ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 31 Μαρτίου 2023

Άσκηση 1. *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$. Τι προκύπτει με την εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt στο σύνολο $\mathcal{B}$;*

Άσκηση 2. *Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου $\mathcal{V}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x} = (1, -1, 0, 1), \qquad \vec{y} = (-1, 0, 0, 2), \qquad \vec{z} = (1, 0, -2, 1)$$

Άσκηση 3. *Να επεκταθεί σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, όπου:*

$$\vec{x}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \vec{x}_2 = (0, 1, 0)$$

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:*

$$\vec{x} = (2, 1, 3, -1), \qquad \vec{y} = (7, 4, 3, -3), \qquad \vec{z} = (1, -1, 6, 0), \qquad \vec{w} = (5, 7, 7, 8)$$

Με την διαδικασία Gram-Schmidt, να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}$ ο οποίος παράγεται από τα παραπάνω διανύσματα, και ακολούθως να προσδιορισθεί ο ορθογώνιος υπόχωρος $\mathcal{V}^\perp$ του $\mathcal{V}$.

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, και έστω οι ακόλουθοι 2×2 πίνακες πραγματικών αρθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Έστω $\mathcal{V}$ ο υπόχωρος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ ο οποίος παράγεται από τους πίνακες A και B.

(1) *Να βρεθεί μια ορθοκανονονική βάση $\mathcal{B}_1$ του $\mathcal{V}$.*
(2) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}_2$ του $\mathcal{V}^\perp$.*
(3) *Να συμπληρωθεί η $\mathcal{B}_1$ σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.*
(4) *Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του πίνακα*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

στον υπόχωρο $\mathcal{V}$.

Άσκηση 6. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Έστω $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Αν $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = n < \infty$, τότε να δείξετε ότι στην ανισότητα*

$$\langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle^2 + \cdots + \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_m \rangle^2 \quad \leq \quad ||\vec{y}||^2$$

ισχύει η ισότητα αν και μόνον αν $m = n$.

Άσκηση 7. *Δίνεται ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$:*

$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z = 0 \ \text{ και } \ y - z - w = 0\big\}$$

(1) *Να βρεθούν δυο διαφορετικοί υπόχωροι $\mathcal{V}_1$ και $\mathcal{V}_2$ του $\mathbb{R}^4$ διάστασης 3 έτσι ώστε $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$.*
(2) *Να βρεθεί ένα ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\mathcal{V}_1$ και ένα ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\mathcal{V}_2$ στον $\mathbb{R}^4$, ως προς το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^4$.*
(3) *Είναι το $\vec{u} = (0, 0, 1, 1)$ στοιχείο του $\mathcal{V}$; Αν όχι βρείτε την προβολή του $\vec{u}$ στον $\mathcal{V}$.*

Άσκηση 8. *Θεωρούμε τους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένους με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, και έστω η γραμμική απεικόνιση:*

$$f \ : \ \mathbb{R}^4 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z, w) = (x + y, \ z + w, \ x + z)$$

(1) *Να βρεθούν ορθοκανονικές βάσεις των υποχώρων $\mathsf{Ker}(f)$ και $\mathsf{Ker}(f)^{\perp}$.*
(2) *Να βρεθούν οι ορθογώνιες προβολές το διανύσματος*

$$\vec{z} = (5, 2, -1, 4)$$

στους υποχώρους $\mathsf{Ker}(f)$ και $\mathsf{Ker}(f)^{\perp}$.

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένον με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, και έστω*

$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y - 2z = 0\big\}$$

(1) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία να περιέχει δύο διανύσματα του $\mathcal{V}$.*
(2) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία να περιέχει ένα διανύσμα του $\mathcal{V}^{\perp}$.*

Άσκηση 10. *Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle)$ να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\vec{x} = (3, 1, 2, -4)$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (1, 2, -1, 1), \qquad \vec{x}_2 = (0, 3, 1, -1), \qquad \vec{x}_3 = (0, 0, -2, 1)$$

Ακολούθως να βρεθεί ο ορθογώνιος υπόχωρος $\mathcal{V}^{\perp}$ του $\mathcal{V}$ και να βρεθεί η κάθετη προβολή του $\vec{x}$ στον $\mathcal{V}$.

Άσκηση 11. *Να δεχιθεί ότι η απεικόνιση*

$$\langle\ ,\ \rangle_* \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_* = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_3y_1 + x_1y_3 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

(1) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle_*)$.*
(2) *Αν*

$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\big\}$$

να βρεθεί η ορθογώνια και η κάθετη προβολή του διανύσματος $\vec{x} = (1, 1, 1)$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$.

Άσκηση 12. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, και $\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ ένα υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Έστω $\mathcal{D} = \big\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\big\}$ το σύνολο διανυσμάτων το οποίο κατασκευάζεται επαγωγικά ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt. Σημειώνουμε ότι αν τα διανύσματα $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_{k-1}$ έχουν κατασκευαστεί, τότε αυτά τα διανύσματα είναι μη-μηδενικά και το διάνυσμα $\vec{y}_k$ κατασκευάζεται μέσω του τύπου $(\dagger)$.*

(1) *Ισχύει ότι*

$$k = 1, 2, \cdots, n: \qquad 0 \;\le\; \|\vec{y}_k\| \;\le\; \|\vec{x}_k\|$$

(2) *Ισχύει ότι*

$$k = 1, 2, \cdots, n: \qquad \vec{y}_k = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{0}, & \text{αν } k = 1 \\ \vec{x}_k \in \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}), & \text{αν } k \ge 2 \end{cases}$$

(3) *Ισχύει ότι*

$$k = 1, 2, \cdots, n: \qquad \|\vec{y}_k\| = \|\vec{x}_k\| \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} k = 1 \\ \quad \text{ή} \\ \langle \vec{x}_k, \vec{x}_j \rangle = 0, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, k-1 \;\; \text{αν } \; k \ge 2 \end{cases}$$

Άσκηση 13. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος, και* $\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ *ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων του* $\mathcal{E}$. *Έστω* $\mathcal{C} = \big\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\big\}$ *το ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων το οποίο κατασκευάζεται ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt. Να δειχθεί ότι,* $\forall k = 2, \cdots, n$*:*

$$\|\vec{y}_k\|^2 = \frac{\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k)\big|}{\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})\big|}$$

Άσκηση 14. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και* $\mathcal{V}$ *ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$. *Αν* $\vec{x} \in \mathcal{E}$, *θεωρούμε το σύνολο όλων των γωνιών*

$$\sphericalangle(\vec{x}, \mathcal{V}) = \big\{\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{y} \in \mathcal{V}\big\}$$

τις οποίες σχηματίζουν τα διανύσματα του υπόχωρου $\mathcal{V}$ *με το διάνυσμα* $\vec{x}$. *Να δειχθεί ότι η μικρότερη από όλες αυτές τις γωνίες είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα* $\vec{x}$ *με την ορθογώνια προβολή του* $\vec{x}$ *στον υπόχωρο* $\mathcal{V}$*:*

$$\min \sphericalangle(\vec{x}, \mathcal{V}) = \sphericalangle(\vec{x}, \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}))$$

Άσκηση 15. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος, και* $\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ *ένα υποσύνολο διανυσμάτων του* $\mathcal{E}$. *Για την ορίζουσα Gram* $|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)|$ *των διανυσμάτων* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, *να δειχθεί ότι:*

$$0 \;\le\; |G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)| \;\le\; \|\vec{x}_1\|^2 \cdot \|\vec{x}_2\|^2 \cdot \cdots \cdot \|\vec{x}_n\|^2$$

και επιπλέον:

(1) $|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)| = 0$ *αν και μόνον αν το σύνολο* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ *είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

(2) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
  - (α΄) $|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)| \;\le\; \|\vec{x}_1\|^2 \cdot \|\vec{x}_2\|^2 \cdots \cdot \|\vec{x}_n\|^2$.
  - (β΄) (i) *είτε ένα τουλάχιστον εκ των διανυσμάτων* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ *είναι το μηδενικό,*
    (ii) *είτε το σύνολο διανυσμάτων* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ *είναι ορθογώνιο.*

Άσκηση 16. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος και* $\mathcal{F}$ *ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$. *Υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{F} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}, \qquad \text{όπου} \;\; \mathcal{U} \perp \mathcal{V}$$

Να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp} \oplus \mathcal{V}, \qquad \text{όπου} \;\; \mathcal{F}^{\perp} \perp \mathcal{V}$$
$$\mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp} \oplus \mathcal{U}, \qquad \text{όπου} \;\; \mathcal{F}^{\perp} \perp \mathcal{U}$$

Άσκηση 17. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και* $\mathcal{F}$ *ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$. *Αν* $\vec{x} \in \mathcal{E}$, *να δειχθεί ότι:*

$$\|\vec{x}\|^2 = \|\Pi_{\mathcal{F}}(\vec{x})\|^2 + \|\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})\|^2$$

Επιπλέον να δεχιθούν τα εξής:

(1)
$$\|\Pi_{\mathcal{F}}(\vec{x})\| \;\leq\; \|\vec{x}\|$$
(2)
$$\|\Pi_{\mathcal{F}}(\vec{x})\| \;=\; \|\vec{x}\| \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x} \in \mathcal{F}$$
Ο αριθμός $\|\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})\|$ *καλείται η* **απόσταση του διανύσματος** $\vec{x} \in \mathcal{E}$ **από τον υπόχωρο** $\mathcal{F}$ *και συμβολίζεται με:*
$$\mathsf{d}(\vec{x}, \mathcal{F}) = \|\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})\|$$
Επομένως: $\mathsf{d}(\vec{x}, \mathcal{F}) = 0 \iff \vec{x} \in \mathcal{F}$.

Άσκηση 18. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος και* $\mathcal{F}$ *ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$*. Υποθέτουμε ότι ο υπόχωρος* $\mathcal{F}$ *έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *ένα διάνυσμα του* $\mathcal{E}$ *και υποθέτουμε ότι:*
$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \quad \text{όπου} \;\; \vec{x}_1 \in \mathcal{F}$$
$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \quad \text{όπου} \;\; \vec{y} \in \mathcal{F} \;\; \text{και} \;\; \vec{z} \in \mathcal{F}^{\perp}$$
Να δειχθεί ότι[1]*:*
$$\|\vec{z}\| \;\leq\; \|\vec{x}_2\|$$
και επιπλέον:
$$\|\vec{z}\| \;=\; \|\vec{x}_2\| \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{y} = \vec{x}_1 \;\; \text{και} \;\; \vec{z} = \vec{x}_2$$

Άσκηση 19. *Να βρεθεί η απόσταση* $\mathsf{d}(\vec{x}, \mathcal{V})$ *του διανύσματος* $\vec{x}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *από τον υπόχωρο* $\mathcal{V}$ *του* $\mathbb{R}^4$*, στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(1) $\vec{x} = (2, 2, 1, 1)$ *και* $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, *όπου:* $\vec{y}_1 = (3, 4, -4, -1)$ *και* $\vec{y}_1 = (0, 1, -1, 2)$.
(2) $\vec{x} = (1, 0, 3, 0)$ *και* $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$, *όπου:* $\vec{y}_1 = (5, 3, 4, -3)$, $\vec{y}_2 = (1, 1, 4, 5)$, *και* $\vec{y}_3 = (2, -1, 1, 2)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ενδομορφισμός $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **προβολή**, αν $f^2 = f$. Γνωρίζουμε ότι για μια προβολή ισχύει ότι:
$$\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \,\oplus\, \operatorname{Im}(f)$$
Αν ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος είναι Ευκλείδειος, τότε μια προβολή $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **ορθογώνια προβολή**, αν $\operatorname{Ker}(f) \perp \operatorname{Im}(f)$. Επομένως για μια ορθογώνια προβολή f ισχύει ότι:
$$\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \,\oplus\, \operatorname{Im}(f), \qquad \operatorname{Ker}(f) \perp \operatorname{Im}(f)$$

Άσκηση 20. *Έστω* $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathbb{R}^n$ *και έστω* A *ο πίνακας του* f *στην κανονική βάση του* $\mathbb{R}^n$*. Αν ο πίνακας* A *είναι συμμετρικός, να δειχθεί ότι:*
$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f) \,\oplus\, \operatorname{Im}(f) \quad \text{και} \quad \operatorname{Ker}(f) \perp \operatorname{Im}(f)$$
Επιπλέον: ο πίνακας A *είναι ταυτοδύναμος, δηλαδή* $A^2 = A$*, αν και μόνον αν ο ενδομορφισμός* f *είναι μια ορθογώνια προβολή.*

Άσκηση 21. *Έστω* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$*. Υποθέτουμε ότι ο* $\mathcal{E}$ *έχει πεπερασμένη διάσταση. Από την Άσκηση* **19** *του Φυλλαδίου* **5** *ότι: υπάρχει* $c \in \mathbb{R}$*:*
$$\forall \vec{x} \,\in\, \mathcal{E}: \quad \|f(\vec{x})\| \;\leq\; c\,\|\vec{x}\|$$
Να δειχθεί ότι θέτοντας
$$\|f\| = \inf\bigl\{c \in \mathbb{R} \mid c > 0 \;\; \text{και} \;\; \|f(\vec{x})\| \leq c\|\vec{x}\|, \; \forall \vec{x} \in \mathcal{E}\bigr\}$$
αποκτούμε έναν μη-αρνητικό πραγματικό αριθμό $\|f\|$ *ο οποίος καλείται η* **στάθμη** *του ενδομορφισμού* f*, και ισχύει ότι:*
$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E}: \quad \|f(\vec{x})\| \;\leq\; \|f\| \cdot \|\vec{x}\|$$

[1] Αν ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε $\|\vec{z}\|$ είναι η απόσταση του $\vec{x}$ από τον υπόχωρο $\mathcal{F}$.

Άσκηση 22. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$. *Υποθέτουμε ότι ο* $\mathcal{E}$ *έχει πεπερασμένη διάσταση. Να δειχθούν τα εξής:*

(1)

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\big\{\|f(\vec{x})\| \mid \|\vec{x}\| = 1\big\}\\ &= \sup\big\{\|f(\vec{x})\| \mid \|\vec{x}\| \leq 1\big\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|f(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} \mid \vec{x} \neq 0\right\}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\big\{|\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle| \mid \|\vec{x}\| = 1 = \|\vec{y}\|\big\}\\ &= \sup\big\{|\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle| \mid \|\vec{x}\| \leq 1 \geq \|\vec{y}\|\big\}\\ &= \sup\left\{\frac{|\langle f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \mid \vec{x} \neq 0 \neq \vec{y}\right\}\end{aligned}$$

(3)

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}: \quad |\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle| \;\leq\; \|f\| \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$