

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 7 Απριλίου 2023

Άσκηση 1. Να κατασκευάσετε μια ισομετρία μεταξύ του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^4 , ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, και του Ευκλείδειου χώρου $M_2(\mathbb{R})$ ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t B)$$

Υπάρχει ισομετρία από τον \mathbb{R}^3 στον Ευκλείδειο χώρο $M_n(\mathbb{R})$, για κατάλληλο n ;

Άσκηση 2. Έστω B ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = A \cdot B$$

Ναδειχθεί ότι ο ενδομορφισμός f του Ευκλείδειου χώρου¹ $(M_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι ισομετρία αν και μόνον αν ο πίνακας B είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 3. Να δείξετε ότι ο πραγματικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα ο οποίος και να βρεθεί.

Άσκηση 4. Να συμπληρωθεί ο ακόλουθος πίνακας A σε έναν 3×3 ορθογώνιο πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Πότε ο πίνακας A γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο (Π) ;

Άσκηση 5. Στον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^2 θεωρούμε την απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (x, y), (x', y') \rangle' = xx' - yx' - xy' + 4yy'$$

(1) Να δείξετε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^2 .

(2) Να κατασκευάσετε μια ισομετρία $f: (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle') \longrightarrow (\mathbb{R}_1[t], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζει το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}_1[t]$.

¹Ο Ευκλείδειος χώρος $(M_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ θεωρείται ότι είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό του γινόμενο: $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t B)$.

Άσκηση 6. Να προσδιορισθεί ποιές από τις παρακάτω ισομετρίες

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y, z) &= (y, z, x) \\ f_2: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y, z) &= (y, -z, x) \\ f_3: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y, z) &= (y, z, -x) \\ f_4: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y, z) &= (y, -z, -x) \\ f_5: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y, z) &= (-y, z, x) \\ f_6: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y, z) &= (-y, -z, x) \\ f_7: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y, z) &= (-y, z, -x) \\ f_8: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y, z) &= (-y, -z, -x) \end{aligned}$$

γεωμετρικά παριστάνουν στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο επίπεδο, και ακολούθως να βρεθεί το επίπεδο (Π), η γωνία θ και ο άξονας (ϵ).

Άσκηση 7. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου \mathcal{E} . Αν $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση, έτσι ώστε

$$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_4, \quad f(\vec{e}_4) = \vec{e}_1$$

να εξετάσετε αν η f είναι ισομετρία.

Άσκηση 8. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος περασμένης διάστασης και $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{z} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f_{\vec{z}}(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{y}\|} \vec{y}$$

όπου $f_{\vec{z}}$ είναι ο ενδομορφισμός² του \mathcal{E} ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$f_{\vec{z}}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f_{\vec{z}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle}{\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle} \vec{z}$$

Άσκηση 9. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ένας πίνακας για τον οποίο ισχύει:

$$a_{ij} = \frac{1}{4} \quad \eta \quad a_{ij} = -\frac{1}{4}$$

Αν ο A είναι ορθογώνιος, να βρεθεί το n .

Άσκηση 10. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \right)$$

- (1) Να δειχθεί ότι η f είναι ισομετρία και να υπολογισθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $f(3, 7, 1)$ και $f(2, -1, 3)$.
- (2) Τι παριστάνει γεωμετρικά η ισομετρία f ;

²Ο ενδομορφισμός $f_{\vec{z}}$ είναι ισομετρία και γεωμετρικά παριστάνει ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο $\{\vec{z}\}^\perp$, δηλαδή υπόχωρο διάστασης $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - 1$ του \mathcal{E} . Με άλλα λόγια:

$$f_{\vec{z}}(\vec{z}) = -\vec{z} \quad \text{και} \quad f_{\vec{z}}(\vec{x}) = \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \{\vec{z}\}^\perp$$

Άσκηση 11. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος. Ένας ενδομορφισμός $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται απεικόνιση ομοιότητας αν:

$$\text{υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \|f(\vec{x})\| = \lambda \|\vec{x}\|, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

Ναδειχθεί ότι για έναν μη-μηδενικό ενδομορφισμό $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο ενδομορφισμός f είναι μια απεικόνιση ομοιότητας.
- (2) Ο ενδομορφισμός f διατηρεί την ορθογωνιότητα διανυσμάτων, δηλαδή, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \implies f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$$

Τι μορφή έχει ο πίνακας μιας ομοιότητας σε μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{E} ;

Άσκηση 12. (1) Ναδειχθεί ότι η σύνθεση $f \circ g$ δύο ισομετριών $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία.

- (2) Ναδειχθεί ότι ο αντίστροφος ενδομορφισμός μιας ισομετρίας $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, είναι ισομετρία.
- (3) Να εξετασθεί αν το άθροισμα $f + g$ δύο ισομετριών $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία.
- (4) Να εξετασθεί αν το άθροισμα $A + B$ δύο ορθογωνίων πινάκων $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ορθογώνιος πίνακας.

Άσκηση 13. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια απεικόνιση, όχι κατ' ανάγκη γραμμική, όπου $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.

- (1) Ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
 - (α) Η απεικόνιση f είναι μια ισομετρία.
 - (β) Η απεικόνιση f διατηρεί την αρχή των αξόνων και αποστάσεις διανυσμάτων, δηλαδή $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$f(\vec{0}) = \vec{0} \quad \text{και} \quad \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

- (2) Να βρεθεί μια απεικόνιση $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ η οποία διατηρεί αποστάσεις, δηλαδή, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

έτσι ώστε $f(\vec{0}) \neq \vec{0}$, δηλαδή η f δεν είναι γραμμική.

Άσκηση 14. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια απεικόνιση, όχι κατ' ανάγκη γραμμική, όπου $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Η απεικόνιση f είναι μια ισομετρία.
- (2) Η απεικόνιση f είναι «επί» και διατηρεί εσωτερικά γινόμενα, δηλαδή $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Μια απεικόνιση, όχι κατ' ανάγκη γραμμική, $R: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται **στερεά κίνηση**, αν η R διατηρεί αποστάσεις, δηλαδή $\forall \vec{x}, \vec{y}$:

$$\|R(\vec{x}) - R(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Μια απεικόνιση $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται **μεταφορά**, αν υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{a} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$$

Μια μεταφορά όπως παραπάνω συμβολίζεται με $T = T_{\vec{a}}$.

Άσκηση 15. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Μια απεικόνιση $R: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι στερεά κίνηση αν και μόνον αν υπάρχει μια ισομετρία $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ και μια μεταφορά $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$R = T \circ f$$

Άσκηση 16. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$ και $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k\}$ δύο σύνολα διανυσμάτων του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Υπάρχει μια ισομετρία $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε

$$f(\vec{x}_i) = \vec{y}_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

(2) Ισχύει ότι:

$$\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \langle \vec{y}_i, \vec{y}_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq k$$

Έστω A ένας 3×3 ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών. Αν $|A| = 1$, τότε από το Θεώρημα του Euler, υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, έτσι ώστε ο πίνακας A είναι ορθογώνια όμοιος με τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

δηλαδή υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε: ${}^t P \cdot A \cdot P = B$. Ο πίνακας B καλείται η **κανονική μορφή του πίνακα A** .

Άσκηση 17. Να βρεθεί η κανονική μορφή των ακόλουθων ορθογώνιων πινάκων:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 18. Να βρεθεί η κανονική μορφή των ακόλουθων ορθογώνιων πινάκων:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 19. Να εξετασθεί αν ο πίνακας

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

παριστάνει γεωμετρικά στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο (Π) . Αν αυτό συμβαίνει, να βρεθεί το επίπεδο (Π) , ο άξονας (Π) , και η γωνία θ .

Άσκηση 20. Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών a, b, c, d έτσι ώστε οι πίνακες

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ a & b & c & d \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιοι. Για ποιές τιμές των a, b, c, d οι πίνακες A και B είναι ορθογώνιοι και διαγωνοποιήσιμοι;

Άσκηση 21. Να βρεθεί η κανονική μορφή των ακόλουθων ορθογώνιων πινάκων:

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

και να βρεθεί το επίπεδο (Π) , ο άξονας (Π) , και η γωνία θ .

Τέλος να προσδιορισθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας ${}^t P \cdot A \cdot P$ να είναι η κανονική μορφή των παραπάνω ορθογώνιων πινάκων:

Άσκηση 22. Να εξετασθεί αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο (Π) . Σε περίπτωση θετικής απάντησης, να βρεθεί το επίπεδο (Π) , ο άξονας (Π) , και η γωνία θ .

Άσκηση 23. Να εξετασθεί αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ 1/4 & 3/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο (Π) . Σε περίπτωση θετικής απάντησης, να βρεθεί το επίπεδο (Π) , ο άξονας (Π) , και η γωνία θ .

Άσκηση 24. Ποιός από τους παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο (Π) ; Ποιά είναι τότε η κανονική μορφή του;