

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 10 Μαρτίου 2023

Άσκηση 1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (y, x + z, y)$$

Άσκηση 2. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοχώροι των πινάκων πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Είναι οι πίνακες A και B διαγωνοποιήσιμοι; Αν ναι, να διαγωνοποιηθούν.

(2) Είναι οι πίνακες A και B όμοιοι; Αν ναι, να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε: $P^{-1}AP = B$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

για τον οποίο υποθέτουμε ότι $a + b = c + d$.

(1) Ναδειχθεί ότι οι αριθμοί $a + b$ και $a - c$ είναι ιδιοδιανύσματα του A .

(2) Πότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος;

(3) Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, να διαγωνοποιηθεί.

Άσκηση 4. Έστω A και B δύο $n \times n$ και πίνακες έτσι ώστε $AB = BA$, και υποθέτουμε ότι ο A έχει n το πλήθος διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ναδειχθεί ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ιδιοδιάνυσμα του B .

Άσκηση 5. Θεωρούμε τον πίνακα (α) πραγματικών, (β) μιγαδικών, αριθμών.

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix}$$

Για ποιές τιμές του α είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 6. Να εξετασθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 7. Να εξετασθούν ως προς τη διαγωνοποίηση οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8. Θεωρούμε τον ακόλουθο 3×3 πίνακα πραγματικών αριθμών:

$$\begin{pmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, να διαγωνοποιηθεί.
- (2) Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A^5 .
- (3) Είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος; Αν ναι, να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A^{-1} .

Άσκηση 9. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} και $c, d \in \mathbb{K}$.

- (1) Αν λ είναι ένα ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $X \in \mathbb{K}^n$, τότε το διάνυσμα X είναι ιδιοδιάνυσμα του $n \times n$ πίνακα $cA + dI_n$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $c\lambda + d$.
- (2) Ναδειχθεί ότι αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε και ο πίνακας $cA + dI_n$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 10. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(t) = (-1)^n (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n) \in \mathbb{K}[t]$$

και τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

ο οποίος καλείται ο **συνοδός πίνακας** του πολυωνύμου $P(t)$. Να δείξετε ότι

$$P_A(t) = |A - tI_n| = (-1)^n (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n)$$

Άσκηση 11. Με τη βοήθεια της Άσκησης 4 να βρείτε το πολυώνυμο $|A - tI_4|$, όπου A είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 12. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του ενδομορφισμού

$$f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -2b + c \\ -5b + 2c & 2d \end{pmatrix}$$

Άσκηση 13. Να εξετασθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο ενδομορφισμός

$$f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{pmatrix}$$

Άσκηση 14. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα ότι $A^2 = -I_n$. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα A και να αποδείξετε ότι ο n δεν μπορεί να είναι περιττός αριθμός.

Άσκηση 15. Αν a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί, να εξετασθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας μιγαδικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Άσκηση 16. Θεωρούμε ένα πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ με θετικές ιδιοτιμές. Να εξετάσετε αν ο πίνακας $A + I$ είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 17. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = {}^t A$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές του f και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων. Είναι ο f διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, να διαγωνοποιηθεί.

Άσκηση 18. Έστω A ένας $n \times n$ -πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των στοιχείων καθεμιάς γραμμής του είναι ίσο με 1.

- (1) Να δείξετε ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του A .
- (2) Αν κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα στήλη του χώρου \mathbb{K}_n είναι ιδιοδιάνυσμα του A , να δείξετε ότι ο A είναι ο μοναδιαίος πίνακας: $A = I_n$.

Άσκηση 19. Αν $n \geq 1$, να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του $n \times n$ -πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 20. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθεί ο πίνακας $A^{2017}(A - 2I_2)^{2018}$.

Άσκηση 21. Να βρεθεί ένας 3×3 -πίνακας A για τον οποίο τα διανύσματα στήλης

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του A με αντίστοιχες ιδιοτιμές 1, -1 και 0.

Άσκηση 22. Να εξετασθεί εαν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 23. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (3x + y - z, x + 3y + z, -x + y + 3z)$$

Να δείξετε ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος και ακολούθως να τον διαγωνοποιήσετε.

Άσκηση 24. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες τις οποίες πρέπει να πληρούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta \\ 0 & 3 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 25. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z, w) = (x, 2x + 5y + 6z + 7w, 3x + 8z + 9w, 4x + 10w)$$

Να εξετασθεί ο f ως προς τη διαγωνοποίηση.

Άσκηση 26. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες τις οποίες πρέπει να πληρούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 27. Να εξετασθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας μιγαδικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 28. Να υπολογισθεί η m -οστή δύναμη $A^m, \forall m \geq 1$, του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 29. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Υποθέτουμε ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και η μοναδική ιδιοτιμή του είναι το $\lambda \in \mathbb{K}$. Να δείξετε ότι

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Άσκηση 30. Έστω $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ και $(z_n)_{n \geq 0}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών έτσι ώστε

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + y_{n-1} - z_{n-1} \\y_n &= -x_{n-1} + 3y_{n-1} - z_{n-1} \\z_n &= -x_{n-1} + 2z_{n-1}\end{aligned}$$

για κάθε $n \geq 1$.

Αν $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = -1$, να βρεθούν οι ακολουθίες $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$, $(z_n)_{n \geq 0}$.

Άσκηση 31. Να μελετηθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας πραγματικών αριθμών:

$$\begin{pmatrix} 1 & -14 & 4 \\ -1 & 6 & -2 \\ -2 & 24 & -7 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 32. Να μελετηθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας πραγματικών αριθμών:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 3 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 3 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 33. Να μελετηθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας πραγματικών αριθμών:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 34. Να μελετηθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας μιγαδικών αριθμών:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & i & i \\ i & 0 & i & i \\ i & i & 0 & i \\ i & i & i & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 35. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 10001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 10003 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 10005 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 10007 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10009 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10011 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 36. Έστω A ένας διαγωνοποιήσιμος $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι

$$P_A(t) = t^2(t-3)(t+2)^3(t-4)^3$$

- (1) Να βρεθεί το n .
- (2) Να βρεθεί η διάσταση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(4)$.
- (3) Να βρεθεί η βαθμίδα του A .