ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυσεισ Ασκησεων - Φυλλαδιο 9

Ασκησεισ Επαναληψησ

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 19 Μαΐου 2023

Άσκηση 1. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, όπου $\mathcal{E} \neq \{\vec{0}\}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος. Υποθέτουμε ότι κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{E}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε*

$$f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E},\ \vec{x} \neq \vec{0},\ \exists\, \lambda_{\vec{x}} \in \mathbb{K}: \quad f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$$

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}$, όπου $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$.

Τότε:

$$f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x} \qquad \text{και} \qquad f(\vec{y}) = \lambda_{\vec{y}}\vec{y}$$

- Αν $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$, τότε θα έχουμε και:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}(\vec{x} + \vec{y})$$

και επομένως:

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{x} + \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_{\vec{x}}\vec{x} + \lambda_{\vec{y}}\vec{y} = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{x} + \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{y}$$

Άρα:

$$(\lambda_{\vec{x}} - \lambda_{\vec{x}+\vec{y}})\vec{x} + (\lambda_{\vec{y}} - \lambda_{\vec{x}+\vec{y}})\vec{y} = \vec{0}$$

Υποθέουμε ότι: $\lambda_{\vec{x}} \neq \lambda_{\vec{y}}$. Τότε τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι ιδιοδιανύσματα της f τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Τότε όπως γνωρίζουμε, τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και επομένως η τελευταία σχέση δίνει:

$$\lambda_{\vec{x}} - \lambda_{\vec{x}+\vec{y}} = 0 = \lambda_{\vec{y}} - \lambda_{\vec{x}+\vec{y}} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}} = \lambda_{\vec{y}}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα αν $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$, τότε: $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$.

- Αν $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, τότε $\vec{y} = -\vec{x}$, και θα έχουμε:

$$\vec{0} = f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x} + \lambda_{\vec{y}}\vec{y} = \lambda_{\vec{x}}\vec{x} - \lambda_{\vec{x}} = (\lambda_{\vec{x}} - \lambda_{\vec{y}})\vec{x}$$

δηλαδή:

$$(\lambda_{\vec{x}} - \lambda_{\vec{y}})\vec{x} = \vec{0}$$

Επειδή το $\vec{x} \neq \vec{0}$, ως ιδιοδιάνυσμα της f, έπεται από την τελευταία σχέση ότι $\lambda_{\vec{x}} - \lambda_{\vec{y}} = 0$, και άρα $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$.

Έτσι δείξαμε ότι σε κάθε περίπτωση: $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y} \implies \lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$. Θέτουμε $\lambda_{\vec{x}} = \lambda = \lambda_{\vec{y}}$ την κοινή αυτή τιμή. Τότε θα έχουμε:

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \quad \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathcal{E}$$

και επειδή $f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda\vec{0}$, έπεται ότι:
$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$
□

Άσκηση 2. *Έστω A ένας $n \times n$-πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των στοιχείων καθεμιάς γραμμής του είναι ίσο με 1.*

(1) *Να δειχθεό ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του A.*
(2) *Αν κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα στήλη του χώρου $\mathbb{K}_n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A, να δειχθεί ότι ο A είναι ο μοναδιαίος πίνακας: $A = I_n$.*

Λύση. Έχουμε:
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
και άρα το 1 είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα τη στήλη:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα στήλη του χώρου $\mathbb{K}_n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A. Τότε από την ’σκηση 1 έχουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$$
Θεωρούμε το διάνυσμα στήλη
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
Τότε:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \implies \lambda = 1$$
Επομένως έχουμε:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$$
και άρα $A = I_n$. □

Άσκηση 3. *Ένας πίνακας $B = (b_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ καλείται δίκαιος αν:*

(a) $b_{ij} > 0,\ \forall i, j = 1, 2, \cdots, n.$
(b) $b_{ij}b_{jk} = b_{ik},\ \forall i, j, k = 1, 2, \cdots, n.$

Για τους δίκαιους πίνακες να δείξετε τα ακόλουθα:

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

είναι δίκαιος.

(2) *Να δειχθεί ότι αν B είναι ένας δίκαιος πίνακας, τότε: $B^2 = nB$.*

(3) *Να δειχθεί ότι κάθε δίκαιος πίνακας είναι όμοιος με τον A.*

(4) *Να δειχθεί ότι κάθε δίκαιος πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και να προσδιορισθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας*

$$P^{-1} \cdot B \cdot P$$

να είναι διαγώνιος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;

Λύση. (1) Ο πίνακας A είναι δίκαιος διότι $\forall i, j, k = 1, 2, \cdots, n$ έχουμε:

$$b_{ij} = 1 > 0 \quad \text{και} \quad b_{ij} \cdot b_{jk} = 1 \cdot 1 = 1 = b_{ik}$$

(2) Έστω B ένας δίκαιος πίνακας. Τότε:

$$(B^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B)_{ik} \cdot (B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ij} = n b_{ij} = n \cdot (B)_{ij} = (nB)_{ij}$$

για κάθε $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Άρα: $B^2 = nB$.

(3) Έστω B ένας δίκαιος πίνακας. Θα δείξουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $C \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε $C^{-1} \cdot B \cdot C = A$. Καταρχήν παρατηρούμε ότι

$$b_{ii} \cdot b_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, \cdots, n \quad \xRightarrow{b_{ij} \neq 0} \quad b_{ii} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

Θεωρούμε το πίνακα C με

$$(C)_{ij} = \delta_{ij} \cdot b_{j1}$$

δηλαδή

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n1} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος με

$$(C)^{-1}_{ij} = \delta_{ij} \cdot b_{1j}$$

διότι

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{1n} \end{pmatrix} = I_n = C^{-1} \cdot C$$

Τότε υπολογίζουμε:

$$(B \cdot C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B)_{ik} \cdot (C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot \delta_{kj} \cdot b_{j1} = b_{ij} \cdot b_{j1} = b_{i1}$$

και

$$(C^{-1} \cdot B \cdot C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (C^{-1})_{ik} \cdot (B \cdot C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \cdot b_{1k} \cdot b_{k1} = b_{1i} \cdot b_{i1} = 1$$

Συνεπώς βρήκαμε αντιστρέψιμο πίνακα C έτσι ώστε

$$C^{-1} \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A$$

και άρα ο δίκαιος πίνακας B είναι όμοιος με τον A.

(4) Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(t) = t^2 - nt$. Τότε από το ερώτημα (2) έχουμε

$$P(B) = B^2 - nB = \mathbb{O}$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(t)$ μηδενίζει το δίκαιο πίνακα B, έπεται ότι το πολυώνυμο $P(t)$ θα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_B(t)$ του B: $Q_B(t)/P(t)$. Επειδή $P(t) = t(t-n)$ το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι ένα εκ των:

$$Q_B(t) = t \quad \text{ή} \quad Q_B(t) = t - n \quad \text{ή} \quad Q_B(t) = t(t-n)$$

Αν το ελάχιστο πολυώνυμο του B είναι το t ή το $t-n$, τότε θα έχουμε αντίστοιχα ότι: $B = \mathbb{O}$ ή $B = nI_n$ το οποίο είναι άτοπο διότι $b_{ij} > 0, \ \ 1 \leq i, j \leq n$. Άρα $Q_B(t) = t(t-n)$ και έτσι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_B(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Επομένως ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος.

Επίσης ο πίνακας A, ως δίκαιος πίνακας, διαγωνοποιείται. Βρίσκουμε τους ιδιοχώρους που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = n$.Έχουμε:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies \cdots \implies \mathcal{V}(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \implies \cdots \implies \mathcal{V}(n) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Συνεπώς υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$Q^{-1} \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} = n \cdot E_{nn}$$

όπου:

$$E_{nn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Έτσι ο πίνακας A είναι όμοιος με τον $n \cdot E_{nn}$. Επειδή ο πίνακας B είναι όμοιος με τον A, έπεται ότι ο B είναι όμοιος με τον $n \cdot E_{nn}$. Λεπτομερέστερα:

$$(C \cdot Q)^{-1} \cdot B \cdot (C \cdot Q) = Q^{-1} \cdot (C^{-1} \cdot B \cdot C) \cdot Q = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} = n \cdot E_{nn}$$

Συνεπώς υπάρχει ο αντιστρέψιμος πίνακας $P = C \cdot Q$ έτσι ώστε ο πίνακας

$$P^{-1} \cdot B \cdot P$$

είναι διαγώνιος, και άρα η διαγώνια μορφή του δίκαιου πίνακα B είναι η

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} = n \cdot E_{nn}$$

□

Άσκηση 4. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\vec{x}\| \ \leq\ \|\vec{x} + \lambda\vec{y}\|, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Λύση. • Έστω $\big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle = 0$. Τότε:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \lambda\vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + 2\lambda \cdot \big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle + \|\lambda\vec{y}\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \\ &\geq \|\vec{x}\|^2 \end{aligned}$$

διότι $\lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Συνεπώς:

$$\|\vec{x} + \lambda\vec{y}\| \geq \|\vec{x}\|$$

• Αντίστροφα έστω ότι $\|\vec{x}\| \ \leq\ \|\vec{x} + \lambda\vec{y}\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \lambda\vec{y}\|^2 \geq \|\vec{x}\|^2 \ &\Longrightarrow\ \|\vec{x}\|^2 + 2\lambda \cdot \big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle + \lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \geq \|\vec{x}\|^2 \\ &\Longrightarrow\ \lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 + 2\lambda \cdot \big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle \ \geq\ 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Αν $\|\vec{y}\| = 0$, τότε $\vec{y} = \vec{0}$, και προφανώς: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.
Υποθέτουμε ότι: $\|\vec{y}\| \neq 0$. Θέτουμε

$$\varphi(\lambda) = \|\vec{y}\|^2\lambda^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$\varphi(\lambda) \ \geq\ 0, \qquad \forall\, \lambda \,\in\, \mathbb{R} \tag{$*$}$$

Υποθέτουμε ότι $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου $\varphi(\lambda)$ ως προς λ είναι:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{και} \qquad \lambda_2 = -\frac{2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$$

οι οποίες είναι διακεκριμμένες: $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$ διότι $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$. Επειδή η διακρίνουσα του $\varphi(\lambda)$ είναι $\Delta = 4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 > 0$, το τριώνυμο $\varphi(\lambda)$ λαμβάνει τιμές αντίθετες του πρόσημου του $\|\vec{y}\|^2 > 0$ στο διάστημα μεταξύ των ριζών του. Άρα:

$$\varphi(\lambda) < 0, \qquad \forall \lambda \in \Big(0,\ -\frac{2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|}\Big), \qquad \text{αν} \qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \ <\ 0$$

και
$$\varphi(\lambda) < 0, \qquad \forall\lambda \in \Big(-\frac{2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\|\vec{y}\|},\ 0\Big), \qquad \text{αν} \quad \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \ > \ 0$$
Άρα επιλέγοντας λ σε ένα από τα παραπάνω διαστήματα, βλέπουμε ότι:
$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \varphi(\lambda) < 0 \tag{$**$}$$
Από τις $(*)$ και $(**)$ βλέπουμε ότι η υπόθεση $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \neq 0$, μας οδηγεί σε άτοπο. Άρα
$$\langle\, \vec{x}, \vec{y}\,\rangle \ = \ 0$$
□

Άσκηση 5. *Έστω $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$, και $c_1, c_2, \cdots, c_n$ πραγματικοί αριθμοί. Αν $c_1, c_2, \cdots, c_n > 0$, να δειχθεί ότι:*
$$\Big|\sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i\Big| \ \le \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i b_i^2}$$

Λύση. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$:
$$\vec{x} = (\sqrt{c_1}a_1, \cdots, \sqrt{c_n}a_n) \quad \text{και} \quad \vec{y} = (\sqrt{c_1}b_1, \cdots, \sqrt{c_n}b_n)$$
Τότε από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz έχουμε:
$$|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad \Longrightarrow \quad \Big|\sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i\Big| \ \le \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i b_i^2}$$

Διαφορετικά: Επειδή $c_1, c_2, \cdots, c_n > 0$, η απεικόνιση
$$\langle\!\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\,\rangle\!\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k c_k y_k$$
είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz για τα διανύσματα
$$\vec{x} = (a_1, \cdots, a_n) \quad \text{και} \quad \vec{y} = (b_1, \cdots, b_n)$$
ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle -, -\,\rangle\!\rangle$, θα έχουμε:
$$|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad \Longrightarrow \quad \Big|\sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i\Big| \ \le \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i b_i^2}$$
□

Άσκηση 6. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος. Να δειχθεί η ισότητα του Απολλώνιου:*
$$\big\|\vec{z} - \vec{x}\big\|^2 + \big\|\vec{z} - \vec{y}\big\|^2 = \frac{1}{2}\big\|\vec{x} - \vec{y}\big\|^2 + 2\big\|\vec{z} - \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})\big\|^2$$
$\forall \vec{z}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$.

Λύση. Έχουμε:
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big\|\vec{x} - \vec{y}\big\|^2 + 2\big\|\vec{z} - \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})\big\|^2 \ &= \ \frac{1}{2}\big\|\vec{x} - \vec{y}\big\|^2 + 2\big\|\vec{z}\big\|^2 - 2\big\langle \vec{z}, \vec{x} + \vec{y}\big\rangle + \frac{1}{2}\big\|\vec{x} + \vec{y}\big\|^2 \\
&= \ \frac{1}{2}\big\|\vec{x}\big\|^2 - \big\langle \vec{x}, \vec{y}\big\rangle + \frac{1}{2}\big\|\vec{y}\big\|^2 + 2\big\|\vec{z}\big\|^2 - 2\big\langle \vec{z}, \vec{x}\big\rangle - 2\big\langle \vec{z}, \vec{y}\big\rangle \\
&+ \ \frac{1}{2}\big\|\vec{x}\big\|^2 + \big\langle \vec{x}, \vec{y}\big\rangle + \frac{1}{2}\big\|\vec{y}\big\|^2 \\
&= \ \big(\big\|\vec{z}\big\|^2 - 2\big\langle \vec{z}, \vec{x}\big\rangle + \big\|\vec{x}\big\|^2\big) + \big(\big\|\vec{z}\big\|^2 - 2\big\langle \vec{z}, \vec{y}\big\rangle + \big\|\vec{y}\big\|^2\big) \\
&= \ \big\|\vec{z} - \vec{x}\big\|^2 + \big\|\vec{z} - \vec{y}\big\|^2
\end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 7. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος. Να δείξετε ότι για κάθε ενδομορφισμό $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, υπάρχουν ενδομορφισμοί $g, h\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$f = g + h, \quad \textit{όπου:} \quad g^* = g \quad \textit{και} \quad h^* = -h$$

Επιπλέον αν $g', h' : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ενδομορφισμοί, έτσι ώστε $f = g' + h'$, όπου: $(g')^* = g'$ και $(h')^* = -h'$, τότε $g = g'$ και $h = h'$.

Λύση. Θεωρούμε τους ενδομορφισμούς

$$g = \frac{f + f^*}{2} \quad \text{και} \quad h = \frac{f - f^*}{2}$$

Τότε

$$g + h = \frac{f + f^*}{2} + \frac{f - f^*}{2} = f$$

Επιπλέον:

$$g^* = \left(\frac{f + f^*}{2}\right)^* = \frac{1}{2}\left(f^* + (f^*)^*\right) = \frac{1}{2}\left(f^* + f\right) = \frac{f + f^*}{2} = g$$

$$h^* = \left(\frac{f - f^*}{2}\right)^* = \frac{1}{2}\left(f^* - (f^*)^*\right) = \frac{1}{2}\left(f^* - f\right) = \frac{f^* - f}{2} = -h$$

Υποθέτουμε ότι $f = g' + h'$, όπου: $(g')^* = g'$ και $(h')^* = -h'$. Τότε:

$$f = g + h = g' + h' \implies g - g' = h - h' \tag{$\dagger$}$$

και άρα:

$$(g - g')^* = (h - h')^*$$

Επειδή:

$$\begin{cases} (g - g')^* = g^* - (g')^* = g - g' \implies (g - g')^* = g - g' \\ (h - h')^* = h^* - (h')^* = -h + h' = -(h - h') \implies (h - h')^* = -(h - h') \end{cases}$$

θα έχουμε:

$$g - g' = -(h - h') \tag{$\dagger\dagger$}$$

Από τις $(\dagger)$ και $(\dagger\dagger)$ έπεται ότι:

$$2(g - g') = 0 = 2(h - h') \implies \begin{cases} g = g' \\ h = h' \end{cases}$$

$\square$

Άσκηση 8. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι αν ο f ικανοποιεί δύο από τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:*

(1) *ο f είναι αυτοπροσαρτημένος.*
(2) *ο f είναι ισομετρία.*
(3) *$f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.*

τότε ικανοποιεί και την τρίτη. Τι μορφή έχει ο ενδομορφισμός f αν ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες;

Λύση. • $\underline{(1) + (3) \implies (2)}$: Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε:

$$\begin{aligned} \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\big\rangle &= \big\langle \vec{x}, f^*(f(\vec{y}))\big\rangle \\ & \qquad\qquad\qquad (f = f^*) \\ &= \big\langle \vec{x}, f(f(\vec{y}))\big\rangle \\ &= \big\langle \vec{x}, f^2(\vec{y}))\big\rangle \\ & \qquad\qquad\qquad (f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}) \\ &= \big\langle \vec{x}, \vec{y}\big\rangle \end{aligned}$$

και άρα ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία.

• $\underline{(2) + (3) \implies (1)}$: Επειδή $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ έπεται ότι ο f είναι ισομορφισμός με

$$f^{-1} = f \tag{1}$$

Επίσης, επειδή ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία έχουμε

$$\begin{aligned} \big\langle \vec{x}, \vec{y}\big\rangle = \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\big\rangle = \big\langle \vec{x}, f^*(f(\vec{y}))\big\rangle, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E} \quad &\Longrightarrow \quad f^*(f(\vec{y})) = \vec{y}, \ \ \forall \vec{y} \in \mathcal{E} \\ &\Longrightarrow \quad f^* \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

και άρα ο f είναι ισομορφισμός με

$$f^{-1} = f^* \tag{2}$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $f^* = f$, δηλαδή ο ενδομορφισμνός f είναι αυτοπροσαρτημένος.

• $\underline{(1) + (2) \implies (3)}$: Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Επειδή ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος, θα έχουμε:

$$\big\langle f^2(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle = \big\langle f(f(\vec{x})), \vec{x}\big\rangle = \big\langle f(\vec{x}), f^*(\vec{x})\big\rangle = \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle = \big\langle \vec{x}, \vec{x}\big\rangle \tag{3}$$

και επειδή ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία, θα έχουμε:

$$\big\langle f^2(\vec{x}), f^2(\vec{x})\big\rangle = \big\langle f(f(\vec{x})), f(f(\vec{x}))\big\rangle = \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle = \big\langle \vec{x}, \vec{x}\big\rangle \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι

$$\big\langle f^2(\vec{x}) - \vec{x}, f^2(\vec{x}) - \vec{x}\big\rangle = \big\langle f^2(\vec{x}), f^2(\vec{x})\big\rangle - \big\langle f^2(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle - \big\langle \vec{x}, f^2(\vec{x})\big\rangle + \big\langle \vec{x}, \vec{x}\big\rangle = 0$$

και άρα $f^2(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Επομένως: $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

Υποθέτουμε ότι ο ενδομορφισμός f ικανοποιεί τις ιδιότητες (1), (2) και (3). Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$. Τότε

$$P(f) = f^2 - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = 0$$

και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ της f διαιρεί το $P(t)$: $Q_f(t)/P(t)$. Επομένως:

$$Q_f(t) = t - 1 \quad \text{ή} \quad Q_f(t) = t + 1 \quad \text{ή} \quad Q_f(t) = t^2 - 1$$

Αν

$$Q_f(t) = t - 1 \quad \Longrightarrow \quad f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

ή αν

$$Q_f(t) = t + 1 \quad \Longrightarrow \quad f = -\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

Τέλος, αν $Q_f(t) = t^2 - 1$ τότε, επειδή ο f είναι αυτοπροσαρτημένος, από το Φασματικό Θεώρημα, υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε ο πίνακας της f στη βάση $\mathcal{B}$ να είναι ο εξής:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$ □

Άσκηση 9. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος. Αν $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, για τον οποίο ισχύει ότι:*

$$f \circ f^* = f^* \circ f$$

να δειχθεί ότι:

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^*) \quad \textit{και} \quad \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^*)$$
$$\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \quad \textit{και} \quad \operatorname{Ker}(f) \perp \operatorname{Im}(f)$$

Λύση. Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$. Τότε:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = \vec{0} \quad &\Longrightarrow \quad f^*(f(\vec{x})) = \vec{0} \\ &\Longrightarrow \quad (f^* \circ f)(\vec{x}) = \vec{0} \\ &\Longrightarrow \quad (f \circ f^*)(\vec{x}) = \vec{0} \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle (f \circ f^*)(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle f(f^*(\vec{x})), \vec{x} \big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{x}) \big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\| f^*(\vec{x}) \big\|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad f^*(\vec{x}) = \vec{0} \end{aligned}$$

και άρα $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f^*)$. Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f^*)$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των f και f^* και χρησιμοποιώντας ότι $f^{**} = f$, έπεται ότι $\operatorname{Ker}(f^*) \subseteq \operatorname{Ker}(f^{**}) = \operatorname{Ker}(f)$. Επομένως

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^*)$$

Χρησιμοποιώντας ότι $\operatorname{Ker}(f^*)^{\perp} = \operatorname{Im}(f)$ και $\operatorname{Ker}(f)^{\perp} = \operatorname{Im}(f)$, βλέπε την Άσκηση **18** του Φυλλαδίου Ασκήσεων **7**, θα έχουμε:

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^*)$$

Τέλος, επειδή πάντα έχουμε: $\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$, από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \quad \text{και} \quad \operatorname{Ker}(f) \perp \operatorname{Im}(f)$$ □

Άσκηση 10. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας. Αν $A^2 = A$, να δειχθεί ότι:*

(1) *Οι ιδιοτιμές του A είναι 0 ή 1.*
(2) *Η βαθμίδα $\mathbf{r}(A)$ του A είναι ίση με το ίχνος $\mathsf{Tr}(A)$ του A.*

(3) *Πότε ο A είναι θετικός;*

Λύση. (1) Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} $$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Τότε:

$$ ({}^tP \cdot A \cdot P)^2 = {}^tP \cdot A^2 \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} $$

και επειδή $A^2 = A$ έπεται ότι

$$ \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \lambda_i^2 = \lambda_i \implies \lambda_i(\lambda_i - 1) = 0, \quad 1 \leq i \leq n $$

Επομένως: $\lambda_i = 0$ ή $\lambda_i = 1$ και άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι 0 ή 1.

(2) Έστω ότι η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = m$. Από το Φασματικό Θεώρημα, υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} $$

όπου το πλήθος των 1 στην κύρια διαγώνιο είναι ίσο με την πολλαπλότητα της $\lambda = 1$ ως ιδιοτιμής του A. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια βαθμίδα, και επειδή η βαθμίδα του πίνακα στα δεξιά της παραπάνω σχέσης είναι προφανώς ίση με m, έπεται ότι $\mathbf{r}(A) = m =$ πολλαπλότητα της $\lambda = 1$ ως ιδιοτιμής του A. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος και επειδή το ίχνος του πίνακα στα δεξιά της παραπάνω σχέσης είναι ίσο με m, έπεται ότι:

$$ \mathsf{Tr}(A) = \mathsf{Tr}({}^tP \cdot A \cdot P) = \mathsf{Tr} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 + \cdots + 1 = m = \mathbf{r}(A) $$

και άρα η βαθμίδα $\mathbf{r}(A)$ του A είναι ίση με το ίχνος $\mathsf{Tr}(A)$ του A.

(3) Ο πίνακας A είναι θετικός αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές, δηλαδή στη περίπτωση μας ίσες με 1. Αυτό σημαίνει ότι ο A όμοιος με τον μοναδιαίο πίνακα I_n. Τότε προφανώς $A = I_n$. □

Άσκηση 11. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας. Αν $A^3 = A^2$, να δειχθεί ότι:*

$$ A^2 = A $$

Λύση. Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, γνωρίζουμε από το Φασματικό Θεώρημα ότι υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} $$

όπου λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Τότε:

$$^tP \cdot A^3 \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^3 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad ^tP \cdot A^2 \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

Επειδή $A^3 = A^2$, θα έχουμε:

$$A^3 = A^2 \implies {}^tP \cdot A^3 \cdot P = {}^tP \cdot A^2 \cdot P \implies \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

και άρα $\lambda_i^3 = \lambda_i^2$, δηλαδή ισοδύναμα $\lambda_i(\lambda_i^2 - \lambda_i) = 0$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Αν $\lambda_i = 0$ για κάθε $i = 1, \cdots, n$ τότε $A = 0$ και άρα το ζητούμενο ισχύει. Διαφορετικά αν κάποια από τα $\lambda_i \neq 0$ τότε έχουμε $\lambda_i^2 = \lambda_i$. Επομένως:

$$^tP \cdot A \cdot P = {}^tP \cdot A^2 \cdot P \quad \implies \quad A = A^2$$

<u>Διαφορετικά:</u> Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^3 - t^2$. Τότε $Q(A) = A^3 - A^2 = \mathbb{O}$. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι διαιρέτης του $Q(t) = t^3 - t^2 = t^2(t-1)$, και άρα:

$$Q_A(t) = t \quad \text{ή} \quad Q_A(t) = t^2 \quad \text{ή} \quad Q_A(t) = t-1 \quad \text{ή} \quad Q_A(t) = t(t-1) \quad \text{ή} \quad Q_A(t) = t^2(t-1)$$

Επειδή ο A είναι συμμετρικός από το Φασματικό Θεώρημα, ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο έχει διακεκριμένους παράγοντες. Επομένως:

$$Q_A(t) = t \quad \text{ή} \quad Q_A(t) = t-1 \quad \text{ή} \quad Q_A(t) = t(t-1)$$

Αν $Q_A(t) = t$, τότε $A = \mathbb{O}$. Αν $Q_A(t) = t-1$, τότε $A = I_n$. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε προφανώς ότι: $A^2 = A$. Τέλος αν $Q_A(t) = t(t-1) = t^2 - t$, τότε $A^2 = A$. □

Άσκηση 12. *Έστω ο πίνακας πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ και $n\mathbb{N}$.

(1) *Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $^tP \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος.*
(2) *Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας A είναι θετικός, και για τις τιμές αυτές του a να βρεθεί μια n-οστή ρίζα του πίνακα A.*
(3) *Να βρεθεί η n-οστή δύναμη του A.*

Λύση. (1) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} 1-t & a/n \\ a/n & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 1 - \frac{a^2}{n^2} = \left(t - \left(1 - \frac{a}{n}\right)\right)\left(t - \left(1 + \frac{a}{n}\right)\right)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\lambda_1 = 1 - \frac{a}{n} \qquad \text{και} \qquad \lambda_2 = 1 + \frac{a}{n}$$

• Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}_A\left(1 - \frac{a}{n}\right)$, θα έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} a/n & a/n \\ a/n & a/n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \implies \quad \frac{a}{n}(x+y) = 0 \quad \implies \quad y = -x$$

Άρα:

$$\mathcal{V}_A\left(1 - \frac{a}{n}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

Τότε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_A\left(1 - \frac{a}{n}\right)$ και το διάνυσμα

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A\left(1 - \frac{a}{n}\right)$.

• Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}_A\left(1 + \frac{a}{n}\right)$, θα έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -a/n & a/n \\ a/n & -a/n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{n}(-x+y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

Άρα:

$$\mathcal{V}_A\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

Τότε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_A\left(1 + \frac{a}{n}\right)$ και το διάνυσμα

$$\left\{ F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A\left(1\frac{a}{n}\right)$.

Θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} F_1 \; F_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{n} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{a}{n} \end{pmatrix}$$

(2) Ο πίνακας A είναι θετικός αν και μόνον αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικές:

$$A > O \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{a}{n},\ 1 + \frac{a}{n} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -n < a < n$$

Υποθέτουμε ότι $a \in (-n, n)$, και επομένως ο πίνακας A είναι θετικός. Θα έχουμε

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{n} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{a}{n} \end{pmatrix} \cdot {}^tP = P \cdot \begin{pmatrix} \frac{n-a}{n} & 0 \\ 0 & \frac{n+a}{n} \end{pmatrix} \cdot {}^tP = P \cdot \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-a & 0 \\ 0 & n+a \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Επομένως μια n-οστή ρίζα του A είναι ο πίνακας

$$\sqrt[n]{A} = P \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \begin{pmatrix} \sqrt[n]{n-a} & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{n+a} \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} \begin{pmatrix} \sqrt[n]{n+a} + \sqrt[n]{n-a} & \sqrt[n]{n+a} - \sqrt[n]{n-a} \\ \sqrt[n]{n+a} - \sqrt[n]{n-a} & \sqrt[n]{n+a} + \sqrt[n]{n-a} \end{pmatrix}$$

(3) Επειδή όπως δείξαμε παραπάνω

$$A = P \cdot \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-a & 0 \\ 0 & n+a \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

θα έχουμε:

$$A^n = P \cdot \frac{1}{n^n} \begin{pmatrix} n-a & 0 \\ 0 & n+a \end{pmatrix}^n \cdot {}^tP = \frac{1}{n^n} P \cdot \begin{pmatrix} (n-a)^n & 0 \\ 0 & (n+a)^n \end{pmatrix} \cdot {}^tP =$$

$$= \frac{1}{n^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (n-a)^n & 0 \\ 0 & (n+a)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2n^n} =$$

$$= \frac{1}{2n^n} \begin{pmatrix} (n+a)^n + (n-a)^n & (n+a)^n - (n-a)^n \\ (n+a)^n - (n-a)^n & (n+a)^n + (n-a)^n \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 13. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω*

$$f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f^* = \lambda f$$

Να δειχθεί ότι είτε ο f είναι αυτοπροσαρτημένος ($f^* = f$) είτε ο f είναι αντισυμμετρικός ($f^* = -f$).

Λύση. Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{x})\rangle = \langle \vec{x}, (\lambda f)(\vec{x})\rangle = \langle \vec{x}, \lambda f(\vec{x})\rangle = \lambda\langle \vec{x}, f(\vec{x})\rangle = \lambda\langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle$$

Επομένως:

$$(\lambda - 1)\langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle = 0 \end{cases}$$

Αν $\lambda = 1$, τότε θα έχουμε $f^* = f$ και ο f είναι αυτοπροσαρτημένος. Αν $\lambda \neq 1$, τότε θα έχουμε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $\langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle = 0$. Γνωρίζουμε από παλαιότερη Άσκηση ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι ο f είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή $f^* = -f$. □

Άσκηση 14. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω*

$$f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, έτσι ώστε:

$$f^* = \lambda f$$

όπου $\lambda \neq 0$.

(1) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \quad \textit{και} \quad \mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$$

(2)

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \quad \textit{και} \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$$

(3) *Αν $\lambda = -1$, να δειχθεί ότι η βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ του f είναι άρτιος αριθμός:*

$$\mathbf{r}(f) : \ \textit{άρτιος}$$

(4) *Να δειχθεί ότι η βαθμίδα κάθε αντισυμμετρικού πίνακα πραγματικών αριθμών είναι άρτιος αριθμός.*

Λύση. (1) Έστω $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)^\perp$. Τότε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$ θα έχουμε:

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \lambda f(\vec{y})\rangle = \lambda\langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle f(\vec{y}), \vec{x}\,\rangle = 0, \ \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \langle f(\vec{y}), f(\vec{y})\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \|f(\vec{y})\|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{y}) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{y} \in \mathrm{Ker}(f)$$

Άρα

$$\mathrm{Im}(f)^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(f) \tag{1}$$

Από την εξίσωση διαστάσεων, θα έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ και άρα:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - \mathbf{r}(f) \tag{2}$$

Επειδή

$$\mathcal{E} = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)^\perp, \quad \text{θα έχουμε} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f)^\perp = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - \mathbf{r}(f) \tag{3}$$

Από τις σχέσεις (1), (2), και (3), έπεται ότι:

$$\mathrm{Im}(f)^\perp \ = \ \mathrm{Ker}(f)$$

και επομένως από την (1) και την (3) θα έχουμε:

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \quad \text{και} \quad \mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$$

(2) Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathrm{Im}(f^2) \subseteq \mathrm{Im}(f) \quad \text{και} \quad \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2)$$

Αν $f^2(\vec{x}) = \vec{0}$, τότε $f(f(\vec{x})) = \vec{0}$ και επομένως $f(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Άρα $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Αυτό δείχνει ότι $\mathrm{Ker}(f^2) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ και άρα

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$$

Από την άλλη πλευρά, επειδή όπως μπορούμε να δούμε εύκολα: $(f^2)^* = \lambda^2 f^2$, από το μέρος (1) της Άσκησης θα έχουμε:

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2) \quad \text{και} \quad \mathrm{Ker}(f^2) \perp \mathrm{Im}(f^2)$$

και επομένως

$$\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Ker}(f^2)^{\perp} = \mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$$

Ιδιαίτερα θα έχουμε: $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^2)$.

(3) Επειδή $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$, μπορούμε να ορίσουμε έναν ενδομορφισμό

$$g\colon \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f), \quad g(\vec{y}) = f(y)$$

ο οποίος είναι ισομορφισμός διότι αν $\vec{y} \in \mathrm{Ker}(g)$, τότε $g(\vec{y}) = f(\vec{y}) = \vec{0}$ και άρα $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Άρα ο g είναι μονομορφισμός και άρα ισομορφισμός διότι ο χώρος $\mathrm{Im}(f)$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Όμως ο ενδομορφισμός g προφανώς είναι αντισυμμετρικός διότι $g = f|_{\mathrm{Im}(f)}$ και ο f είναι αντισυμμετρικός. Άρα ${}^t g = -g$ και επομένως θεωρώντας ορίζουσες θα έχουμε $\mathsf{Det}(g) \neq 0$ διότι ο g είναι αντιστρέψιμος, και:

$$\mathsf{Det}(g) = \mathsf{Det}({}^t g) = \mathsf{Det}(-g) = (-1)^{\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f)} \mathsf{Det}(g) = (-1)^{\mathbf{r}(f)} \mathsf{Det}(g) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (-1)^{\mathbf{r}(f)} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{r}(f): \text{ άρτιος}$$

(4) Αν A είναι ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών, τότε ο ενδομορφισμός

$$f_A\colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

είναι αντισυμμετρικός. Επειδή $\mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(A)$, ο ισχυρισμός προκύπτει από το μέρος (3). □

Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ είναι ένας πίνακας μιγαδικών αριθμών, τότε ορίζουμε τον πίνακα:

$$A^* := \overline{{}^t A}$$

δηλαδή αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \text{τότε} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A^* καλείται ο **συζυγής ανάστροφος** του A. Παρατηρούμε ότι: $A^* = \overline{{}^t A} = {}^t\overline{A}$.

Η παρακάτω άσκηση περιγράφει τις κυριότερες ιδιότητες του ανάστροφου συζυγή ενός πίνακα μιγαδικών αριθμών.

Άσκηση 15. $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$, *τότε:*

(1) $(A^*)^* = A$.
(2) $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.
(3) $(\mu \cdot A)^* = \overline{\mu} \cdot A^*$.
(4) *Αν* $Z \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, *τότε* $Z^* \cdot Z \in \mathbb{R}$ *και* $Z^* \cdot Z = 0$ *αν και μόνον αν* $Z = \mathbb{O}$.
(5) *Αν* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$, *τότε* $A^* = {}^t A$.

Λύση. (1) Θα έχουμε, $\forall 1 \leq i, j \leq n$:

$$[(A^*)^*]_{ij} = \overline{(A^*)_{ji}} = \overline{\overline{(A)_{ij}}} = (A)_{ij}$$

Άρα: $(A^*)^* = A$.

(2) Θα έχουμε, $\forall 1 \leq i, j \leq n$:

$$[(A \cdot B)^*]_{ij} = \overline{(A \cdot B)_{ji}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} (A)_{jk}(B)_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{(A)_{jk}}\,\overline{(B)_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{(B)_{ki}}\,\overline{(A)_{jk}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (B^*)_{ik}(A^*)_{kj} = (B^* \cdot A^*)_{ij}$$

Άρα: $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

(3) Θα έχουμε, $\forall 1 \leq i, j \leq n$:

$$[(\mu \cdot A)^*]_{ij} = \overline{(\mu A)_{ji}} = \overline{\mu}\,\overline{(A)_{ji}} = \overline{\mu}(A^*)_{ij} = [\overline{\mu} \cdot A^*]_{ij}$$

Άρα: $(\mu \cdot A)^* = \overline{\mu} \cdot A^*$.

(4) Έστω

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 + i\lambda_1 \\ \kappa_2 + i\lambda_2 \\ \vdots \\ \kappa_n + i\lambda_n \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$Z^* = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} & \cdots & \overline{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 - i\lambda_1 & \kappa_2 - i\lambda_2 & \cdots & \kappa_n - i\lambda_n \end{pmatrix}$$

Άρα:

$$Z^* \cdot Z = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} & \cdots & \overline{z_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \overline{z_1}z_1 + \overline{z_2}z_2 + \cdots + \overline{z_n}z_n = \sum_{j=1}^{n} (\kappa_j^2 + \lambda_j^2) \ \in \ \mathbb{R}$$

είναι ένας πραγματικός αριθμός και προφανώς: $Z^* \cdot Z \geq 0$. Τέλος $Z^* \cdot Z = 0$ αν και μόνον αν $\sum_{j=1}^{n} (\kappa_j^2 + \lambda_j^2) = 0$ αν και μόνον αν $\kappa_j = 0 = \lambda_j$, $1 \leq j \leq n$, αν και μόνον αν $Z = \mathbb{O}$.

(5) Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$, τότε, $\forall 1 \leq i, j \leq n$:

$$(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}} = (A)_{ji} \qquad \Longrightarrow \qquad A^* = {}^tA$$

□

Άσκηση 16. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας, δηλαδή: ${}^tA = -A$.*

(1) *Να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές του A (στο $\mathbb{C}$) είναι της μορφής: λi, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(2) *Να δείξετε ότι οι πίνακες $I_n + A$ και $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμοι.*
(3) *Να δείξετε ότι ο πίνακας $(A + I_n) \cdot (A - I_n)^{-1}$ είναι ορθογώνιος.*

Λύση. (1) Έστω $\mu = \kappa + \lambda i \in \mathbb{C}$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ μια ιδιοτιμή του πίνακα A στο $\mathbb{C}$, με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $Z \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Τότε θα έχουμε:

$$A \cdot Z = \mu \cdot Z$$

και επομένως:

$$Z^* \cdot A \cdot Z = Z^* \cdot \mu \cdot Z = \mu \cdot (Z^* \cdot Z) \tag{1}$$

Επειδή ο A είναι πίνακας πραγματικών αριθμών και αντισυμμετρικός, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 12, θα έχουμε:

$$(Z^* \cdot A \cdot Z)^* = Z^* \cdot A^* \cdot (Z^*)^* = Z^* \cdot {}^tA \cdot Z = Z^* \cdot (-A) \cdot Z = -(Z^* \cdot A \cdot Z)$$

και επομένως από τη σχέση (1):

$$(Z^* \cdot A \cdot Z)^* = -(Z^* \cdot (\mu \cdot Z)) = -\mu \cdot (Z^* \cdot Z) \tag{2}$$

Παίρνοντας ανάστροφο συζυγή στην σχέση (1) και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 12, θα έχουμε:

$$(Z^* \cdot A \cdot Z)^* = (\mu \cdot (Z^* \cdot Z))^* = \overline{\mu} \cdot (Z^* \cdot Z)^* = \overline{\mu} \cdot (Z^* \cdot (Z^*)^*) = \overline{\mu} \cdot (Z^* \cdot Z) \tag{3}$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι:

$$\overline{\mu} \cdot (Z^* \cdot Z) = -\mu \cdot (Z^* \cdot Z)$$

Επειδή από την Άσκηση (12) έχουμε ότι $Z^* \cdot Z \in \mathbb{R}$ και $Z^* \cdot Z \neq 0$, διότι το διάνυσμα-στήλη Z είναι μη-μηδενικό ως ιδιοδιάνυσμα του A, έπεται ότι:

$$\overline{\mu} = -\mu$$

Έτσι αν $\mu = \kappa + i\lambda$, θα έχουμε:

$$\overline{\mu} = -\mu \quad \Longrightarrow \quad \kappa - \lambda i = -\kappa - \lambda i \quad \Longrightarrow \quad \kappa = -\kappa \quad \Longrightarrow \quad 2\kappa = 0 \quad \Longrightarrow \quad \kappa = 0$$

Άρα $\mu = \lambda i$ και επομένως η ιδιοτιμή μ είναι καθαρά φανταστικός αριθμός. Συνοψίζουμε:

Οι ιδιοτιμές του A είναι της μορφής: $\lambda i, \ \lambda \in \mathbb{R}$. Ιδιαίτερα η μόνη πραγματική ιδιοτιμή του A είναι η μηδενική.

(2) Υποθέτουμε αντίθετα ότι ο πίνακας $I_n + A$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε:

$$|A + I_n| = 0 \quad \Longrightarrow \quad |A - (-1)I_n| = 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 : \text{ ιδιοτιμή του } A$$

που είναι άτοπο από το ερώτημα (1). Άρα ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος. Παρόμοια, επειδή το 1 δεν είναι ιδιοτιμή του A έπεται ότι πίνακας $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος.

(3) Θα δείξουμε ότι

$$(A + I_n) \cdot (A - I_n)^{-1} \cdot {}^t\big((A + I_n) \cdot (A - I_n)^{-1}\big) = I_n$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
{}^t\big((A + I_n) \cdot (A - I_n)^{-1}\big) &= {}^t\big((A - I_n)^{-1}\big) \cdot {}^t(A + I_n) \\
&= \big({}^t(A - I_n)\big)^{-1} \cdot ({}^tA + I_n) \\
&= ({}^tA - I_n)^{-1} \cdot (-A + I_n) \\
&= (-A - I_n)^{-1} \cdot (-A + I_n) \\
&= -(A + I_n)^{-1} \cdot (-A + I_n) \\
&= (A + I_n)^{-1} \cdot (A - I_n)
\end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
(A + I_n) \cdot (A - I_n)^{-1} \cdot (A + I_n)^{-1} \cdot (A - I_n) &= (A + I_n) \cdot \big((A + I_n) \cdot (A - I_n)\big)^{-1} \cdot (A - I_n) \\
&= (A + I_n) \cdot (A^2 - I_n^2)^{-1} \cdot (A - I_n) \\
&= (A + I_n) \cdot \big((A - I_n) \cdot (A + I_n)\big)^{-1} \cdot (A - I_n) \\
&= (A + I_n) \cdot (A + I_n)^{-1} \cdot (A - I_n)^{-1} \cdot (A - I_n) \\
&= I_n
\end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας $(A + I_n) \cdot (A - I_n)^{-1}$ είναι ορθογώνιος. $\square$