phi \circ \Psi = \mathsf{Id}_{\mathsf{IP}(\mathcal{E})} \qquad \square$$

Άσκηση 35. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\,,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης n και έστω $\mathcal{B}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$. Θεωρούμε το σύνολο*

$$\mathsf{S}_n^{>0}(\mathbb{R}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A = A > 0\big\}$$

των θετικών συμμετρικών $n \times n$ πινάκων.

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$G:\ \mathsf{IP}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{S}_n^{>0}(\mathbb{R}), \quad G(\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle) = \big(\langle\!\langle\, \vec{e}_i, \vec{e}_j\,\rangle\!\rangle\big) = \textit{ο πίνακας Gram των διανυσμάτων της βάσης } \mathcal{B}$$

είναι «1-1» και «επί».

Λύση. Αν $\mathcal{B}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$, τότε προφανώς η απεικόνιση

$$\Omega:\ \mathsf{AE}^{>0}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{S}_n^{>0}(\mathbb{R}), \quad \Omega(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

είναι «1-1» και «επί». Επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη Άσκηση, έπεται ότι η απεικόνιση

$$G := \Omega \circ \Psi:\ \mathsf{IP}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{S}_n^{>0}(\mathbb{R}), \quad G(\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

όπου $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ο μοναδικός (αυτοπροσαρτημένος και θετικός) ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle\!\langle\, \vec{x}, \vec{z}\,\rangle\!\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle$$

είναι «1-1» και «επί». Έστω $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$. Θα έχουμε τότε, $\forall j = 1, 2, \cdots, n$:

$$f(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n$$

Επειδή η βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθοκανονική, έπεται ότι:

$$\langle f(\vec{e}_j), \vec{e}_i\rangle = \big\langle a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n,\, \vec{e}_i\big\rangle = a_{ij}$$

Άρα:

$$\langle\!\langle\, \vec{e}_i, \vec{e}_j\,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \vec{e}_j, \vec{e}_i\,\rangle\!\rangle = a_{ij}$$

και επομένως ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ είναι ο πίνακας Gram των διανυσμάτων της ορθοκανονικής βάσης $\mathcal{B}$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle$. $\square$