ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 4

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Πέμπτη 24 Μαρτίου 2023

Άσκηση 1. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος.*

(1) *Να δειχθεί ότι κάθε μη-μηδενικός υπόχωρος του $\mathcal{E}$ είναι, με φυσικό τρόπο, Ευκλείδειος χώρος.*

(2) *Έστω $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$.*

(α΄) *Αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι: $\vec{x} = \vec{0}$ αν και μόνον αν $\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$.*

(β΄) *Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι: $\vec{x} = \vec{y}$ αν και μόνον αν $\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle$ για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$.*

(γ΄) *Αν $f, g \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, και $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{F}$, να δειχθεί ότι: $f = g$ αν και μόνον αν $\langle f(\vec{\varepsilon}_i), \vec{e}_j \rangle = \langle g(\vec{\varepsilon}_i), \vec{e}_j \rangle$, για κάθε $1 \leq i \leq m$ και κάθε $1 \leq j \leq n$.*

Άσκηση 2. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος.*

(1) *Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ και $\vec{x} \in \mathcal{E}$, να εξετασθεί αν υπάρχει διάνυσμα $\vec{v}_{\vec{x}} \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε, $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$:*

$$\|\vec{v}_{\vec{x}} - \vec{x}\| \leq \|\vec{u} - \vec{x}\|$$

Αν υπάρχει ένα τέτοιο διάνυσμα, είναι μοναδικό;

(2) *$\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (1, 1, 1)$, και $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, να βρεθεί, αν υπάρχει, ένα διάνυσμα $\vec{v}_{\vec{x}}$, όπως στο μέρος (1).*

Άσκηση 3. *Έστω $\mathcal{E}(, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος.*

(1) *Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ είναι δύο μοναδιαία διανύσματα του $\mathcal{E}$ για τα οποία ισχύει ότι $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\frac{1}{2}$, να βρεθεί το μήκος του διανύσματος $\vec{x} - \vec{y}$.*

(2) *Αν $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, και $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι τρία διανύσματά του, έτσι ώστε:*

$$\vec{x} \perp \vec{y}, \qquad \|\vec{y}\| = 4, \qquad \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = 7$$

Αν $\vec{x} = \vec{y} + \lambda \vec{z}$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ.

Άσκηση 4. *Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 10x_2 y_2$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 5. *Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - 2x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4x_2 y_2$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\vec{x}_1 = (2,-3,-1,0), \quad \vec{x}_2 = (7,3,0,1), \quad \vec{x}_3 = (-1,0,1,0), \quad \vec{x}_4 = (0,1,1,1)$$

Να βρεθεί ένα εσωτερικό γινόμενο

$$\langle -,- \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

έτσι ώστε τα $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$ *να αποτελούν ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου* $(\mathbb{R}^4, \langle,\rangle)$.

Άσκηση 7. *Να δειχθεί ότι απεικόνιση*

$$\langle\, ,\, \rangle\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B\rangle = |A+B| - |A| - |B|$$

είναι διγραμμική και συμμετρική, αλλά δεν είναι θετικά ορισμένη και επομένως δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

Άσκηση 8. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

ένας 2×2 *πίνακας πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\langle\, ,\, \rangle' \;:\; \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}, \quad \langle (a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle' = (a_1\ a_2)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^2$ *αν και μόνον αν* $y = z$ *και ισχύει:* $x,\ w,\ xw - y^2 > 0$.

Άσκηση 9. *Έστω* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *με* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *και* $\vec{y} \neq \vec{0}$. *Να δειχθεί ότι*

(1) $\vec{x} = a \cdot \vec{y}$, *όπου* $a > 0$, *αν και μόνο αν η γωνία την οποια σχηματίζουν τα* $\vec{x}, \vec{y}$ *είναι ίση με* 0.
(2) $\vec{x} = a \cdot \vec{y}$, *όπου* $a < 0$, *αν και μόνο αν η γωνία την οποια σχηματίζουν τα* $\vec{x}, \vec{y}$ *είναι ίση με* π.

Άσκηση 10. *Να βρεθούν όλα τα διανύσματα τα οποία είναι κάθετα προς τα διανύσματα:*

(1) $\vec{x} = (-1,1,2,-1) \in \mathbb{R}^4$.
(2) $\vec{x} = t^2 \in \mathbb{R}_3[t]$.
(3) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$.

Άσκηση 11. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *ένας* $n \times n$ *πίνακας πραγματικών αριθμών. Να εξετασθεί αν η απεικόνιση*

$$\langle\, ,\, \rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Big(\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\Big) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = {}^tX \cdot A \cdot X$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^n$, *όπου:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 12. *Να εξετασθεί για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση*

$$\langle\, ,\, \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Big(\vec{x} = (x_1, x_2),\ \vec{y} = (y_1, y_2)\Big) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle = (2-2a)x_1y_1 + (a-3)x_1y_2 + ax_2y_1 + 5ax_2y_2$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 13. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\langle\, ,\, \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Big(\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\Big) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle = {}^tX \cdot ({}^tA \cdot A) \cdot X$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^n$, όπου:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 14. *Αν $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, να δειχθεί ότι:*

$$\Big(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{n}\Big)^2 \ \leq\ \Big(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2\Big) \cdot \Big(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\Big)$$

Άσκηση 15. *Να εξετασθεί αν οι παρακάτω απεικονίσεις ορίζουν εσωτερικό γινόμενο:*

$$\langle\, ,\, \rangle \ :\ \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B\rangle = \mathsf{det}(A \cdot B)$$
$$\langle\, ,\, \rangle \ :\ \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot B)$$
$$\langle\, ,\, \rangle \ :\ \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A + B)$$
$$\langle\, ,\, \rangle \ :\ \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B\rangle = \mathsf{det}(A + B)$$

Άσκηση 16. *Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, θεωρούμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\Big\langle \vec{x} + \lambda\langle \vec{x}, \vec{a}\rangle\vec{\alpha},\ \vec{x} + \lambda\langle \vec{x}, \vec{a}\rangle\vec{\alpha}\Big\rangle = \Big\langle \vec{x}, \vec{y}\Big\rangle$$

Άσκηση 17. *Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, θεωρούμε δύο διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$. Αν $\vec{x} \times \vec{y}$ είναι το εξωτερικό γινόμενο των $\vec{x}$ και $\vec{y}$, να δειχθεί ότι:*

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \sqrt{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle^2}$$

Άσκηση 18. *Έστω $\vec{x}$ και $\vec{y} \neq \vec{0}$ δύο διανύσματα του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.*

(1) *Για ποιά τιμή λ_0 του πραγματικού αριθμού λ, το διάνυσμα $\vec{x} + \lambda\vec{y}$ έχει το μικρότερο μήκος;*
(2) *Για την τιμή λ_0 που βρέθηκε στο μέρος (1), να δειχθεί ότι:*

$$(\vec{x} + \lambda_0\vec{y}) \perp \vec{y}$$

Άσκηση 19. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ τρία μη-μηδενικά διανύσματα του $\mathcal{E}$. Από την (λυμένη) Άσκηση* **22** *του Φυλλαδίου Ασκήσεων* **4** *γνωρίζουμε ότι:*

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \cdot \|\vec{z}\| \ \leq\ \|\vec{y} - \vec{z}\| \cdot \|\vec{x}\| + \|\vec{z} - \vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \qquad \text{(Ανισότητα του Πτολεμαίου)}$$

Να εξετασθεί πότε η Ανισότητα του Πτολεμαίου είναι ισότητα.

Άσκηση 20. *Έστω*

$$\mathcal{A} = \Big\{ x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1 \Big\}$$

το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών, το οποίο θεωρούμε ως $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο (άπειρης διάστασης) εφοδιασμένο με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης ακολουθιών και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ακολουθίας με πραγματικό αριθμό. Έστω $\mathcal{E}$ το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A} \mid \sum_{n\geq 1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

Δηλαδή $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{E}$ αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} x_n^2$ συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό.

(1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{E}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{A}$.*

(2) *Να δειχθεί ότι, αν $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{R}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ συγκλίνει και η απεικόνιση*

$$\langle\, ,\, \rangle \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Big\langle (x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \Big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$.

Άσκηση 21. *Σταθεροποιούμε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{y}$ σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, και θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\Pi_{\vec{y}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto \Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}\, \vec{y} \qquad (\textit{Ορθογώνια Προβολή του } \vec{x} \textit{ στο } \vec{y})$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\Pi_{\vec{y}}$ είναι γραμμική.*

(2) *Να προσδιορισθεί ο πυρήνας και η εικόνα της $\Pi_{\vec{y}}$.*

(3) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\Pi_{\vec{y}}$ είναι προβολή, δηλαδή: $\Pi_{\vec{y}} \circ \Pi_{\vec{y}} = \Pi_{\vec{y}}$.*

Άσκηση 22. *Σταθεροποιούμε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{y}$ σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, και θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\mathsf{R}_{\vec{y}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto \mathsf{R}_{\vec{y}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}\, \vec{y}$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\mathsf{R}_{\vec{y}}$ είναι γραμμική.*

(2) *Να προσδιορισθεί ο πυρήνας και η εικόνα της $\mathsf{R}_{\vec{y}}$.*

(3) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\Pi_{\vec{y}}$ είναι προβολή, δηλαδή: $\mathsf{R}_{\vec{y}} \circ \mathsf{R}_{\vec{y}} = \mathsf{R}_{\vec{y}}$.*

(4) *Να δειχθεί ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:*

$$\mathsf{R}_{\vec{y}}(\vec{x}) \perp \vec{y} \quad \textit{και} \quad \mathsf{R}_{\vec{y}}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{x}, & \textit{αν και μόνον αν } \vec{x} \perp \vec{y} \\ \vec{0}, & \textit{αν και μόνον αν } \exists \lambda \in \mathbb{R} : \ \vec{x} = \lambda \vec{y} \end{cases}$$

(5) *Να δειχθεί ότι, κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{E}$ γράφεται μοναδικά ως εξής:*

$$\vec{x} = \lambda \vec{y} + \vec{z}, \quad \textit{όπου} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \vec{z} \perp \vec{y}$$

και επομένως αν θέσουμε $\mathcal{U} = \langle \vec{y} \rangle = \big\{ \lambda \vec{y} \in \mathcal{E} \mid \lambda \in \mathbb{R} \big\}$ και $\mathcal{V} = \big\{ \vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \big\}$, τότε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Υπενθυμίζουμε ότι κάθ διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε έναν $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ καθορίζει μοναδικά μια ευθεία (μονοδιάστατο υπόχωρο του $\mathcal{E}$):

$$\mathcal{L}_\alpha = \big\{ \lambda \alpha \in \mathcal{E} \mid \lambda \in \mathbb{R} \big\}$$

Άσκηση 23. *Σταθεροποιούμε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, και θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\mathsf{S}_{\vec{\alpha}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto \mathsf{S}_{\vec{\alpha}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{\langle \vec{x}, \vec{\alpha} \rangle}{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}\, \vec{\alpha} \qquad (\textit{Ανάκλαση του } \mathcal{E} \textit{ ως προς την ευθεία } \mathcal{L}_{\vec{\alpha}})$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση* $\mathsf{S}_{\vec{\alpha}}$ *είναι γραμμική.*
(2) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση* $\mathsf{S}_{\vec{\alpha}}$ *είναι ενέλιξη, δηλαδή:* $\mathsf{S}_{\vec{\alpha}} \circ \mathsf{S}_{\vec{\alpha}} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.
(3) *Να δειχθεί ότι,* $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\mathsf{S}_{\vec{\alpha}}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{x}, & \text{αν και μόνον αν } \vec{x} \perp \vec{\alpha} \\ -\vec{x}, & \text{αν και μόνον αν } \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \vec{x} = \lambda \vec{\alpha} \end{cases}$$

(4) *Να δειχθεί ότι,* $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\Big\langle \mathsf{S}_{\vec{\alpha}}(\vec{x}), \mathsf{S}_{\vec{\alpha}}(\vec{y}) \Big\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

(5) *Η γραμμική απεικόνιση* $\mathsf{S}_{\vec{\alpha}}$ *διατηρεί μήκη και γωνίες διανυσμάτων:*

$$\|\mathsf{S}_{\vec{\alpha}}(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \qquad \text{και} \qquad \sphericalangle\,(\mathsf{S}_{\vec{\alpha}}(\vec{x}), \mathsf{S}_{\vec{\alpha}}(\vec{y})) = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$$

Άσκηση 24. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος,* $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ *μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{E}$ *και* $\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + \cdots + w_n\vec{e}_n$ *ένα μοναδιαίο διάνυσμα του* $\mathcal{E}$. *Θεωρούμε τον* $n \times n$ *πίνακα:*

$$A = I_n - 2W \cdot {}^tW, \qquad \text{όπου} \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας* A *είναι ορθογώνιος, δηλαδή ισχύει ότι:*

$$A \cdot {}^tA = I_n = {}^tA \cdot A$$

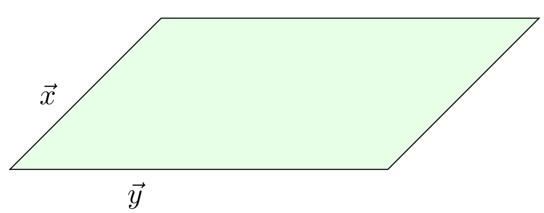
(2) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

είναι μια ανάκλαση του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}_n$ *ως προς την ευθεία* $\mathcal{L}_W$, *με την έννοια της Άσκησης* 23, *όπου ο* $\mathbb{R}$-*διανυσματικός χώρος* $\mathbb{R}_n$ *είναι Ευκλείδειος με εσωτερικό γινόμενο:*

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Άσκηση 25. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος, και* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$ *δύο διανύσματα του* $\mathcal{E}$. *Τότε τα διανύσματα* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$ *προσδιορίζουν ένα παραλληλόγραμμο* (Π) *με πλευρές* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$:



Να δειχθεί ότι το εμβαδόν $\mathsf{E}(\Pi)$ *του παραλληλογράμμου* (Π) *είναι ίσο με:*

$$\mathsf{E}(\Pi) = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad \text{όπου :} \quad \begin{cases} a = \|\vec{x}\| \\ b = \|\vec{y}\| \\ c = \|\vec{y} - \vec{x}\| \\ s = \frac{1}{2}(a+b+c) \end{cases}$$

Άσκηση 26. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος, και* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας μη-μηδενικός ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$.

(1) *Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε,* $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$*:*

$$\|f(\vec{x})\| = \lambda\|\vec{x}\|$$

(α΄) *Να δειχθεί ότι,* $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$*:*

$$\big\langle f(\vec{x}),\, f(\vec{y})\big\rangle = \lambda^2\big\langle \vec{x},\, \vec{y}\,\big\rangle$$

(β΄)

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad\Longrightarrow\quad f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$$

(2) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α΄) *Υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε,* $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$*:* $\|f(\vec{x})\| = \lambda\|\vec{x}\|$.

(β΄) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$: $\vec{x} \perp \vec{y} \implies f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$.