

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 5 Μαΐου 2023

**Άσκηση 1.** Να βρεθούν όλοι οι  $2 \times 2$  πίνακες πραγματικών αριθμών οι οποίοι είναι: (α) συμμετρικοί και ορθογώνιοι, και (β) αντι-συμμετρικοί και ορθογώνιοι.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας συμμετρικός πίνακας  $A$  καλείται θετικός αν  $\langle AX, X \rangle > 0, \forall X \in \mathbb{R}_n, X \neq O$ , και τότε γράφουμε:  $A > O$ .

Για δύο συμμετρικούς πίνακες  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , ορίζουμε:

$$A > B \iff A - B > O$$

**Άσκηση 2.** Έστω  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  δύο συμμετρικοί πίνακες. Να δειχθούν τα εξής:

- (1) Αν  $A > O$  και  $B > O$  και  $\kappa, \lambda > 0$ , τότε:  $\kappa A + \lambda B > O$ .
- (2) Αν  $A > O$  και ο πίνακας  $P$  είναι αντιστρέψιμος, τότε:  ${}^t P A P > O$
- (3) Αν  $A', B' \in M_n(\mathbb{R})$  είναι δύο συμμετρικοί πίνακες, τότε:

$$A < A' \text{ και } B < B' \implies A + A' < B + B'$$

- (4) Αν  $C \in M_n(\mathbb{R})$  είναι ένας συμμετρικός πίνακας, τότε:

$$A < B \text{ και } B < C \implies A < C$$

- (5) Αν ο πίνακας  $P$  είναι αντιστρέψιμος, τότε:

$$A < B \implies {}^t P A P < {}^t P B P$$

- (6)

$$O < A < I_n \implies I_n < A^{-1}$$

- (7)

$$O < A < B \implies B^{-1} < A^{-1}$$

- (8)

$$O < A < B \implies \sqrt{A} < \sqrt{B}$$

**Άσκηση 3.** Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 + 5z^2 - xy - 2xz + 2yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν  $A$  είναι ο πίνακας της  $q$ , να εξετασθεί αν ο  $A$  είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ , και αστην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του  $A$ .

**Άσκηση 4.** Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν  $A$  είναι ο πίνακας της  $q$ , να εξετασθεί αν ο  $A$  είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του  $A$ .

**Άσκηση 5.** Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν  $A$  είναι ο πίνακας της  $q$ , να εξετασθεί αν ο  $A$  είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του  $A$ .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = 3\}$$

**Άσκηση 6.** Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν  $A$  είναι ο πίνακας της  $q$ , να εξετασθεί αν ο  $A$  είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του  $A$ .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = -4\}$$

**Άσκηση 7.** Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = 17x^2 + 8y^2 + 12xy$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν  $A$  είναι ο πίνακας της  $q$ , να εξετασθεί αν ο  $A$  είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του  $A$ .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 17x^2 + 8y^2 + 12xy + 60x + 80y - 5z + 210 = 0\}$$

**Άσκηση 8.** Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = y^2 + z^2 - xy + xz + yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν  $A$  είναι ο πίνακας της  $q$ , να εξετασθεί αν ο  $A$  είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του  $A$ .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 - xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0\}$$

**Άσκηση 9.** Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5xy - 2xz - 2yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν  $A$  είναι ο πίνακας της  $q$ , να εξετασθεί αν ο  $A$  είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του  $A$ .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y + z = 0\}$$

**Άσκηση 10.** Να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y + 4z + 4 = 0\}$$

**Άσκηση 11.** Να βρεθεί μια κυβική ρίζα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + 2xz = 1\}$$

**Άσκηση 12.** Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy - 4yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν  $A$  είναι ο πίνακας της  $q$ , να εξετασθεί αν ο  $A$  είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του  $A$ , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του  $A$ .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 - 4xy - 4yz + 12x + 6y + 6z = 1\}$$