ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Τμημα Β′ (Μ-Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 7

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 28 Απριλίου 2023

Άσκηση 1. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ένας πίνακας για τον οποίο ισχύει:*

$$a_{ij} = \frac{1}{4} \qquad ή \qquad a_{ij} = -\frac{1}{4}$$

Αν ο A είναι ορθογώνιος, να βρεθεί το n.

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τον ενδομορφισμό*

$$f \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \Big(x, \ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \ -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\Big)$$

(1) *Δείξτε ότι ο f είναι ισομετρία και υπολογίστε την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $f(3,7,1)$ και $f(2,-1,3)$.*
(2) *Τι παριστάνει η ισομετρία f γεωμετρικά; (εξηγήστε χωρίς απόδειξη).*
(3) *Ποιός είναι ο προσαρτημένος ενδομορφισμός του f;*

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, και έστω ο ενδομορφισμός*

$$f \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$$

Να προσδιορισθεί ο προσαρτημένος ενδομορφισμός $f^* \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ της f.

Άσκηση 4. *Να προσδιορισθούν οι προσαρτημένοι ενδομορφισμοί f^* και g^* των ενδομορφισμών:*

$$g \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = (x+3y, 2x+y)$$
$$f \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (x-y+z, x+y, z-x)$$

Άσκηση 5. *Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ μια ορθοκανονική βάση του Ευκλειδείου χώρου $\mathcal{E}$. Αν $f \ : \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός, έτσι ώστε*

$$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_4, \quad f(\vec{e}_4) = \vec{e}_1$$

Να προσδιορισθεί ο προσαρτημένος ενδομορφισμός f^* του f.

Άσκηση 6. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \, , \, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Αν ο f έχει ακριβώς μια ιδιοτιμή, να δειχθεί ότιο κάθε ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f.*

Άσκηση 7. *Ισχύει το αντίστροφο του Φασματικού Θεωρήματος για ενδομορφισμούς; Δηλαδή αν* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ένας ενδομορφισμός ενός Ευκλείδειου χώρου* $\mathcal{E}$ *πεπερασμένης διάστασης, και υπάρχει ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{E}$ *στην οποία ο πίνακας του* f *είναι διαγώνιος, είναι τότε ο* f *αυτοπροσαρτημένος;*

Άσκηση 8. *Ισχύει το αντίστροφο του Φασματικού Θεωρήματος για τετραγωνικούς πίνακες; Δηλαδή αν* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *είναι ένας τετραγωνικός πίνακας πραγματικών αριθμών, και υπάρχει ορθογώνιος πίνακας* P *έτσι ώστε ο πίνακας* ${}^tPAP$ *να είναι διαγώνιος, είναι τότε ο πίνακας* A *συμμετρικός;*

Άσκηση 9. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *ένας* 2×2 *πίνακας πραγματικών αριθμών, για τον οποίο ισχύει ότι:* $A\,{}^tA = {}^tA\,A$. *Να εξεταστεί αν ο* A *είναι (ορθογώνια) διαγωνοποίσιμος. Τι ισχύει για* $n \times n$ *πίνακες;*

Άσκηση 10. *Να διαγωνοποιηθούν ορθογώνια οι πίνακες πραγματικών αριθμών*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί μια κυβική τους ρίζα. Υπάρχει τετραγωνική ρίζα των παραπάνω πινάκων;

Άσκηση 11. *Να διαγωνοποιηθούν ορθογώνια οι πίνακες πραγματικών αριθμών*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί μια κυβική τους ρίζα. Υπάρχει τετραγωνική ρίζα των παραπάνω πινάκων;

Άσκηση 12. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\, ,\, \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω* $f, g, h\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *τρεις ενδομορφισμοί του* $\mathcal{E}$, *έτσι ώστε:* $f = g \circ h$. *Αν οι* f *και* g *είναι θετικοί και ο* h *είναι ισομετρία, να δειχθεί ότι* $h = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

Άσκηση 13. *Έστω ότι* A, B, C *είναι τρεις* $n \times n$ *πίνακες πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι:* $A = B\,C$. *Αν οι* A *και* B *είναι θετικοί και ο* C *είναι ορθογώνιος, να δειχθεί ότι* $C = I_n$.