

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 17 Μαρτίου 2023

Άσκηση 1. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να προσδιορισθεί η n -οστή δύναμη του A .

Άσκηση 3. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο των ενδομορφισμών:

(1)

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1, x_2 + x_4, 0)$$

(2)

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + 3x_2 + 2x_4, 2x_2, x_1 - 3x_2 - 4x_4, 2x_4)$$

(3)

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_2 + x_3, x_4)$$

(4)

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2, x_1)$$

Άσκηση 4. Θεωρούμε τους ακόλουθους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο των πινάκων A και B .

(2) Να εξετασθεί αν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι χωρίς να υπολογισθεί η ορίζουσά τους.

(3) Αν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι να βρεθούν οι πίνακες A^{-1} και B^{-1} με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton.

Άσκηση 5. (1) Έστω $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ένας ενδομορφισμός.

- (α) Αν $f^2 = f$ να υπολογισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του f .
 (β) Αν $f^2 = \text{Id}_E$ να υπολογισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του f .
 (2) Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$.
 (α) Αν $A^2 = A$, να υπολογισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A .
 (β) Αν $A^2 = I_n$, να υπολογισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

Άσκηση 6. Να προσδιοριστούν οι πίνακες $A \in M_n(\mathbb{K})$ των οποίων το ελάχιστο πολυώνυμο είναι της μορφής

$$Q_A(t) = t - \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

Άσκηση 7. Να βρείτε όλους τους πίνακες $A \in M_2(\mathbb{R})$ που είναι διαγωνιοποιήσιμοι και ικανοποιούν τη σχέση

$$A^2 - 3A + 2I_2 = O$$

Άσκηση 8. Να δειχθεί ότι αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε

$$A^3 = 7A$$

τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος όταν θεωρηθεί ως πίνακας ρητών αριθμών;

Άσκηση 9. Αν $k \geq 1$, θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} k & k & \cdots & k \\ k & k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & k \end{pmatrix}$$

- (1) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A .
- (2) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.
- (3) Ποιά είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A ;

Άσκηση 10. Έστω A ένας 3×3 πίνακας πραγματικών αριθμών για τον οποίο γνωρίζουμε ότι:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- (1) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .
- (2) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A .
- (3) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;
- (4) Είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος;
- (5) Είναι ο πίνακας A ταυτοδύναμος;
- (6) Είναι ο πίνακας A μηδενοδύναμος;

Άσκηση 11. Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A .
- (2) Να εξεταστεί αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, να διαγωνοποιηθεί.
- (3) Να βρεθεί η n -οστή δύναμη του πίνακα A .

Άσκηση 12. Έστω A ένας $n \times n$ διαγωνοποιήσιμος πίνακας πραγματικών αριθμών με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P_A(t) = -t^4(t-1)^3(t-3)^5(t+1)^7$$

- (1) Να βρεθεί το μέγεθος n του πίνακα A .
- (2) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του πίνακα A .
- (3) Να βρεθεί η διάσταση των ιδιοχώρων των ιδιοτιμών του πίνακα A .
- (4) Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα A .

Άσκηση 13. Έστω P ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{E}(P) = \{A \in M_3(\mathbb{K}) \mid \text{ο πίνακας } P^{-1}AP \text{ είναι διαγώνιος}\}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{E}(P)$ είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $M_3(\mathbb{K})$.
- (2) Να βρεθεί η διάσταση του $\mathcal{E}(P)$ και να προσδιορισθεί μια βάση του.
- (3) Ναδειχθεί ότι ορίζοντας

$$f: \mathcal{E}(P) \longrightarrow \mathcal{E}(P), \quad f(A) = {}^t A$$

αποκτούμε έναν ενδομορφισμό του $\mathcal{E}(P)$.

- (4) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f .
- (5) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του f .
- (6) Είναι ο f διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, να βρεθεί μια βάση του $\mathcal{E}(P)$ στην οποία ο πίνακας του f να είναι διαγώνιος.

Άσκηση 14. Ένας πίνακας $B = (b_{ij})_{M_{n \times n}(\mathbb{K})}$ καλείται **δίκαιος** αν:

- (a) $b_{ij} > 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$.
- (b) $b_{ij}b_{jk} = b_{ik}, \forall i, j, k = 1, 2, \dots, n$.

- (1) Να δείξετε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

είναι δίκαιος.

- (2) Να δείξετε ότι αν B είναι ένας δίκαιος πίνακας, τότε: $B^2 = \frac{1}{n}B$.
- (3) Κάθε δίκαιος πίνακας είναι όμοιος με τον A .
- (4) Να δείξετε ότι κάθε δίκαιος πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και να προσδιορισθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας

$$P^{-1}BP$$

να είναι διαγώνιος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή ενός δίκαιου πίνακα;

Άσκηση 15. Έστω $R(t) \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο το οποίο έχει όλες τις ρίζες του στο σώμα \mathbb{K} και κάθε ρίζα έχει πολλαπλότητα 1, δηλαδή το πολυώνυμο $R(t)$ αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων υπεράνω του \mathbb{K} .

- (1) Έστω $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Αν $R(f) = 0$, ναδειχθεί ότι ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος.
- (2) Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Αν $R(A) = O$, ναδειχθεί ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 16. Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A δείξτε ότι ο A και ο ${}^t A$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Άσκηση 17. Αν οι αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του διαγωνοποιήσιμου πίνακα A , τότε να δείξετε ότι οι αριθμοί $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A^2 . Ισχύει αυτό το συμπέρασμα αν ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος;

Αν ο πίνακας A^2 είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 18. Έστω $k \geq 1$ ένας φυσικός αριθμός.

(1) Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Να δειχθεί ότι:

$$f^k = 0 \implies f^n = 0$$

(2) Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι:

$$A^k = 0 \implies A^n = O$$

Άσκηση 19. Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- (1) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;
- (2) Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A ;
- (3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός.

Άσκηση 20. Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα μιγαδικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;
- (2) Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A ;
- (3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός.

Άσκηση 21. Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι 4 και -2 . Έστω $n \geq 0$. Να βρεθεί ο πίνακας A^n , $\forall n \in \mathbb{Z}$, συναρτήσει των πινάκων A και I_2 , σε δύο μέρη:

- (1) Να βρεθούν αριθμοί $a_n, b_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{n+1} = a_n A + b_n I_2$.
- (2) Να βρεθούν αριθμοί $c_n, d_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{-n-1} = c_n A + d_n I_2$.

Άσκηση 22. Να εξετασθεί αν υπάρχει πίνακας B έτσι ώστε:

$$B^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 23. Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;
- (2) Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A ;

- (3) Να βρεθεί η n -οστή δύναμη του A .
 (4) Να εξετασθεί αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος χωρίς να υπολογισθεί η ορίζουσα του A και ακολούθως, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο πίνακας A^n , $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 24. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ναδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, και να εκφραστεί ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων I_4 , A , και A^2 .

Άσκηση 25. Αν A και B είναι δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , τότε γνωρίζουμε ότι $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$, βλ. την Άσκηση 30 του Φυλλαδίου 3. Να δοθεί παράδειγμα $n \times n$ πινάκων A και B με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , έτσι ώστε:

$$Q_{AB}(t) \neq Q_{BA}(t)$$

Άσκηση 26. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών για τον οποίο ισχύει ότι $A^m = I_n$, όπου $m \geq 1$. Να εξετασθεί αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος (α) υπεράνω του \mathbb{R} , και (β) υπεράνω του \mathbb{C} .

Άσκηση 27. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & a+7 & -3 \\ 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

Πότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος; Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;

Άσκηση 28. Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ δύο διανύσματα του \mathbb{R}^n .

- (1) Αν $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$, ναδειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του; Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A ;

- (2) Αν $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ και $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 0$, ναδειχθεί ότι ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του; Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του B ;

Άσκηση 29. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

ναδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, και να εκφραστεί ο πίνακας A^{-1} ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων I_3 , A και A^2 . Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 30. Θεωρούμε τον μη-μηδενικό πίνακα-γραμμή

$$A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

και θέτουμε

$$B = {}^t A \cdot A$$

Ναδειχθεί ότι ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και να βρεθεί η διαγώνια μορφή του.

Άσκηση 31. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

υπεράνω του \mathbb{R} και υπεράνω του \mathbb{C} , και να υπολογιστεί η n -οστή δύναμη του.

Άσκηση 32. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$, για κάποιους υπόχωρους \mathcal{E}_1 και \mathcal{E}_2 του \mathcal{E} .

Αν $f(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{E}_1$ και $f(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{E}_2$, ναδειχθούν τα εξής:

(1) Οι απεικονίσεις

$$f_1: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1, \quad f_1(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad \text{και} \quad f_2: \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2, \quad f_2(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

είναι ενδομορφισμοί των \mathcal{E}_1 και \mathcal{E}_2 αντίστοιχα.

(2) Για τα ελάχιστα πολυώνυμα $Q_f(t)$, $Q_{f_1}(t)$, και $Q_{f_2}(t)$ των ενδομορφισμών f , f_1 , και f_2 ισχύει ότι:

$$Q_f(t) = [Q_{f_1}(t), Q_{f_2}(t)]$$

όπου $[Q_{f_1}(t), Q_{f_2}(t)]$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των πολυωνύμων $Q_{f_1}(t)$ και $Q_{f_2}(t)$.

Άσκηση 33. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα μιγαδικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos x & i \sin x & 0 \\ i \sin x & 0 & -i \sin x \\ 0 & -i \sin x & -\sqrt{2} \cos x \end{pmatrix}$$

όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός με: $0 \leq x \leq 2\pi$.

(1) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

(2) Πότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος; Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;

(3) Αν $x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, να βρεθεί ο πίνακας: A^{2018} .

Άσκηση 34. Θεωρούμε τον ακόλουθο 3×3 πίνακα πραγματικών αριθμών, όπου $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι τιμές του a έτσι ώστε ο πίνακας A να έχει ως ιδιοτιμή τον αριθμό $\lambda = 0$ και τις υπόλοιπες ιδιοτιμές ακέραιους αριθμούς. Για τις παραπάνω τιμές του a :

- (1) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A .
- (2) Είναι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;
- (3) Να βρεθεί η n -οστή δύναμη του πίνακα A .
- (4) Να βρεθούν όλες οι τετραγωνικές ρίζες του A , δηλαδή να βρεθούν όλοι οι 3×3 πίνακες πραγματικών αριθμών B για τους οποίους ισχύει ότι $B^2 = A$.

Άσκηση 35. Θεωρούμε τον ακόλουθο 3×3 πίνακα πραγματικών αριθμών, όπου $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι τιμές του a έτσι ώστε ο πίνακας A να έχει ως ιδιοτιμή τον αριθμό $\lambda = 0$ και τις υπόλοιπες ιδιοτιμές ακέραιους αριθμούς. Για τις παραπάνω τιμές του a :

- (1) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A .
- (2) Είναι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;
- (3) Να βρεθεί η n -οστή δύναμη του πίνακα A .
- (4) Να βρεθούν όλες οι τετραγωνικές ρίζες του A , δηλαδή να βρεθούν όλοι οι 3×3 πίνακες πραγματικών αριθμών B για τους οποίους ισχύει ότι $B^2 = A$.

Άσκηση 36. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών. Έστω $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E} = n$ και $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του \mathcal{E} . Ορίζουμε απεικόνιση

$$f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} = z_1 \vec{e}_1 + z_2 \vec{e}_2 + \dots + z_n \vec{e}_n \longmapsto f(\vec{x}) = \bar{z}_1 \vec{e}_1 + \bar{z}_2 \vec{e}_2 + \dots + \bar{z}_n \vec{e}_n$$

- (1) Ναδειχθεί ότι ο \mathbb{C} -διανυσματικός χώρος \mathcal{E} μπορεί να θεωρηθεί ως \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος.
- (2) Ναδειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι ένας ενδομορφισμός του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} .
- (3) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του f .

Έστω $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, όπου \mathcal{V} και \mathcal{W} είναι υπόχωροι του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} και έστω $f: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ και $g: \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ ενδομορφισμοί των \mathcal{V} και \mathcal{W} αντίστοιχα. Το **ευθύ άθροισμα** $f \oplus g$ των ενδομορφισμών f και g ορίζεται να είναι η απεικόνιση

$$f \oplus g: \mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}, \quad (f \oplus g)(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + g(\vec{w})$$

Άσκηση 37. Έστω $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Ναδειχθεί ότι ο f μπορεί να γραφεί ως «ευθύ άθροισμα»

$$f = g + h$$

κατάλληλων ενδομορφισμών

$$g: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \quad \text{και} \quad h: \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$$

όπου \mathcal{V} και \mathcal{W} είναι κατάλληλοι υπόχωροι του \mathcal{E} έτσι ώστε $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ και:

- (1) Ο ενδομορφισμός $g: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ είναι ισομορφισμός.
- (2) Ο ενδομορφισμός $h: \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ είναι μηδενοδύναμος, δηλ. $h^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.

Το **ευθύ άθροισμα** $A \oplus B$ δύο πινάκων $A \in M_n(\mathbb{K})$ και $B \in M_m(\mathbb{K})$ ορίζεται να είναι ο $(n+m) \times (n+m)$ πίνακας

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \boxed{A} & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 38. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Να δείχθει ότι ο A μπορεί να γραφεί ως «ευθύ άθροισμα» πινάκων:

$$A = B \oplus C$$

όπου για κατάλληλα $1 \leq r, s \leq n$ έτσι ώστε $s+r = n$:

- (1) Ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος $s \times s$ πίνακας.
- (2) Ο πίνακας C είναι μηδενοδύναμος $r \times r$ πίνακας, δηλ. $C^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.