

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 24 Φεβρουαρίου 2023

Άσκηση 1. Να βρεθεί το ηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο $\mathbb{R}[t]$ του πολυωνύμου $A(t) = t^8 - 7t^5 + \frac{3}{5}t + \frac{1}{2}$ με το πολυώνυμο $B(t) = 15t^3 + 6t^2 + 7t + \frac{1}{2}$.

Άσκηση 2. Να γραφούν τα ακόλουθα πολυώνυμα ως γινόμενα αναγώγων πολυωνύμων στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, και $\mathbb{C}[t]$:

$$P(t) = t^4 - 2t^2 + 3t - 2, \quad Q(t) = t^3 + 4t^2 - 4t - 1$$

Άσκηση 3. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

όπου $a_n \neq 0$ και έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ρίζες του $P(t)$ στο \mathbb{C} , οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$P(t) = a_n (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n)$$

Γράφουμε το παραπάνω γινόμενο ως εξής:

$$P(t) = a_n (t^n - s_1 t^{n-1} + s_2 t^{n-2} - \dots + (-1)^n s_n)$$

Να δειχθεί ότι:

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$$

$$s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$$

$$s_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

⋮

$$s_n = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

και επιπλέον:

$$s_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \quad 1 \leq k \leq n$$

• • •

Άσκηση 4. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, 1)$ του \mathbb{R}^3 . Αν $\mathcal{V} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, να βρεθεί υπόχωρος \mathcal{W} του \mathbb{R}^3 έτσι ώστε

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

Άσκηση 5. Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \left\{ \begin{pmatrix} t & 2t \\ -t & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathcal{V} &= \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ t-3s & -s \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathcal{W} &= \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & r \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid t-2s+r=0 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

- (1) Να δείχθει ότι τα υποσύνολα \mathcal{U} , \mathcal{V} και \mathcal{W} είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$ και να βρεθεί η διάστασή τους.
- (2) Να εξετασθεί αν το άθροισμα $\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}$ είναι ευθύ.
- (3) Να δείχθει ότι

$$M_2(\mathbb{R}) = \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} + \mathcal{W})$$

Άσκηση 6. Έστω ο \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος $M_n(\mathbb{K})$ και η γραμμική απεικόνιση

$$g: M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad g(A) = \frac{{}^t A + A}{2}$$

Να δείχθει ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του $M_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\frac{n^2+n}{2}$.

Άσκηση 7. Έστω \mathcal{U} και \mathcal{V} δύο υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + 1$$

Να δείχθει ότι:

$$\text{είτε } \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{U} \text{ και } \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{V} \quad \text{είτε } \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V} \text{ και } \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}$$

Άσκηση 8. Γνωρίζοντας ότι ο \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος $M_n(\mathbb{K})$ είναι το ευθύ άθροισμα:

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

όπου $S_n(\mathbb{K})$ είναι ο υπόχωρος των συμμετρικών πινάκων και $A_n(\mathbb{K})$ είναι υπόχωρος των αντισυμμετρικών πινάκων, να γραφεί (μοναδικά) ο $n \times n$ πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ως άθροισμα ενός συμμετρικού πίνακα και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Άσκηση 9. Στον διανυσματικό χώρο $M_n(\mathbb{K})$ θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα :

$$\mathcal{V} = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \dots, n, j \leq i\}$$

$$\mathcal{W} = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \dots, n, i \leq j\}$$

$$\mathcal{Z} = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j\}$$

Να δείξετε ότι τα υποσύνολα $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ είναι υπόχωροι του $M_n(\mathbb{K})$ και ακολουθώς να δείξετε ότι:

$$M_n(\mathbb{K}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}$$

Άσκηση 10. Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$$

Να δείξετε ότι $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

Άσκηση 11. Θεωρούμε τους ακόλουθους υποχώρους του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{W}_1 = \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{W}_2 = \{(0, 0, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{W}_3 = \{(d, 0, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d \in \mathbb{R}\}$$

να εξετασθεί αν ισχύει ότι: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$.

Αν $\mathbb{R}^3 \neq \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, να βρεθούν υπόχωροι $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ του \mathbb{R}^3 έτσι ώστε:

$$\mathbb{R}^3 = (\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) \oplus \mathcal{U}_1 = (\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_3) \oplus \mathcal{U}_2 = (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) \oplus \mathcal{U}_3$$

Άσκηση 12. Θεωρούμε τις ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις $f_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, 1 \leq i \leq 4$:

$$f_1(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$$

$$f_2(x, y, z) = (x - y, y - z, 0)$$

$$f_3(x, y, z) = (-y, x, z)$$

$$f_4(x, y, z) = (x, y, y)$$

Να δείξετε ότι:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Im}(f_i) \oplus \text{Ker}(f_i)$$

Άσκηση 13. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω από το σώμα \mathbb{K} με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, και $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση.

(1) Αν $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f^2)$, τότε: $\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

(2) Αν $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f^2)$, τότε: $\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Άσκηση 14. Έστω ότι $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ και $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Συμβολίζουμε με $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$ και $\mathbf{r}(g) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(g)$ τη βαθμίδα των f και g αντίστοιχα.

(1) Να δείξετε ότι $\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f)$ αν και μόνο αν $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$.

(2) Να δείξετε ότι $\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(g)$ αν και μόνο αν $\text{Im}(f) + \text{Ker}(g) = \mathcal{F}$.

(3) Να δείξετε ότι $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(g)$ αν και μόνο αν $\mathcal{F} = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(g)$.

Άσκηση 15. Αν $f_i: \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq n$, είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε ορίζουμε

$$f: \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \cdots \times \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots \times \mathcal{F}_n, \quad f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = ((f_1(\vec{x}_1), f_2(\vec{x}_2), \dots, f_n(\vec{x}_n)))$$

- (1) Ναδειχθεί ότι η f είναι μια γραμμική απεικόνιση¹.
- (2) Ναδειχθεί ότι η f είναι μονομορφισμός, επιμορφισμός ή ισομορφισμός αντίστοιχα, αν και μόνον αν κάθε f_i , $1 \leq i \leq n$, είναι μονομορφισμός, επιμορφισμός ή ισομορφισμός αντίστοιχα.
- (3) Να προσδιορισθεί ο πυρήνας $\text{Ker}(f)$ και η εικόνα $\text{Im}(f)$ συναρτήσει των πυρήνων $\text{Ker}(f_i)$ και των εικόνων $\text{Im}(f_i)$ των f_i , $1 \leq i \leq n$.
- (4) Αν \mathcal{B}_i και \mathcal{C}_i είναι βάσεις των \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων \mathcal{E}_i και \mathcal{F}_i αντίστοιχα, $1 \leq i \leq n$, ναδειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ και το σύνολο $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ είναι μια βάση του $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots \times \mathcal{F}_n$.
- (5) Να προσδιορισθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f συναρτήσει των πινάκων $M_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{C}_i}(f_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Άσκηση 16. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Συμβολίζουμε με $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k -φορές) την σύνθεση της f με τον εαυτό της k -φορές, όπου $k \geq 1$.

- (1) Να δείξετε ότι υπάρχει μια (αύξουσα) ακολουθία υποχώρων του \mathcal{E} :

$$\{\vec{0}\} \subseteq \text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f^2) \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker}(f^k) \subseteq \text{Ker}(f^{k+1}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}$$

για την οποία υπάρχει $\kappa \geq 0$ έτσι ώστε: $\text{Ker}(f^\kappa) = \text{Ker}(f^{\kappa+1}) = \text{Ker}(f^{\kappa+2}) = \cdots$.

- (2) Να δείξετε ότι υπάρχει μια (φθίνουσα) ακολουθία υποχώρων του \mathcal{E} :

$$\{\vec{0}\} \subseteq \cdots \subseteq \text{Im}(f^{\lambda+1}) \subseteq \text{Im}(f^\lambda) \subseteq \cdots \subseteq \text{Im}(f^2) \subseteq \text{Im}(f) \subseteq \mathcal{E}$$

για την οποία υπάρχει $\lambda \geq 0$ έτσι ώστε: $\text{Im}(f^\lambda) = \text{Im}(f^{\lambda+1}) = \text{Im}(f^{\lambda+2}) = \cdots$.

Άσκηση 17. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Συμβολίζουμε με $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k -φορές) την σύνθεση της f με τον εαυτό της k -φορές, όπου $k \geq 1$.

Ναδειχθεί ότι υπάρχει $m \geq 1$ έτσι ώστε:

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f^m) \oplus \text{Im}(f^m)$$

Υπόδειξη: Θέτουμε $m = \max\{\kappa, \lambda\}$, όπου τα κ και λ είναι όπως στο (1) και (2) της Άσκησης 16 αντίστοιχα.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , τότε ένας υπόχωρος \mathcal{V} του \mathcal{E} καλείται **f -αναλλοίωτος**, αν: $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$. Αν ο υπόχωρος \mathcal{V} είναι f -αναλλοίωτος, τότε ορίζοντας

$$f_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad f_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

αποκτούμε έναν ενδομορφισμό του \mathcal{V} , ο οποίος καλείται ο επαγόμενος από τον f ενδομορφισμός του \mathcal{V} .

Άσκηση 18. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$.

Έστω ότι $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, για κάποιους υπόχωρους \mathcal{U} και \mathcal{V} , και υποθέτουμε ότι οι υπόχωροι \mathcal{U} και \mathcal{V} είναι f -αναλλοίωτοι. Ναδειχθεί ότι υπάρχει βάση \mathcal{B} του \mathcal{E} έτσι ώστε ο πίνακας του f στην \mathcal{B} να είναι της μορφής:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & O \\ O' & B \end{pmatrix}$$

όπου:

- (1) O, O' είναι οι μηδενικοί πίνακες κατάλληλων μεγεθών.
- (2) $A = M_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}}^{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}}(f_{\mathcal{U}})$ είναι ο πίνακας του επαγόμενου ενδομορφισμού $f_{\mathcal{U}}$ σε κατάλληλη βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ του \mathcal{U} .
- (3) $B = M_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}^{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}(f_{\mathcal{V}})$ είναι ο πίνακας του επαγόμενου ενδομορφισμού $f_{\mathcal{V}}$ σε κατάλληλη βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ του \mathcal{V} .

¹Η γραμμική απεικόνιση f καλείται η απεικόνιση **ευθύ γινόμενο** των f_1, f_2, \dots, f_n , και συμβολίζεται με $f = f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ενδομορφισμός $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται **μηδενοδύναμος**, αν υπάρχει θετικός ακέραιος k έτσι ώστε $f^k = 0$. Παρόμοια ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται **μηδενοδύναμος**, αν υπάρχει θετικός ακέραιος k έτσι ώστε $A^k = 0$.

Άσκηση 19. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Συμβολίζουμε με $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k -φορές) την σύνθεση της f με τον εαυτό της k -φορές, όπου $k \geq 1$. Έστω

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f^m) \oplus \text{Im}(f^m)$$

για κάποιο $m \geq 1$, όπως στην Άσκηση 17.

(1) Ναδειχθεί ότι οι υπόχωροι

$$\mathcal{U} = \text{Ker}(f^m) \quad \text{και} \quad \mathcal{V} = \text{Im}(f^m)$$

είναι f -αναλλοίωτοι, και άρα ορίζονται οι επαγόμενοι από τον f ενδομορφισμοί:

$$f_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \quad \text{και} \quad f_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

(2) Ναδειχθεί ότι ο $f_{\mathcal{U}}$ είναι μηδενοδύναμος.

(3) Ναδειχθεί ότι ο $f_{\mathcal{V}}$ είναι ισομορφισμός.

(4) Ναδειχθεί ότι υπάρχει βάση \mathcal{B} του \mathcal{E} έτσι ώστε ο πίνακας του f στην \mathcal{B} να είναι της μορφής:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & O \\ O' & C \end{pmatrix}$$

όπου:

(α) O είναι ο μηδενικός $k \times (n - k)$ πίνακας και O' είναι ο μηδενικός $(n - k) \times k$ πίνακας.

(β) A είναι ένας μηδενοδύναμος $k \times k$ πίνακας.

(γ) C είναι ένας αντιστρέψιμος $(n - k) \times (n - k)$ πίνακας.

(δ) $k = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U}$ και $n - k = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.

Άσκηση 20. Ναδειχθεί ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A είναι όμοιος με έναν πίνακα της μορφής:

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O' & C \end{pmatrix}$$

όπου A είναι ένας μηδενοδύναμος πίνακας, C είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, και O, O' είναι οι μηδενικοί πίνακες κατάλληλων μεγεθών.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ενδομορφισμός $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται **προβολή**, αν: $f^2 = f$.

Άσκηση 21. Έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} οι οποίοι είναι προβολές. Ναδειχθεί ότι ο ενδομορφισμός

$$f + g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{y})$$

είναι προβολή αν και μόνον αν ισχύει ότι:

$$f \circ g = 0 = g \circ f \quad (*)$$

Αν ισχύει η συνθήκη (*), τότε:

$$\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g) \quad \text{και} \quad \text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$$

Άσκηση 22. Έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} οι οποίοι είναι προβολές. Ναδειχθεί ότι ο ενδομορφισμός

$$f - g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (f - g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - g(\vec{y})$$

είναι προβολή αν και μόνον αν ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f = g \quad (**)$$

Αν ισχύει η συνθήκη (**), τότε:

$$\text{Im}(f - g) = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) \quad \text{και} \quad \text{Ker}(f - g) = \text{Ker}(f) + \text{Im}(g)$$

Άσκηση 23. Έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} οι οποίοι είναι προβολές. Ναδειχθεί ότι ο ενδομορφισμός

$$f \circ g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$$

είναι προβολή αν και μόνον αν ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f \quad (***)$$

Αν ισχύει η συνθήκη (***), τότε:

$$\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) \quad \text{και} \quad \text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$$